Teil IV.
Forcing.

25 Forcing-Halbordnungen und generische Filter.

In diesem Kapitel stellen wir die fundamentalen Begriffe der Forcing-Methode vor. Die Grundlage dieser Methode bilden spezielle schwache partielle Ordnungen und spezielle Filter auf diesen. **Von nun an setzen wir ZFC voraus.**

25.1 Forcing-Halbordnungen und die Existenz generischer Filter.

25.1 Definition Ein Dreitupel $(P, \leq, 1_P)$ heißt **Forcing-Halbordnung**, falls folgendes gilt:

(i) $(P, \leq)$ ist eine schwache partielle Ordnung,[196]

(ii) 1_P ist größtes Element von $(P, \leq)$.[197]

Im Fall $p \leq q$ sagen wir auch, p **verstärkt** q. Sind $q_1, \ldots, q_n \in P$ und ist $p \leq q_i$ für $i < n$, so sagen wir, p ist eine **gemeinsame Verstärkung** von $q_1, \ldots, q_n$.

25.2 Definition Sei $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung.

(a) Sei $D \subset P$. D ist **dicht in** $P :\equiv \forall p \in P\, \exists q \in D\; q \leq p$.

(b) Sei $\mathcal{D}$ eine Menge und G ein Filter[198] auf $(P, \leq)$.
G ist P**-generisch über** $\mathcal{D} :\equiv \forall D \in \mathcal{D}\; (D \text{ dicht in } P \longrightarrow D \cap G \neq \emptyset)$.

Wir **interpretieren** die soeben eingeführten Begriffe wie folgt: Eine Forcing-Halbordnung ist eine Menge von **Bedingungen** p. $p \leq q$ bedeutet, daß p die durch q festgelegte Bedingung umfaßt und gegebenenfalls verschärft.[199] Bedingungen p, q sind kompatibel, wenn sich die durch p und q geforderten Eigenschaften nicht widersprechen. Ein Filter G entspricht einer Konstruktion: durch die Bedingungen in G wird ein gewisses Objekt festgelegt, das diesen Bedingungen genügt. Ist G P-generisch über $\mathcal{D}$, so werden die durch die dichten Mengen in $\mathcal{D}$ „codierten“ Eigenschaften bei der Konstruktion durch G berücksichtigt.

Zur Erläuterung der neu eingeführten Begriffe stellen wir ein paar Beispiele vor, die zum Teil später noch von Bedeutung sein werden.

25.3 Beispiel Seien $a, b \in V$ und $P \subset \{f \mid f : a \supset\!\!\to b\}$ mit $\emptyset \in P$.[200] Dann ist $(P, \supset, \emptyset)$ eine Forcing-Halbordnung. Wir nennen $\supset$ auch die kanonische partielle Ordnung von P. Eine Verstärkung eines $p \in P$ ist eine partielle Funktion $q : a \supset\!\!\to b$ mit $q \in P$, die p erweitert: $\mathrm{dom}(q) \supset \mathrm{dom}(p)$ und $q \restriction \mathrm{dom}(p) = p$. Sind $p, q \in P$ und sind p und q kompatibel, d.h., es gibt ein $r \in P$ mit $r \supset p$ und $r \supset q$, so gilt $p(i) = q(i)$ für alle $i \in \mathrm{dom}(p) \cap \mathrm{dom}(q)$, da die Werte beider Funktionen an diesen Stellen mit dem Funktionswert von r an der entsprechenden Stelle übereinstimmen. Da die Elemente eines jeden Filters auf P paarweise kompatibel sind, folgt: Ist G ein Filter auf $(P, \supset)$, so ist $\bigcup G$ eine partielle Funktion von a nach b und für $p \in G$ ist $p = \left(\bigcup G\right) \restriction \mathrm{dom}(p)$. Als Spezialfall erhalten wir für $\mu \in \mathrm{Card}$ die Menge der partiellen Funktionen von a nach b, deren Definitionsbereich kleinere Mächtigkeit als μ hat:

$$\mathrm{Fn}(a, b, \mu) :\equiv \{f \mid f : a \supset\!\!\to b \wedge \overline{\overline{f}} < \mu\}.$$

Für $p, q \in \mathrm{Fn}(a, b, \mu)$ gilt $p \parallel q \longleftrightarrow \mathrm{Fun}(p \cup q)$ und $p \perp q \longleftrightarrow \exists i \in \mathrm{dom}(p) \cap \mathrm{dom}(q)\; p(i) \neq q(i)$.

Existiert für jedes $\mathcal{D}$ ein P-generischer Filter über $\mathcal{D}$? Wir können zeigen:

25.4 Satz (Existenzsatz für generische Filter) *Sei $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung und $\mathcal{D}$ sei höchstens abzählbar. Dann existiert zu jedem $p_0 \in P$ ein P-generischer Filter G über $\mathcal{D}$ mit $p_0 \in G$.*

[196] vgl. 2.33.
[197] vgl 2.34.
[198] vgl 12.2.
[199] Man kann dann $p \leq q$ so interpretieren, daß p eine höchstens gleich große „Unsicherheit“ oder „Unschärfe“ induziert wie q.
[200] zu $f : a \supset\!\!\to b$ vgl. 2.46.

Beweis. Sei $\{D_n \mid n < \omega\}$ eine Aufzählung derjenigen Elemente von $\mathcal{D}$, die dicht in P sind. Definiere rekursiv eine bzgl. $\leq$ absteigende Folge $(p_n \mid n < \omega)$ wie folgt:

p_0 sei das im Satz genannte Element von P;
ist p_n bereits definiert, so sei $p_{n+1} \in D_n$ mit $p_{n+1} \leq p_n$; p_{n+1} existiert, da D_n dicht in P ist.

Setze $G :\equiv \{p \in P \mid \exists n < \omega\, p_n \leq p\}$. Dann gilt $p_0 \in G$ und $P \cap D \neq \emptyset$ für jedes $D \in \mathcal{D}$, das dicht in P ist. Da $\leq$ transitiv ist, ist G nach oben abgeschlossen: ist nämlich $p \in G$ und $p \leq q$, so wähle $n < \omega$ mit $p_n \leq p$; aus $p_n \leq p$ und $p \leq q$ folgt $p_n \leq q$, d.h., $q \in G$. Schließlich sind je zwei Elemente $p, q \in G$ kompatibel in G: wähle zu p, q nämlich $k, l < \omega$ mit $p_k \leq p$ und $p_l \leq q$; da $(p_n \mid n < \omega)$ absteigend und $\leq$ transitiv ist, ist $p_{\max\{k,l\}} \leq p$ und $p_{\max\{k,l\}} \leq q$. Damit ist G als Filter nachgewiesen. QED

Die Beschränkung auf höchstens abzählbare Mengen $\mathcal{D}$ im Existenzsatz kann nicht fallengelassen werden:

25.5 Beispiel Gegenbeispiel für $\overline{\overline{\mathcal{D}}} = 2^{\aleph_0}$.
Sei $P :\equiv \mathrm{Fn}(\omega, 2, \aleph_0)$ und $\leq$ die kanonische partielle Ordnung von P. Für $a \subset \omega$ sei

$$D_a :\equiv \{p \in P \mid \exists i \in \mathrm{dom}(p)\ (p(i) = 0 \longleftrightarrow i \in a)\}.$$

$p \in D_a$ bedeutet demnach, daß p keine Einschränkung der charakteristischen Funktion χ_a von a ist: $p \not\subset \chi_a$.

(1) D_a ist dicht in P.

Beweis. Sei $p \in P$. Wegen $\overline{\overline{p}} < \aleph_0$ existiert ein $n < \omega$ mit $n \notin \mathrm{dom}(p)$. Definiere $q \in P$ durch

$$q(i) :\equiv \begin{cases} p(i), & \text{falls } i \in \mathrm{dom}(p); \\ 0, & \text{falls } i = n \text{ und } i \in a; \\ 1, & \text{falls } i = n \text{ und } i \notin a. \end{cases}$$

Es gilt $q \leq p$ und $q \in D_a$. Also ist D_a dicht in P. qed(1)

Sei $\mathcal{D} :\equiv \{D_a \mid a \subset \omega\}$. Dann ist $\overline{\overline{\mathcal{D}}} = 2^{\aleph_0}$: sind nämlich $a, b \subset \omega$ mit $a \neq b$, so existiert o.E. ein $i \in a \setminus b$, und es ist $\{(i,0)\} \in D_a \setminus D_b$, also $D_a \neq D_b$ für $a \neq b$.
Angenommen nun, es existiert ein Filter G, der P-generisch über $\mathcal{D}$ ist. Sei $g :\equiv \bigcup G$. Wie in 25.3 gesehen gilt dann $g\colon \omega \supset\!\!\to 2$. Sei $b :\equiv \{i \in \mathrm{dom}(g) \mid g(i) = 1\}$. Da G P-generisch über $\mathcal{D}$ ist, existiert $p \in G \cap D_b$. Dann ist einerseits $p \subset g \subset \chi_b$ wegen $p \in G$, andererseits impliziert $p \in D_b$, daß p keine Einschränkung von χ_b ist. Der Widerspruch zeigt, daß es kein derartiges G geben kann.
Als **Folgerung** erhalten wir nochmals das folgende bekannte Resultat:

$$2^{\aleph_0} > \aleph_0.$$

Im Fall $2^{\aleph_0} = \aleph_0$ müßte nach dem Existenzsatz 25.4 nämlich ein P-generischer Filter über $\mathcal{D}$ existieren.

25.6 Beispiel Gegenbeispiel im Fall $\overline{\overline{\mathcal{D}}} = \aleph_1$.
Sei $P :\equiv \mathrm{Fn}(\omega, \omega_1, \aleph_0)$ und $\leq$ sei die kanonische partielle Ordnung von P. Wir zeigen, daß wir durch Wahl eines geeigneten $\mathcal{D}$ mit $\overline{\overline{\mathcal{D}}} = \aleph_1$ im Fall der Existenz eines P-generischen Filters über $\mathcal{D}$ eine Surjektion von einer Teilmenge von ω auf ω_1 konstruieren können, was der Definition von ω_1 widerspricht.
Für $\alpha < \omega_1$ sei $D_\alpha :\equiv \{p \in P \mid \alpha \in \mathrm{ran}(p)\}$.

(1) D_α ist dicht in P.

Beweis. Sei $p \in P$. Wegen $\overline{\overline{p}} < \aleph_0$ existiert ein $n < \omega$ mit $n \notin \mathrm{dom}(p)$. Definiere $q \in P$ durch

$$q(i) :\equiv \begin{cases} p(i), & \text{falls } i \in \mathrm{dom}(p); \\ \alpha, & \text{falls } i = n. \end{cases}$$

Dann ist $q \leq p$ und $q \in D_\alpha$. qed(1)

Sei $\mathcal{D} :\equiv \{D_\alpha \,|\, \alpha < \omega_1\}$. Es ist $\overline{\overline{\mathcal{D}}} = \aleph_1$, denn für $\alpha < \beta < \omega_1$ ist $\{(0,\alpha)\} \in D_\alpha \setminus D_\beta$. Angenommen, es existiert ein P-generischer Filter G über $\mathcal{D}$. Sei $g :\equiv \bigcup G$. Dann ist $g\colon \omega \supset\!\!\!\to \omega_1$. Wir zeigen, daß g surjektiv ist. Sei also $\alpha < \omega_1$. Wähle $p \in G \cap D_\alpha$. Dann ist $p \subset \bigcup G = g$, also $\alpha \in \mathrm{ran}(p) \subset \mathrm{ran}(g)$, und dies war zu zeigen.

Das letzte Beispiel gibt einen sehr guten Eindruck davon, wie mit Hilfe generischer Filter „mathematische Objekte“ konstruiert werden können: zur Konstruktion eines solchen Objektes wähle zunächst eine geeignete Forcing-Halbordnung P. „Codiere“ dann die gewünschten Eigenschaften des Objektes mit Hilfe einer Familie $\mathcal{D}$ von in P dichten Teilmengen, so daß die Eigenschaften durch Anwendung mengentheoretischer Operationen (z.B. Vereinigungbildung, Durchschnittbildung, Projektion) aus jedem P-generischen Filter G über $\mathcal{D}$ „decodiert“ werden können. Existiert dann ein derartiger Filter G, so liefert die Anwendung der entsprechenden mengentheoretischen Operationen das gewünschte mathematische Objekt. Wir zeigen einige weitere Anwendungen.

25.2 Eine Anwendung in der Rekursionstheorie: Turing-Grade.

Wir skizzieren kurz den Aufbau einer Turing[201]-Maschine. Eine Turing-Maschine M besteht aus einer *endlichen Kontrolle*, einem beidseitig (potentiell) unendlich langen Band als Speichermedium und einem Schreib-Lese-Kopf. Das Band ist in Abschnitte (*Bandquadrate*) eingeteilt, jedes Bandquadrat enthält genau genau eines der Symbole $0, 1, \sqcup$, wobei $\sqcup$ für das Blank steht. Der Schreib-Lese-Kopf befindet sich stets über genau einem der Bandquadrate, dieses wird auch als *aktuelles Bandquadrat* bezeichnet. M besitzt endlich viele „Zustände“; einer dieser Zustände ist als *Startzustand* ausgezeichnet. In der endlichen Kontrolle von M ist in endlich vielen *Befehlen* eindeutig festgelegt, wie die Maschine zu reagieren hat, wenn sie sich im Zustand z befindet und der Schreib-Lese-Kopf im aktuellen Bandquadrat das Symbol s liest. Es sind genau zwei Fälle möglich:

(1) Zu z und s existiert kein Befehl in der endlichen Kontrolle. In diesem Fall hält die Maschine an.

(2) Zu z und s existiert in der endlichen Kontrolle genau ein Befehl. Dieser spezifiziert genau ein Symbol $s' \in \{0, 1, \sqcup\}$, genau einen Zustand z' und genau ein $v \in \{-1, 0, +1\}$. Dann wird s' in das aktuelle Bandquadrat geschrieben, die Maschine geht in den Zustand z' über und der Schreib-Lese-Kopf wird wie folgt bewegt: ist $v = -1$ um genau ein Bandquadrat nach links, im Fall $v = +1$ um genau ein Bandquadrat nach rechts, im Fall $v = 0$ findet keine Bewegung statt.

Zu Beginn befindet sich auf dem Band die *Eingabe* $w \in \{0, 1\}^*$, alle anderen Felder sind leer; die Maschine befindet sich im Startzustand, der Schreib-Lese-Kopf befindet sich auf dem Bandquadrat unmittelbar rechts von der Eingabe.[202]

Für unsere Zwecke modifizieren wir das allgemeine Konzept der Turing-Maschine wie folgt: wenn die Maschine stoppt, befindet sich auf dem aktuellen Bandquadrat genau eines der Symbole 0 bzw. 1. Dies können wir z.B. erreichen, indem wir für jeden Zustand z, der nicht auf das Symbol $\sqcup$ reagieren kann, die Anweisung, $\sqcup$ zu schreiben, in den Zustand z überzugehen und keine Kopfbewegung durchzuführen, hinzufügen. Im Falle des Haltens von M interpretieren wir den Inhalt (also 0 oder 1) des aktuellen Bandquadrates als *Ausgabe* von M. Wir betrachten nur Turing-Maschinen, deren Eingaben natürliche Zahlen sind. Hierbei stellen wir die natürliche Zahl n durch den String aus $\{0, 1, \sqcup\}^*$ dar, der der Binärdarstellung $\mathrm{bin}(n)$ von n entspricht.

---

[201] Alan Mathison Turing (23.6.1912, London–7.6.1954, Wilmslow (bei Manchester)) ab 1931 Mathematikstudium am King's College in Cambridge, nach seinem Abschluß 1935 Mitglied dieses Colleges; 1936–1938 am Princeton College, dort 1938 Promotion; Rückkehr nach England; dort 1938/39 erneut Lehrer am King's College; im 2.Weltkrieg Dienst in der Informationsabteilung des britischen Außenministeriums; 1945–1948 am National Laboratory of Physics mit Bau und Einsatz einer Großrechenanlage (ACE) beschäftigt; ab 1948 an der Universität Manchester Leiter der mathematischen Arbeiten beim Bau einer Rechenanlage. Turings Hauptarbeitsgebiet ist die Theorie der berechenbaren Funktionen. Zur Formalisierung des intuitiv gegebenen Begriffes der „berechenbaren Funktion“ entwickelt er das Konzept der Turing-Maschine.

[202] Eine formale Definition des Begriffes „Turing-Maschine“, die sich ggf. in Details von der hier vorgestellten Charakterisierung unterscheiden mag, findet man z.B. in [17] oder [18].

Ist $f \in {}^{\omega}2$ so modifizieren wir eine TURING-Maschine zu einer TURING-Maschine *mit Orakel* f, indem wir die Berechnung für jede Eingabe n mit dem Bandinhalt

$$\ldots \sqcup \overset{\downarrow \text{(Schreib−Lese−Kopf)}}{\mathrm{bin}(n)} f(0)f(1)f(2)\ldots$$

starten. Eine TURING-Maschine M mit Orakel f induziert eine partielle Abbildung $g_{M,f}\colon \omega \supset\!\!\to 2$ durch

$$g_{M,f}(n) :\equiv \begin{cases} 0, & \text{falls } M \text{ bei Eingabe } n \text{ stoppt mit Ausgabe } 0; \\ 1, & \text{falls } M \text{ bei Eingabe } n \text{ stoppt mit Ausgabe } 1; \\ \text{undefiniert,} & \text{falls } M \text{ bei Eingabe } n \text{ nicht stoppt.} \end{cases}$$

Wir definieren die zweistellige Relation $\leq_T$ auf ${}^{\omega}2$ durch

$$g \leq_T f :\equiv \text{ es gibt eine Turingmaschine } M \text{ mit } g = g_{M,f}.$$

Gilt $g \leq_T f$, so sagen wir, g ist auf f TURING-*reduzierbar*, oder auch, g hat höchstens denselben TURING-*Grad* wie f. Intuitiv bedeutet $g \leq_T f$, daß g aus f (durch eine TURING-Maschine) berechnet werden kann.

In der Rekursionstheorie wird u.a. die Relation $\leq_T$ analysiert. Eine der hierbei zu untersuchenden Fragen ist, ob es Funktionen $f, g \in {}^{\omega}2$ gibt, die bzgl. $\leq_T$ unvergleichbar sind. Mit Hilfe eines generischen Filters zeigen wir, daß dies der Fall ist. Wir benötigen den folgenden Begriff.

25.7 Definition Sei $F\colon {}^{\omega}2 \supset\!\!\to {}^{\omega}2$.
F ist **stetig** $:\equiv \forall f \in \mathrm{dom}(F)\, \forall m < \omega\, \exists n < \omega\, \forall g \in \mathrm{dom}(F)\, \big(f \restriction n = g \restriction n \longrightarrow F(f) \restriction m = F(g) \restriction m\big)$.

Jede TURING-Maschine M induziert eine partielle Funktion $F_M\colon {}^{\omega}2 \supset\!\!\to {}^{\omega}2$ durch

$$F_M(f) :\equiv \begin{cases} g_{M,f}, & \text{falls } g_{M,f} \text{ total ist;} \\ \text{undefiniert,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $g \leq_T f$ genau dann, wenn es eine TURING-Maschine M gibt mit $g = F_M(f)$. Ferner:

25.8 Lemma *F_M ist stetig.*

BEWEIS. Sei $f \in \mathrm{dom}(F_M)$ und $m < \omega$. Für die Berechnung der Werte $F_M(f)(0), \ldots, F_M(f)(m-1)$ werden nur endlich viele Bandquadrate benutzt. Wähle ein $n < \omega$, so daß bei Berechnung dieser Werte von den mit dem Orakel f belegten Bandquadraten nur die mit $f(0), \ldots, f(n-1)$ beschrifteten verwendet werden. Ist dann $g \in \mathrm{dom}(F_M)$ mit $g \restriction n = f \restriction n$, so sind die bei der Berechnung von $F_M(g) \restriction m$ und bei der Berechnung von $F_M(f) \restriction m$ verwendeten Bandquadrate gleich beschriftet, so daß $F_M(g) \restriction m = F_M(f) \restriction m$ gilt. QED

25.9 Lemma *Für $i < \omega$ sei $F_i\colon {}^{\omega}2 \supset\!\!\to {}^{\omega}2$ eine stetige partielle Funktion. Dann existieren $f, g \in {}^{\omega}2$ mit*

$$\forall i < \omega\, \big(f \neq F_i(g) \wedge g \neq F_i(f)\big).$$

BEWEIS. Sei $P :\equiv \mathrm{Fn}(\omega, 2, \aleph_0) \times \mathrm{Fn}(\omega, 2, \aleph_0)$. Für $(p_0, p_1), (q_0, q_1) \in P$ sei

$$(p_0, p_1) \leq (q_0, q_1) :\equiv p_0 \supset q_0 \wedge p_1 \supset q_1.$$

Ferner sei $1_P :\equiv (\emptyset, \emptyset)$. Dann ist $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung. Für $i < \omega$ sei

$$D_i :\equiv \Big\{(p_0, p_1) \,\Big|\, \forall h_0, h_1 \in {}^{\omega}2\, \big((p_0 \subset h_0 \wedge p_1 \subset h_1 \wedge h_0 \in \mathrm{dom}(F_i)) \longrightarrow h_1 \neq F_i(h_0)\big)\Big\}.$$

(1) D_i ist dicht in P.

Beweis. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1. $\neg\exists h_0 \in {}^{\omega}2\ (p_0 \subset h_0 \wedge h_0 \in \mathrm{dom}(F_i))$. In diesem Fall ist $(p_0, p_1) \in D_i$ und (1) bewiesen.

Fall 2. $\exists h_0 \in {}^{\omega}2\ (p_0 \subset h_0 \wedge h_0 \in \mathrm{dom}(F_i))$. Wähle $h_0^* \in {}^{\omega}2$ mit $p_0 \subset h_0^*$ und $h_0^* \in \mathrm{dom}(F_i)$. Setze $h_1^* :\equiv F_i(h_0^*)$. Wähle ein $m < \omega$ und ein $q_1{:}\, m \to 2$ mit $q_1 \supset p_1$ und $q_1 \not\subset h_1^*$. Da F_i stetig ist, existiert ein $n < \omega$ mit

$$(*) \qquad \forall h_0 \in \mathrm{dom}(F_i)\ \big(h_0 \restriction n = h_0^* \restriction n \longrightarrow F_i(h_0) \restriction m = F_i(h_0^*) \restriction m\big).$$

Indem wir gegebenenfalls n vergrößern, können wir o.E. $\mathrm{dom}(p_0) \subset n$ annehmen, so daß $p_0 \subset h_0^* \restriction n$ gilt. Setze $q_0 :\equiv h_0^* \restriction n$. Dann ist $(q_0, q_1) \leq (p_0, p_1)$. Wir zeigen $(q_0, q_1) \in D_i$. Seien also $h_0, h_1 \in {}^{\omega}2$ mit $p_0 \subset h_0$, $p_1 \subset h_1$ und $h_0 \in \mathrm{dom}(F_i)$. Wegen $h_0 \supset q_0 = h_0^* \restriction n$ ist $h_0 \restriction n = h_0^* \restriction n$, so daß nach $(*)$ $F_i(h_0) \restriction m = F_i(h_0^*) \restriction m$ gilt. Da $q_1 \not\subset F_i(h_0^*)$ und $\mathrm{dom}(q_1) = m$ nach Wahl von q_1 gilt, folgt hieraus $q_1 \not\subset F_i(h_0)$. Da wir nach Voraussetzung $q_1 \subset h_1$ haben, ergibt sich $h_1 \neq F_i(h_0)$. Dies war zu zeigen. Also ist $(q_0, q_1) \in D_i$. qed(1)

Wir setzen für $i < \omega$

$$D_i' :\equiv \Big\{(p_0, p_1) \;\Big|\; \forall h_0, h_1 \in {}^{\omega}2\ \big((p_0 \subset h_0 \wedge p_1 \subset h_1 \wedge h_1 \in \mathrm{dom}(F_i)) \longrightarrow h_0 \neq F_i(h_1)\big)\Big\}.$$

Wie (1) beweist man dann

(2) $\quad D_i'$ ist dicht in P.

Schließlich setzen wir für $n < \omega$

$$D_n'' :\equiv \big\{(p_0, p_1) \;\big|\; n \in \mathrm{dom}(p_0) \wedge n \in \mathrm{dom}(p_1)\big\}.$$

(3) $\quad D_n''$ ist dicht in P.

Beweis. Sei $(p_0, p_1) \in P$. Definiere für $k < 2$

$$q_k :\equiv \begin{cases} p_k, & \text{falls } n \in \mathrm{dom}(p_k); \\ p_k \cup \{(n, 0)\}, & \text{falls } n \notin \mathrm{dom}(p_k). \end{cases}$$

Dann ist $(q_0, q_1) \in D_n''$ und $(q_0, q_1) \leq (p_0, p_1)$. qed(3)

Sei G ein P-generischer Filter über $\{D_i \,|\, i < \omega\} \cup \{D_i' \,|\, i < \omega\} \cup \{D_n'' \,|\, n < \omega\}$. Setze

$$f :\equiv \bigcup\{p_0 \mid \exists p_1\, (p_0, p_1) \in G\} \text{ und } g :\equiv \bigcup\{p_1 \mid \exists p_0\, (p_0, p_1) \in G\}.$$

Dann gilt $f, g{:}\, \omega \supset\!\!\!\to 2$. f und g sind totale Funktionen: für $n < \omega$ wähle nämlich $(p_0, p_1) \in G \cap D_n''$. Dann ist $n \in \mathrm{dom}(p_0) \subset \mathrm{dom}(f)$ und $n \in \mathrm{dom}(p_1) \subset \mathrm{dom}(g)$. Ferner gilt für $i < \omega$:

(4) $\quad f \neq F_i(g)$, $g \neq F_i(f)$.

Beweis. Es genügt aus Symmetriegründen, die erste Ungleichung zu verifizieren. Ist $g \notin \mathrm{dom}(F_i)$, so ist $F_i(g) = V$ nach Definition des Termes $F_i(g)$, siehe 2.49. Insbesondere ist $f \neq F_i(g)$ wegen $f \in V$. Sei nun $g \in \mathrm{dom}(F_i)$ angenommen. Wähle $(p_0, p_1) \in G \cap D_i'$. Dann ist $p_0 \subset f$ und $p_1 \subset g$, und nach Definition von D_i' (mit $h_0 :\equiv f$ und $h_1 :\equiv g$) folgt $f \neq F_i(g)$. qed(4)

Damit ist das Lemma bewiesen. QED

Nun erhalten wir das folgende, auf Post[203] zurückgehende Resultat:

[203] Emil Leon Post (11.2.1897, Augustów–21.4.1954, New York) Mathematikstudium bis 1917 am City College in New York, danach an der Columbia University; 1920 Promotion; Lehrtätigkeit an New Yorker Hochschulen, ab 1935 am City College. Post arbeitet zunächst im Bereich der mathematischen Logik, dann auch im Bereich der formalen Sprachen.

25.10 Satz *Es gibt $f, g \in {}^{\omega}2$ mit $f \not\leq_T g$ und $g \not\leq_T f$.*

Beweis. Wegen 25.9 genügt es zu zeigen, daß $\{F_M \mid M$ ist Turing-Maschine$\}$ abzählbar ist. Dann existieren nach 25.9 nämlich $f, g \in {}^{\omega}2$ mit $f \neq F_M(g)$ und $g \neq F_M(f)$ für alle Turing-Maschinen M. Dies bedeutet gerade $g \not\leq_T f$ und $f \not\leq_T g$.

Da jede Turing-Maschine durch ihre Befehle eindeutig bestimmt ist, kann sie aufgefaßt werden als eine endliche Teilmenge von

$$X :\equiv \underbrace{\omega}_{\text{alter Zustand}} \times \underbrace{\{0,1,\sqcup\}}_{\text{gelesenes Zeichen}} \times \underbrace{\{0,1,\sqcup\}}_{\text{neues Zeichen}} \times \underbrace{\omega}_{\text{neuer Zustand}} \times \underbrace{\{-1,0,+1\}}_{\text{Kopfbewegung}}.$$

Wegen $\overline{\overline{X}} = \aleph_0$ ist $\overline{\overline{[X]^{<\omega}}} = \aleph_0$, d.h., es gibt (modulo Umbenennung der Zustände) nur abzählbar viele Turing-Maschinen, und dies war zu zeigen. QED

25.3 Eine Anwendung in der Modelltheorie: der Typenübergehungssatz.

Wir fixieren eine abzählbare Sprache $L = (I, J, K, t)$ und eine Theorie $\Phi \subset \mathrm{Fml}_0(L)$.

25.11 Definition Ein **L-Typ** ist eine konsistente Teilmenge $\Sigma(x_0, \ldots, x_{n-1})$ von $\mathrm{Fml}(L)$.

Ein Typ $\Sigma(x_0, \ldots, x_{n-1})$ legt gewisse Eigenschaften für die (Belegungen der) Variablen $x_0, \ldots, x_{n-1}$ fest. Ist $\Phi \cup \Sigma$ konsistent, so existieren ein Modell $\mathfrak{A}$ von Φ und $a_0, \ldots, a_{n-1} \in |\mathfrak{A}|$, die den durch Σ spezifizierten Eigenschaften genügen. Um zu zeigen, daß ein solches Modell existiert, genügt es nach dem Endlichkeitssatz zu zeigen, daß $\Phi \cup \Sigma_0$ erfüllbar ist für jedes endliche $\Sigma_0 \subset \Sigma$. Was aber ist, wenn wir durch einen Typ Σ Eigenschaften spezifizieren wollen, die nicht gelten sollen? Genauer: wir fixieren einen Typen Σ und suchen ein Modell $\mathfrak{A}$ von Φ, in dem Σ *nicht* realisiert wird.

25.12 Definition Sei $\Sigma(x_0, \ldots, x_{n-1})$ ein L-Typ und $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur.
$\Sigma(x_0, \ldots, x_{n-1})$ wird von $\mathfrak{A}$ **übergangen** $:\equiv \forall a_0, \ldots, a_{n-1} \in |\mathfrak{A}| \neg\, \mathfrak{A} \models \Sigma[a_0, \ldots, a_{n-1}]$.

Wir geben ein Kriterium dafür an, wann es zu Φ und Σ ein Modell $\mathfrak{A}$ von Φ gibt, das Σ übergeht. Der Schlüsselbegriff hierzu ist

25.13 Definition Sei $\Sigma(x_0, \ldots, x_{n-1})$ ein L-Typ und Φ eine L-Theorie.
Φ **übergeht** Σ **lokal**, falls es zu jeder Formel $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \mathrm{Fml}(L)$, für die $\Phi \cup \{\varphi\}$ erfüllbar ist, ein $\sigma \in \Sigma$ gibt, so daß $\Phi \cup \{\varphi, \dot\neg\sigma\}$ erfüllbar ist.

Mit Hilfe eines generischen Filters beweisen wir:

25.14 Satz (Typenübergehungssatz; Omitting-Types-Theorem) *Sei $L = (I, J, K, t)$ eine abzählbare Sprache und Φ eine L-Theorie. Für $i < \omega$ sei $\Sigma_i(x_0, \ldots, x_{n_i-1})$ ein L-Typ, der von Φ lokal übergangen wird. Dann existiert ein abzählbares Modell $\mathfrak{A}$ von Φ, in dem für $i < \omega$ Σ_i übergangen wird.*

Beweis. Sei K_0 eine abzählbare Menge mit $K_0 \cap (I \cup J \cup K) = \emptyset$. Setze $K' :\equiv K \cup K_0$ und $L' :\equiv (I, J, K', t)$.[204] Unser Ziel ist es, Φ zu einer Henkin-Menge[205] $\Psi \subset \mathrm{Fml}(L')$ zu erweitern, so daß in dem für Henkin-Mengen im Abschnitt Mathematische Logik konstruierten Modell (von Ψ) jeder der Typen $(\Sigma_i | i < \omega)$ übergangen wird.
Sei

$$P :\equiv \big\{p \subset \mathrm{Fml}(L') \bigm| p \supset \Phi \wedge p \setminus \Phi \text{ endlich} \wedge \mathrm{Kon}^{L'}(p)\big\}.$$

[204] D.h., wir fügen zu L abzählbar viele neue Konstantensymbole hinzu.
[205] siehe 17.9.

Für $p, q \in P$ sei $p \leq q \;:\equiv\; p \supset q$.
Um (H0) und (H1) zu erhalten setzen wir für jedes $\varphi \in \mathrm{Fml}(L')$

$$D_\varphi \;:\equiv\; \big\{p \in P \;\big|\; \mathrm{Kon}^{L'}(p \cup \{\varphi\}) \longrightarrow \varphi \in p\big\}.$$

(1) D_φ ist dicht in P.

Beweis. Sei $p \in P$. Ist $q \;:\equiv\; p \cup \{\varphi\}$ inkonsistent, so ist $p \in D_\varphi$ und wir sind fertig. Ist q konsistent, so ist $q \in D_\varphi$. Wegen $q \leq p$ ist auch in diesem Fall alles gezeigt. qed(1)

Um (H2) zu bekommen setzen wir für $k \in K'$, $\varphi \in \mathrm{Fml}(L')$ und $x \in \mathrm{Vbl}$

$$D_{k,\varphi,x} \;:\equiv\; \left\{p \in P \;\middle|\; \mathrm{Kon}^{L'}(p \cup \{\dot\forall x\varphi\}) \longrightarrow \varphi\frac{\dot c_k}{x} \in p\right\}$$

und für $\varphi \in \mathrm{Fml}(L')$ und $x \in \mathrm{Vbl}$

$$D_{\varphi,x} \;:\equiv\; \left\{p \in P \;\middle|\; \mathrm{Kon}^{L'}(p \cup \{\dot\exists x\varphi\}) \longrightarrow \exists k \in K'\ \varphi\frac{\dot c_k}{x} \in p\right\}.$$

(2) $D_{k,\varphi,x}$ und $D_{\varphi,x}$ sind dicht in P.

Beweis. zu $D_{k,\varphi,x}$. Sei $p \in P$. Ist $p \cup \{\dot\forall x\varphi\}$ inkonsistent, so ist $p \in D_{k,\varphi,x}$. Ist $p \cup \{\dot\forall x\varphi\}$ konsistent, so ist $q \;:\equiv\; p \cup \{\varphi\frac{\dot c_k}{x}\}$ konsistent: wähle $\mathfrak{A}$ und β mit $\mathfrak{A} \models (p \cup \{\dot\forall x\varphi\})[\beta]$; dann gilt $\mathfrak{A} \models \dot\forall x\varphi[\beta]$, also speziell

$$\mathfrak{A} \models \varphi\left[\beta\frac{\dot c_k^{\mathfrak{A}}}{x}\right].$$

Letzteres ist nach 16.4 gleichwertig mit

$$\mathfrak{A} \models \varphi\frac{\dot c_k}{x}[\beta].$$

Somit ist $q \in D_{k,\varphi,x}$ und $q \leq p$.
zu $D_{\varphi,x}$. Sei $p \in P$. Ist $p \cup \{\dot\exists x\varphi\}$ inkonsistent, so ist $p \in D_{\varphi,x}$. Ist $p \cup \{\dot\exists x\varphi\}$ konsistent, so wähle ein $k \in K_0$, so daß $\dot c_k$ in p nicht vorkommt. Dies ist möglich, da $p \setminus \Phi$ nur endlich viele Formeln enthält und in Φ keine der über K_0 indizierten Konstanten vorkommt ($K_0 \cap K = \emptyset$!). $q \;:\equiv\; p \cup \{\varphi\frac{\dot c_k}{x}\}$ ist konsistent. Um dies zu sehen wähle $\mathfrak{A}$ und β mit $\mathfrak{A} \models (p \cup \{\dot\exists x\varphi\})[\beta]$. Dann existiert ein $a \in |\mathfrak{A}|$ mit

$$(*) \qquad \mathfrak{A} \models \varphi\left[\beta\frac{a}{x}\right].$$

Die L'-Struktur $\mathfrak{B}$ habe dieselbe Trägermenge wie $\mathfrak{A}$ und entstehe aus $\mathfrak{A}$, indem wir das Konstantensymbol $\dot c_k$ durch a interpretieren und die anderen Konstanten-, Relations- und Funktionsinterpretationen von $\mathfrak{A}$ übernehmen. Nach dem Koinzidenzlemma 15.7 gilt $\mathfrak{B} \models p$ (beachte, daß $\dot c_k$ in p nicht vorkommt). Wegen $(*)$ gilt ferner $\mathfrak{B} \models \varphi\frac{\dot c_k}{x}[\beta]$. Also ist q erfüllbar. Somit ist $q \in D_{\varphi,x}$ und $q \leq p$. Dies war zu zeigen. qed(2)

Um (H3) sicherzustellen, setzen wir für $s \in \mathrm{Tm}(L')$

$$D_s \;:\equiv\; \big\{p \in P \;\big|\; \exists k \in K_0\ s \doteq \dot c_k \in p\big\}.$$

(3) D_s ist dicht in P.

Beweis. Sei $p \in P$. Wie im Beweis zu (2) sieht man, daß es ein $k \in K_0$ gibt, so daß $\dot c_k$ in p nicht vorkommt, und daß dann $q \;:\equiv\; p \cup \{s \doteq \dot c_k\}$ konsistent ist. Es ist $q \leq p$ und $q \in D_s$. qed(3)

Um sicherzustellen, daß im konstruierten Modell jeder der Typen Σ_i übergangen wird, setzen wir für $i < \omega$ und $f \in {}^{n_i}K_0$

$$D_{i,f} \;:\equiv\; \big\{p \in P \;\big|\; \exists \sigma(x_0, \ldots, x_{n_i-1}) \in \Sigma_i\ \dot\neg\sigma(\dot c_{f(0)}, \ldots, \dot c_{f(n_i-1)}) \in p\big\}.$$

(Hierbei steht natürlich $\sigma(\dot c_{f(0)}, \ldots, \dot c_{f(n_i-1)})$ für diejenige L'-Formel, die man erhält, wenn man in σ jede Variable x_j durch $\dot c_{f(j)}$ ersetzt.) Es gilt

(4) $D_{i,f}$ ist dicht in P.

Beweis. Sei $p \in P$. Dann existieren $m < \omega$ und $\theta_0, \ldots, \theta_{m-1} \in \mathrm{Fml}(L')$ mit $p = \Phi \cup \{\theta_j \mid j < m\}$. Sei $\theta :\equiv \bigwedge_{j<m} \theta_j$. Dann ist $\Phi \cup \{\theta\}$ konsistent. Wähle $w_0, \ldots, w_{n_i-1} \in \mathrm{Vbl}$ mit

$$\{w_0, \ldots, w_{n_i-1}\} \cap (\{x_0, \ldots, x_{n_i-1}\} \cup \mathrm{var}(\theta)) = \emptyset$$

und setze

$$\theta' :\equiv \theta \frac{w_0}{x_0} \cdots \frac{w_{n_i-1}}{x_{n_i-1}}.$$

Wegen $\mathrm{fr}(\Phi) = \emptyset$ sind $\Phi \cup \{\theta\}$ und $\Phi \cup \{\theta'\}$ äquikonsistent.[206] Da L' aus L durch Hinzufügen neuer Konstantensymbole entsteht und die x_i nicht unter den freien Variablen von θ' vorkommen, existiert eine L-Formel

$$\bar{\theta}(x_0, \ldots, x_{n_i-1}, y_0, \ldots, y_{r-1}, z_0, \ldots, z_{s-1})$$

und ein $g \in {}^s(K_0 \setminus \mathrm{ran}(f))$ so daß

$$\theta' = \bar{\theta}(\dot{c}_{f(0)}, \ldots, \dot{c}_{f(n_i-1)}, y_0, \ldots, y_{r-1}, c_{g(0)}, \ldots, c_{g(s-1)}).$$

(Dies bedeutet natürlich, daß x_j durch $\dot{c}_{f(j)}$ und z_j durch $\dot{c}_{g(j)}$ ersetzt wird, ferner $\{w_0, \ldots, w_{n_i-1}\} \subset \{y_0, \ldots, y_{r-1}\}$.) Aus der Konsistenz von

$$\Phi \cup \{\underbrace{\bar{\theta}(\dot{c}_{f(0)}, \ldots, \dot{c}_{f(n_i-1)}, y_0, \ldots, y_{r-1}, c_{g(0)}, \ldots, c_{g(s-1)})}_{=\theta'}\}$$

folgt die Konsistenz von

$$\Phi \cup \{\underbrace{\dot{\exists} y_0 \ldots \dot{\exists} y_{r-1} \dot{\exists} z_0 \ldots \dot{\exists} z_{s-1} \bar{\theta}(x_0, \ldots, x_{n_i-1}, y_0, \ldots, y_{r-1}, z_0, \ldots, z_{s-1})}_{\equiv: \varphi(x_0, \ldots, x_{n_i-1}}\}.$$

Da Σ_i von Φ lokal übergangen wird, existiert ein $\sigma \in \Sigma_i$, so daß $\Phi \cup \{\varphi, \dot{\neg}\sigma\}$ konsistent ist. Da in dieser Formelmenge keine Konstanten aus K_0 vorkommen, ist auch

$$\Phi \cup \{\varphi(\dot{c}_{f(0)}, \ldots, \dot{c}_{f(n_i-1)}), \dot{\neg}\sigma(\dot{c}_{f(0)}, \ldots, \dot{c}_{f(n_i-1)})\}$$

konsistent. Da hierin die Konstantensymbole $\dot{c}_{g(0)}, \ldots, \dot{c}_{g(s-1)}$ nicht vorkommen, folgt die Konsistenz von

$$\Phi \cup \{\dot{\exists} y_0 \ldots \dot{\exists} y_{r-1} \bar{\theta}(\dot{c}_{f(0)}, \ldots, \dot{c}_{f(n_i-1)}, y_0, \ldots, y_{r-1}, \dot{c}_{g(0)}, \ldots, \dot{c}_{g(s-1)}), \dot{\neg}\sigma(\dot{c}_{f(0)}, \ldots, \dot{c}_{f(n_i-1)})\}$$

und somit von

$$\Phi \cup \{\underbrace{\bar{\theta}(\dot{c}_{f(0)}, \ldots, \dot{c}_{f(n_i-1)}, y_0, \ldots, y_{r-1}, \dot{c}_{g(0)}, \ldots, \dot{c}_{g(s-1)})}_{=\theta'}, \dot{\neg}\sigma(\dot{c}_{f(0)}, \ldots, \dot{c}_{f(n_i-1)})\}.$$

Da $\mathrm{fr}\big(\Phi \cup \{\dot{\neg}\sigma(\dot{c}_{f(0)}, \ldots, \dot{c}_{f(n_i-1)})\}\big) = \emptyset$ gilt, ist dies äquikonsistent mit

$$\Phi \cup \{\theta, \dot{\neg}\sigma(\dot{c}_{f(0)}, \ldots, \dot{c}_{f(n_i-1)})\}.$$

Nach Definition von θ ist dies äquikonsistent mit $q :\equiv p \cup \{\dot{\neg}\sigma(\dot{c}_{f(0)}, \ldots \dot{c}_{f(n_i-1)})\}$. Also ist $q \leq p$ und $q \in D_{i,f}$. Dies war zu zeigen. qed(4)

[206] Zwei L'-Formelmengen Φ_0 und Φ_1 heißen **äquikonsistent**, wenn $\mathrm{Kon}^{L'}(\Phi_0) \longleftrightarrow \mathrm{Kon}^{L'}(\Phi_1)$ gilt.

