Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

WS 03/04
29. 01. 04

Klausur zur Mathematik für Informatiker I a

Bitte geben Sie auf jedem Blatt Ihrer Lösung Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an.

Name: DPO:

Vorname: Übungsgruppe:

Matrikelnummer:

Tragen Sie bitte bei Aufgaben, die Sie nicht bearbeitet haben, einen Strich ein:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte										

Vorkorrigierender:

Prüfer: Note:

Bei Rechnungen soll der Rechenweg ersichtlich sein.

Viel Erfolg!

1. Sei K ein Körper und seien V und W K-Vektorräume. Wann heißt eine Abbildung $f : V \to W$ linear? Definieren Sie Kern$f$ und Bild$f$.

2. Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit Basis $(v_1, \ldots, v_n)$. Zeigen Sie: Für alle $v \in V$ existiert genau ein n-Tupel $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, so daß $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ ist.

3. Kennzeichnen Sie die wahren Aussagen in der Box □ durch `w`, die falschen durch `f`. Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen. Sie erhalten einen Punkt für jede richtige Antwort, -2 Punkte für jede falsche, aber mindestens 0 Punkte für die Aufgabe insgesamt.

□ $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 = y^2 + z^2\}$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$.

□ Für alle $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^3$ ist Lös(A, b) ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

□ Für alle $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ ist Lös$(A, 0) \neq \emptyset$.

□ Ist $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Endomorphismus mit drei verschiedenen Eigenwerten, die alle nicht Null sind, so ist f injektiv.

Bitte wenden!

4. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

Berechnen Sie $\det(A)$.

5. Gegeben seien im $\mathbb{R}^3$ die Vektoren $v_1 = (1,2,0)$, $v_2 = (0,1,2)$ und $w_1 = (1,2,-1)$, $w_2 = (-2,1,8)$. Bestimmen Sie eine Basis von $L(v_1, v_2) \cap L(w_1, w_2)$.

6. Sei $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4, x \mapsto Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & -2 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 9 \\ -3 & -6 & 4 & 6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild} f$.

7. Sei $f : M \to N$ eine injektive Abbildung, und seien A, B Teilmengen von M. Zeigen Sie:

$$f[A \cap B] = f[A] \cap f[B].$$

8. Sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$, $n \in \mathbb{N}$, und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ die Zeilen der darstellenden Matrix $DM_B(f) = (a_{ij} \mid 1 \leq i,j \leq n)$ von f. Zeigen Sie: Gibt es ein $k \in K$, so daß für alle Zeilen die Zeilensumme $\sum_{j=1}^n a_{ij} = k$ ist, dann ist $\sum_{j=1}^n b_j$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert k.

Zusatzaufgabe:

9. Sei K ein Körper mit nur endlich vielen Elementen und $f : K \to K, k \mapsto k^2 + k$. Zeigen Sie:

(a) Die Menge $f[K]$ hat weniger Elemente als K.

(b) Ist $c \in K$ kein Element von $f[K]$, so ist der Endomorphismus $g : K^2 \to K^2$ mit der darstellenden Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & c \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, K)$$

nicht diagonalisierbar.

Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet.