

Übungen zur Mathematik für Informatiker I a

4. Sei $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ und für $n \in \mathbb{N}$ sei $[n]$ der Rest der Division von n durch m . Sei $a = \sum_{n=0}^k \alpha_n m^n$ und $b = \sum_{n=0}^k \beta_n m^n$ mit $\alpha_i, \beta_i \in \{0, \dots, m-1\}$. Setze $\alpha_{k+1} = \beta_{k+1} = 0$. Seien $f(n)$ und $g(n)$ rekursiv definiert durch

$$g(0) = 0$$

$$f(i) = [\alpha_i + \beta_i + g(i)]$$

$$g(i+1) = \frac{\alpha_i + \beta_i + g(i) - f(i)}{m}.$$

Beweisen Sie, daß $a + b = \sum_{i=0}^{k+1} f(i)m^i$ gilt.

Bemerkung: Das ist der übliche Algorithmus der schriftlichen Addition.

5. Sei $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$ und $\mathbb{Z}_m = \{0, \dots, m-1\}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $[n]$ der Rest der Division von n durch m . Beweisen Sie, daß $[[a] + [b]] = [a + b]$ und $[[a] \cdot [b]] = [a \cdot b]$ ist.

Für $a, b \in \mathbb{Z}_m$ seien \oplus und \otimes definiert durch $a \oplus b = [a + b]$ and $a \otimes b = [a \cdot b]$. Fertigen Sie Tafeln für \mathbb{Z}_5 und \mathbb{Z}_6 mit diesen beiden Operationen an.

Für die beiden Operationen gilt das Kommutativgesetz. Wie sieht man das an den Tafeln?

Gibt es für alle $a \in \mathbb{Z}_5$ ein $b \in \mathbb{Z}_5$, so daß $a \otimes b = 1$ ist? Gilt das auch für \mathbb{Z}_6 ?

6. Sei $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$ und für $n \in \mathbb{N}$ sei $[n]$ der Rest der Division von n durch m . Sei $k = \sum_{n=0}^r \varepsilon_n 2^n$ mit $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$. Sei $a \in \mathbb{N}$, und seien $f(n)$ und $g(n)$ rekursiv definiert durch

$$g(0) = [a], f(0) = g(0)^{\varepsilon_0}$$

$$g(n+1) = [g(n)^2]$$

$$f(n+1) = [f(n)g(n+1)^{\varepsilon_{n+1}}].$$

Beweisen Sie, daß $f(r) = [a^k]$ gilt.

Bemerkung: Diese Methode $[a^n]$ zu berechnen ist wesentlich effektiver als die offensichtliche.

Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet.

Abgabetermin: bis spätestens 4. November 2003, 9.00 Uhr, Übungskasten, Römerstr./Neubau, 1. Stock, vor dem Eingang zur Empore des Audimax

Internet: www.math.uni-bonn.de/people/irrgang/MIA.html

Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung groß die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.