Sei

$$\begin{aligned}\mathcal{D} :\equiv\ & \{D_\varphi \mid \varphi \in \mathrm{Fml}(L')\} \cup \\ & \{D_{k,\varphi,x} \mid k \in K' \wedge \varphi \in \mathrm{Fml}(L') \wedge x \in \mathrm{Vbl}\} \cup \\ & \{D_{\varphi,x} \mid \varphi \in \mathrm{Fml}(L') \wedge x \in \mathrm{Vbl}\} \cup \\ & \{D_s \mid s \in \mathrm{Tm}(L')\} \cup \\ & \{D_{i,f} \mid i < \omega \wedge f \in {}^{n_i}K_0\}.\end{aligned}$$

Da L' abzählbar ist, ist $\mathcal{D}$ abzählbar. Also existiert ein P-generischer Filter über $\mathcal{D}$. Sei $\Psi :\equiv \bigcup G$. Wegen $\Phi \subset p$ für alle $p \in P$ ist $\Phi \subset \Psi$. Ferner gilt:

(5) Ψ ist eine HENKIN-Menge. Außerdem existiert zu jedem $s \in \mathrm{Tm}(L')$ ein $k \in K_0$ mit $s \doteq \dot{c}_k \in \Psi$.[207]

BEWEIS. zu (H0) und (H1). Ψ ist konsistent: Zu jedem endlichen $p \subset \Psi$ existieren ein $n < \omega$ und $p_0, \dots, p_{n-1} \in G$ mit $p \subset \bigcup_{i<n} p_i$. Da G wie jeder Filter $\aleph_0$-vollständig ist, existiert ein $q \in G$ mit $q \le p_0, \dots, p_{n-1}$, d.h., $q \supset \bigcup_{i<n} p_i$. Aus $q \in G$ folgt insbesondere, daß q konsistent ist. Wegen $p \subset q$ ist folglich p konsistent. Also ist jeder endliche Teil von Ψ konsistent und damit Ψ als konsistent nachgewiesen. Ψ ist maximal konsistent. Ist nämlich $\varphi \in \mathrm{Fml}(L')$, so daß $\Psi \cup \{\varphi\}$ konsistent ist, so wähle $p \in D_\varphi \cap G$. Dann ist $p \cup \{\varphi\}$ konsistent, also $\varphi \in p \subset \Psi$. Somit ist Ψ als maximal L'-konsistent nachgewiesen, so daß nach 17.10 (H0) und (H1) gelten.

zu (H2). Sei $\varphi \in \mathrm{Fml}(L')$ und $x \in \mathrm{Vbl}$. Es ist $\dot{\forall} x\varphi \in \Psi \longleftrightarrow \forall k \in K'\ \varphi\frac{\dot{c}_k}{x}$ zu zeigen.

zu „$\Rightarrow$“. Sei $\dot{\forall} x\varphi \in \Psi$ und $k \in K'$. Wähle $p \in D_{k,\varphi,x} \cap G$. Dann ist $p \cup \{\dot{\forall} x\varphi\} \subset \Psi$, also konsistent. Nach Definition von $D_{k,\varphi,x}$ ist $\varphi\frac{\dot{c}_k}{x} \in p$. Wegen $p \subset \Psi$ folgt die Behauptung.

zu „$\Leftarrow$“. Sei $\dot{\forall} x\varphi \notin \Psi$. Nach (H1) ist dann $\dot{\exists} x \dot{\neg}\varphi \in \Psi$. Ist $p \in D_{\dot{\neg}\varphi,x} \cap G$, so ist $p \cup \{\dot{\exists} x \dot{\neg}\varphi\} \subset \Psi$, also konsistent. Nach Definition von $D_{\dot{\neg}\varphi,x}$ existiert ein $k \in K'$, so daß $\dot{\neg}\varphi\frac{\dot{c}_k}{x} \in p$, also $\dot{\neg}\varphi\frac{\dot{c}_k}{x} \in \Psi$ gilt. Nach (H1) ist $\varphi\frac{\dot{c}_k}{x} \notin \Psi$, so daß wir $\exists k \in K'\ \varphi\frac{\dot{c}_k}{x} \notin \Psi$ nachgewiesen haben. Dies war zu zeigen.

zu (H3). Sei $s \in \mathrm{Tm}(L')$. Wähle $p \in D_s \cap G$. Dann existiert ein $k \in K_0$ mit $s \doteq \dot{c}_k \in p$. Wegen $p \subset \Psi$ folgt $s \doteq \dot{c}_k \in \Psi$.

Damit ist (5) bewiesen. qed(5)

Sei nun $\mathfrak{A}$ das im Abschnitt Mathematische Logik für Ψ konstruierte Modell. Wegen $\Phi \subset \Psi$ ist das L-Redukt von $\mathfrak{A}$ ein Modell von Φ. Aus der Definition von $\mathfrak{A}$ folgt wegen $\overline{\overline{L'}} = \aleph_0$ sofort, daß $\mathfrak{A}$ abzählbar ist, vgl. z.B. 17.27. Sei nun $i < \omega$. Es ist zu zeigen, daß $\Sigma_i(x_0, \dots, x_{n_i-1})$ von $\mathfrak{A}$ übergangen wird. Angenommen, es gibt $a_0, \dots, a_{n_i-1} \in |\mathfrak{A}|$ mit

(∗) $\mathfrak{A} \models \Sigma_i[a_0, \dots, a_{n_i-1}]$.

Nach Definition von $\mathfrak{A}$ existiert dann für $j < n_i$ ein $s_j \in \mathrm{Tm}(L')$, so daß $a_j = \overline{s_j}$, wobei $\overline{s}$ die Äquivalenzklasse von $s \in \mathrm{Tm}(L')$ unter der Äquivalenzrelation $r \approx s :\equiv r \doteq s \in \Psi$ ist. Nach (5) existiert für $j < n_i$ ein $k_j \in K_0$, so daß $\overline{s_j} = \overline{\dot{c}_{k_j}}$ ist. Nach Definition von $\mathfrak{A}$ ist außerdem $\overline{\dot{c}_k}$ gerade die Interpretation c_k des Konstantensymbols $\dot{c}_k$ in $\mathfrak{A}$. Also ist $a_j = c_{k_j}$ für $j < n_i$. Setze nun $f :\equiv (k_j \mid j < n_i)$ und wähle $p \in G \cap D_{i,f}$. Dann ist $p \subset \Psi$ und es existiert $\sigma(x_0, \dots, x_{n_i-1}) \in \Sigma_i$, so daß $\dot{\neg}\sigma(\dot{c}_{f(0)}, \dots, \dot{c}_{f(n_i-1)}) \in p$ gilt. Folglich ist $\dot{\neg}\sigma(\dot{c}_{f(0)}, \dots, \dot{c}_{f(n_i-1)}) \in \Psi$, d.h.,

$$\mathfrak{A} \models \dot{\neg}\sigma[\underbrace{c_{f(0)}}_{=a_0}, \dots, \underbrace{c_{f(n_i-1)}}_{=a_{n_i-1}}].$$

Dies widerspricht (∗). Also ist (∗) falsch und Σ_i wird in $\mathfrak{A}$ übergangen. Damit ist der Satz bewiesen. QED

[207] Dies ist eine etwas schärfere Form von (H3), die wir benötigen, um zu zeigen, daß die Σ_i im HENKINschen Modell von Ψ übergangen werden.

25.15 Bemerkung Das Omitting-Types-Theorem kann nicht ohne weiteres auf überabzählbare Sprachen übertragen werden. Betrachte hierzu in einer Sprache L, die die Konstantensymbole $\{\dot{c}_\alpha \mid \alpha < \omega_1\} \cup \{\dot{c}'_n \mid n < \omega\}$ besitzt, die Theorie $\Phi :\equiv \{\dot{\neg}\, \dot{c}_\alpha \doteq \dot{c}_\beta \mid \alpha < \beta < \omega_1\}$ und den Typen $\Sigma(x) :\equiv \{\dot{\neg}\, x \doteq \dot{c}'_n \mid n < \omega\}$. Σ wird von Φ lokal übergangen: Ist nämlich $\varphi(x) \in \mathrm{Fml}(L)$, so daß $\Phi \cup \{\varphi\}$ konsistent ist, so wähle ein $n < \omega$, so daß $\dot{c}'_n$ in φ nicht vorkommt. Dann ist $\Phi \cup \{\varphi(x), x \doteq \dot{c}'_n\}$ erfüllbar.
Σ wird aber von keinem Modell $\mathfrak{A}$ von Φ übergangen. Jedes solche ist nämlich überabzählbar, so daß es ein $a \in |\mathfrak{A}|$ gibt, das keine Interpretation eines der Konstantensymbole $\{\dot{c}'_n \mid n < \omega\}$ ist. Dann gilt $\mathfrak{A} \models \Sigma[a]$.

