Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

WS 03/04
06. 01. 04
Blatt 10

Übungen zur Mathematik für Informatiker I a

31. Sei K ein Körper und

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, K)$$

invertierbar. Zeigen Sie, daß dann

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

ist. Also ist A genau dann invertierbar, wenn $ad - cb \neq 0$ ist.

32. Sei $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie Vektoren $v_0, v_1, v_{-1} \in \mathbb{R}^3$ mit $v_0, v_1, v_{-1} \neq 0$, so daß $Av_0 = 0v_0$, $Av_1 = 1v_1$ und $Av_{-1} = -1v_{-1}$ gilt.
(b) Geben Sie eine invertierbare Matrix $P \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ an, so daß PAP^{-1} eine Diagonalmatrix ist.

33. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt nilpotent, wenn es ein $1 \leq k \in \mathbb{N}$ gibt mit $f^k = 0$.
Zeigen Sie: Ist f nilpotent, dann gibt es eine Basis B von V, so daß $DM_B(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist, die nur Nullen auf der Diagonalen hat.
Hinweis: Betrachte $U_i = Kern\ f^i$. Dann gilt $U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq \ldots \subsetneq U_k = V$. Vergleiche dazu Aufgabe 27. Außerdem ist $f[U_i] \subseteq U_{i-1}$. Wähle zunächst eine Basis von U_1, ergänze diese zu einer Basis von U_2, diese zu einer von U_3, etc.

Dieses Blatt wird nicht mehr gewertet, aber ähnliche Aufgaben können in der Klausur vorkommen.

Abgabemöglichkeit: bis spätestens 13. Januar 2004, 9.00 Uhr, Übungskasten, Römerstr./Neubau, 1. Stock, vor dem Eingang zur Empore des Audimax

Internet: www.math.uni-bonn.de/people/irrgang/MIA.html

Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung groß die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.