Mehr zum Omitting-Types-Theorem findet man z.B. in [4], pp.77 ff. und [29], pp.127 ff.

26 Antiketten und Martin's Axiom.

Nach 25.4 gibt es zu jeder abzählbaren Menge $\mathcal{D}$ von Mengen, die in einer Forcing-Halbordnung $(P, \leq, 1_P)$ dicht sind, einen P-generischen Filter über $\mathcal{D}$. 25.5 und 25.6 zeigen, daß dies ist dies bei überabzählbarem $\mathcal{D}$ i.a. nicht der Fall ist. Wir können also **ZFC** nicht konsistent durch die Forderung erweitern, daß für *jede* Forcing-Halbordnung P und *jede* Familie $\mathcal{D}$ in P dichter Teilmengen ein P-generischer Filter über $\mathcal{D}$ existiert. Es wird sich jedoch erweisen, daß diese Forderung so modifiziert werden kann, daß das so entstehende Axiom einerseits mit **ZFC** konsistent, andererseits genügend ausdrucksstark ist, um interessante, über **ZFC** hinausgehende Resultate zu implizieren. Die Modifikation setzt an zwei Stellen an:

(1) Statt aller Forcing-Halbordnungen werden nur noch solche betrachtet, die eine geeignete „Kleinheitsbedingung“ erfüllen. Es handelt sich hierbei um die „abzählbare Antiketten-Eigenschaft“.
(2) Die Kardinalität von $\mathcal{D}$ wird auf ein (möglichst großes) Intervall beschränkt.

26.1 Antiketten und die Antiketten-Eigenschaft.

26.1 Definition Sei $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung und $\kappa \in \mathrm{Card}$.

(a) A ist eine **Antikette** in $P :\equiv A \subset P \wedge \forall p, q \in A\, (p \neq q \longrightarrow p \perp q)$.[208]
(b) A ist **maximale Antikette** in P
$:\equiv A$ ist Antikette in $P \wedge \forall A' \big(A' \supset A \wedge A'$ ist Antikette in $P \longrightarrow A' = A\big)$.
(c) $(P, \leq, 1_P)$ hat die **κ-Antiketten-Eigenschaft** $:\equiv \forall A\, (A$ ist Antikette in $P \longrightarrow \overline{\overline{A}} < \kappa)$.
(d) $(P, \leq, 1_P)$ hat die **abzählbare Antiketten-Eigenschaft** $:\equiv$ $(P, \leq, 1_P)$ hat die $\aleph_1$-Antiketten-Eigenschaft.

26.2 Bemerkung (a) Statt „κ-Antiketten-Eigenschaft“ sagen wir auch **κ-cc**; „cc“ steht für *chain condition.* Statt „abzählbare Antiketten-Eigenschaft“ sagen wir auch ccc; „ccc“ steht für *countable chain condition.* Statt „P ist eine Forcing-Halbordnung, die ccc erfüllt“ sagen wir auch „P ist eine ccc-Forcing-Halbordnung“.

(b) Man sieht leicht, daß die folgenden drei Aussagen äquivalent sind:
  (i) A ist maximale Antikette in P.
  (ii) A ist $\subset$ -maximales Element in $\{B \mid B$ ist Antikette in $P\}$.
  (iii) A ist Antikette in $P \wedge \forall p \in P \setminus A\, \exists q \in A\; p \parallel q$.

(c) A hat genau dann ccc, wenn jede Antikette in A höchstens abzählbar ist. Speziell: ist P abzählbar, so hat P die ccc.

26.3 Beispiel $\mathrm{Fn}(\kappa, 2, \aleph_0)$ hat ccc. Dies folgt aus dem folgenden, allgemeineren Resultat.

[208] Genauer müßten wir sagen: *Antikette in* $(P, \leq, 1_P)$.

26.4 Satz $\mathrm{Fn}(a,b,\mu)$ *hat die* $\left(\overline{\overline{b}}^{<\mu}\right)^+$ – cc.

Beweis. Sei $\lambda :\equiv \overline{\overline{b}}$ und $\theta :\equiv \left(\lambda^{<\mu}\right)^+$. Wegen $\lambda^{<\mu} \geq \mu$, siehe 11.5, folgt

(1) $\quad \mu < \theta.$

Wir müssen nun zeigen, daß keine Folge $(p_i|i < \theta) \in {}^{\theta}P$ eine Antikette in P ist. Sei also $(p_i|i < \theta) \in {}^{\theta}P$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1. μ ist regulär.
Idee:
Wir dünnen die Folge mit Hilfe des Δ-System-Satzes 11.20 soweit aus, bis es eine Menge d gibt, so daß für je zwei verschiedene Indices i,j gilt $\mathrm{dom}(p_i) \cap \mathrm{dom}(p_j) = d$. Eine Anwendung eines Schubfachprinzipes zeigt dann, daß zwei derartige Indices existieren mit $p_i \restriction d = p_j \restriction d$; dann stimmen p_i und p_j auf demjenigen Teil ihres jeweiligen Definitionsbereiches überein, den sie gemeinsam haben, d.h., $p_i \cup p_j$ ist eine partielle Funktion, die p_i und p_j erweitert, so daß p_i und p_j kompatibel sind, die ursprüngliche Folge also keine Antikette war.
Ausführung:
Wir überprüfen, ob die Voraussetzungen des Δ-System-Satz für die Familie $\left\{\mathrm{dom}(p_i) \;\middle|\; i < \theta\right\}$ erfüllt sind. Es gilt $\mu < \theta$ nach (1); ferner sind μ und θ regulär; außerdem gilt $\overline{\overline{\mathrm{dom}(p_i)}} < \mu$. Es bleibt zu zeigen:

(2) $\quad \forall\alpha < \theta\ \forall\beta < \mu\ \overline{\overline{\alpha}}^{\overline{\overline{\beta}}} < \theta.$

Beweis. Sei $\alpha < \theta$ und $\beta < \mu$. Dann gilt $\overline{\overline{\alpha}} \leq \lambda^{<\mu}$ und $\overline{\overline{\beta}} < \mu$. Ferner gilt

$$(*) \qquad {}^{\overline{\overline{\beta}}}\overline{\overline{\alpha}} \subset \bigcup_{\kappa \in \mathrm{Cd} \cap \mu} {}^{\overline{\overline{\beta}}}\left(\lambda^{\kappa}\right);$$

ist nämlich $f\colon \overline{\overline{\beta}} \to \overline{\overline{\alpha}}$, so definiere für $\gamma < \overline{\overline{\beta}}$ ein $\kappa_\gamma < \mu$ derart, daß $f(\gamma) < \lambda^{\kappa_\gamma}$ ist; κ_γ existiert, da $\mathrm{ran}(f) \subset \lambda^{<\mu}$ ist. Da μ regulär und $\overline{\overline{\beta}} < \mu$ ist, gilt $\kappa :\equiv \sup_{\gamma<\overline{\overline{\beta}}} \kappa_\gamma < \mu$. Offenbar ist $f \in {}^{\overline{\overline{\beta}}}\left(\lambda^{\kappa}\right)$. Also ist $(*)$ bewiesen. Nun folgt

$$\overline{\overline{\alpha}}^{\overline{\overline{\beta}}} = \overline{\overline{{}^{\overline{\overline{\beta}}}\overline{\overline{\alpha}}}} \overset{(*)}{\leq} \sum_{\kappa \in \mathrm{Cd} \cap \mu} \underbrace{\overline{\overline{{}^{\overline{\overline{\beta}}}\left(\lambda^{\kappa}\right)}}}_{=\lambda^{\kappa\cdot\overline{\overline{\beta}}} \leq \lambda^{<\mu}} \leq \mu \cdot \lambda^{<\mu} \overset{(1)}{<} \theta.$$

Dies war zu zeigen. qed(2)

Aus dem Δ-System-Satz, angewendet auf $\left(\mathrm{dom}(p_i) \;\middle|\; i < \theta\right)$, folgt die Existenz eines $J \subset \theta$ mit $\overline{\overline{J}} = \theta$ und eines $d \subset a$ mit $\mathrm{dom}(p_i) \cap \mathrm{dom}(p_j) = d$ für alle $i,j \in J$ mit $i \neq j$. Dann ist $\overline{\overline{d}} < \mu$ (da $d \subset \mathrm{dom}(p_i)$), so daß

$$\overline{\overline{\left\{p_i \restriction d \;\middle|\; i \in J\right\}}} \leq \overline{\overline{b}}^{\overline{\overline{d}}} \leq \lambda^{\overline{\overline{d}}} \leq \lambda^{<\mu} < \theta$$

gilt. Wegen $\overline{\overline{J}} = \theta$ müssen also $i,j \in J$ existieren mit $i \neq j$ und $p_i \restriction d = p_j \restriction d$. Dann stimmen p_i und p_j auf dem Teil ihres jeweiligen Definitionsbereiches überein, den sie gemeinsam haben, d.h., es gilt $p_i \cup p_j \in \mathrm{Fn}(a,b,\mu)$ und somit $p_i \parallel p_j$. Also ist $\left(p_i \;\middle|\; i < \theta\right)$ keine Antikette. Dies war zu zeigen.

Fall 2. μ ist singulär. Wir führen diesen Fall auf Fall 1 zurück. Angenommen, $\left(p_i \;\middle|\; i < \theta\right)$ ist eine Antikette.

(3) $\quad$ Es existiert ein reguläres $\mu' < \mu$, so daß $J :\equiv \left\{i < \theta \;\middle|\; \overline{\overline{p_i}} < \mu'\right\}$ Kardinalität θ hat.

Beweis. Wir wenden das Schubfachprinzip 11.1 an. Definiere hierzu $f\colon \theta \to \mu$ durch $f(i) :\equiv \overline{\overline{p_i}}$. Da $\mu < \theta$ und θ regulär ist, existiert nach dem Schubfachprinzip ein $J \subset \theta$ mit $\overline{\overline{J}} = \theta$, so daß $f \restriction J$ konstant ist. Sei ν dieser Funktionswert und $\mu' :\equiv \nu^+$. Dann ist μ' regulär. Ferner ist $\mu' < \mu$: da $\nu < \mu$ gilt und μ als singuläre Kardinalzahl eine Limeskardinalzahl und überabzählbar ist, ist auch $\nu^+ < \mu$. Indem wir ggf. J vergrößern, können wir $J = \{i < \theta \mid \overline{\overline{p_i}} < \mu'\}$ erreichen. (Aus der Definition von J folgt nur, daß hier „$\subset$" gilt.) qed(3)

Nun ist $(p_j \mid j \in J)$ eine Antikette in $\mathrm{Fn}(a, b, \mu')$. Nach dem in Fall 1 gezeigten hat $\mathrm{Fn}(a, b, \mu')$ die $(\lambda^{<\mu'})^+$-cc. Also muß $\overline{\overline{J}} < (\lambda^{<\mu'})^+$ sein. Nach (3) gilt aber

$$\overline{\overline{J}} = (\lambda^{<\mu})^+ \overset{\mu>\mu'}{\geq} (\lambda^{<\mu'})^+.$$

Der Widerspruch zeigt, daß $(p_i \mid i < \theta)$ keine Antikette in $\mathrm{Fn}(a, b, \mu)$ sein kann.
Damit ist der Satz bewiesen. QED

26.5 Beispiel $\mathrm{Fn}(\omega, \omega_1, \omega)$ hat nicht ccc, da $A :\equiv \{\{(0, \alpha)\} \mid \alpha < \omega_1\}$ eine Antikette mit $\overline{\overline{A}} = \aleph_1$ ist. A ist eine maximale Antikette in P: ist nämlich $p \in P$ beliebig, so gilt $\{(0, p(0))\} \parallel p$ im Fall $0 \in \mathrm{dom}(p)$ und $\{(0, 0)\} \parallel p$ im Fall $0 \notin \mathrm{dom}(p)$.

26.2 Martins Axiom.

Mit Hilfe der ccc können wir das oben angesprochene Axiom formulieren. Es geht zurück auf Donald A. Martin und Robert M. Solovay (ca. 1970):

26.6 Definition (a) Sei $\kappa \in \mathrm{Card}$

$$\mathbf{MA}(\kappa) :\equiv \forall P, \mathcal{D}\, \exists G\, \big((P \text{ ist Forcing-Halbordnung} \wedge P \text{ hat ccc} \wedge \overline{\overline{\mathcal{D}}} \leq \kappa) \longrightarrow G \text{ ist } P\text{-generischer Filter über } \mathcal{D}\big).$$

$\mathbf{MA}(\kappa)$ heißt **Martin's Axiom für** κ.

(b) $\mathbf{MA} :\equiv \forall \kappa < 2^{\aleph_0}\, \mathbf{MA}(\kappa)$. $\mathbf{MA}$ heißt **Martin's Axiom**.

26.7 Lemma *(a) Es gilt* $\mathbf{MA}(\aleph_0)$.

(b) Es gilt $\neg\,\mathbf{MA}(2^{\aleph_0})$ *und somit* $\forall \kappa \geq 2^{\aleph_0}\, \neg\,\mathbf{MA}(\kappa)$. *Dies erklärt die Beschränkung der Laufvariable des Quantors in* $\mathbf{MA}$ *auf den Bereich* $\kappa < 2^{\aleph_0}$.

(c) $\mathbf{CH} \longrightarrow \mathbf{MA}$.

Beweis. zu (a). Dies folgt sofort aus dem Existenzsatz für generische Filter 25.4.

zu (b). Nach 26.3 ist $P :\equiv \mathrm{Fn}(\omega, 2, \aleph_0)$ eine ccc-Forcing-Halbordnung. Nach 25.5 gibt es eine Familie $\mathcal{D}$ von in P dichten Mengen mit $\overline{\overline{\mathcal{D}}} = 2^{\aleph_0}$, so daß kein P-generischer Filter über $\mathcal{D}$ existiert.

zu (c). Gilt $\mathbf{CH}$, so ist $[\aleph_0, 2^{\aleph_0}[\cap \mathrm{Card} = \{\aleph_0\}$. Also gilt $\mathbf{MA} \longleftrightarrow \mathbf{MA}(\aleph_0)$. (a) liefert dann die Behauptung. QED

26.8 Bemerkung Aus 26.7 folgt: ist $\mathbf{ZFC} + \mathbf{CH}$ konsistent, so trivialerweise auch $\mathbf{ZFC} + \mathbf{CH} + \mathbf{MA}$. In 35.7 zeigen wir, daß im Fall der Konsistenz von $\mathbf{ZFC}$ auch $\mathbf{ZFC} + \neg\,\mathbf{CH} + \mathbf{MA}$ konsistent ist.

26.3 Implikationen von MA.

Welche Auswirkungen hat die Hinzunahme von **MA** zu **ZFC**? Wie wir gleich an einigen Beispielen verdeutlichen werden, ermöglicht es **MA**, Konstruktionsprinzipien des Abzählbaren auf den Bereich des Überabzählbaren unterhalb von $2^{\aleph_0}$ zu übertragen. Alle Kardinalzahlen im Intervall $[\aleph_0, 2^{\aleph_0}[$ verhalten sich unter **MA** gleich. **MA** bewirkt somit Ähnliches wie **CH**, aber auf wesentlich subtilere Weise (**CH** schließt einfach die Existenz von Kardinalzahlen im Bereich $]\aleph_0, 2^{\aleph_0}[$ aus). Beachten Sie auch, daß das in 26.8 angesprochene Konsistenzresultat 35.7 impliziert, daß **MA** und **CH** (unter **ZFC**) **nicht** äquivalent sind.

26.3.1 Ein Beispiel aus der Maßtheorie.

Definiere $\mu\colon \mathrm{Pot}(\mathbb{R}) \supset\!\!\to [0,\infty[$ durch $\mu\bigl(]a,b]\bigr) :\equiv b-a$. Aus dem Fortsetzungssatz von Carathéodory[209] folgt, daß sich μ eindeutig zu einem Maß auf die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}$ fortsetzen läßt. $\mathcal{B}$ ist hierbei die $\subset$-kleinste σ-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathrm{Pot}(\mathbb{R})$, die alle offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ umfaßt. Dabei heißt $\mathcal{A}$ **σ-Algebra**, falls gilt:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$.
(ii) $\forall A \in \mathcal{A}\, \mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{A}$.
(iii) $\forall Z \subset \mathcal{A}\, \bigl(\overline{\overline{Z}} \leq \aleph_0 \longrightarrow \bigcup Z \in \mathcal{A}\bigr)$.

Dieses Maß auf $\mathcal{B}$ sei wiederum mit μ bezeichnet. Es heißt **Lebesgue-Maß**. Das System

$$\mathcal{L} :\equiv \bigl\{B \cup M \bigm| B \in \mathcal{B} \wedge \exists N \in \mathcal{B}\, (M \subset N \wedge \mu(N) = 0)\bigr\}$$

ist eine σ-Algebra. Sie heißt **Lebesguesche σ-Algebra**. Die Elemente von $\mathcal{L}$ heißen **Lebesgue-meßbare Mengen**. μ läßt sich eindeutig zu einem Maß auf $\mathcal{L}$ erweitern durch die Zuordnung $B \cup M \mapsto \mu(B)$, wobei $B \in \mathcal{B}$ und M Teilmenge eines $N \in \mathcal{B}$ mit $\mu(N) = 0$ ist. Dieses Maß sei erneut mit μ bezeichnet. $N \subset \mathbb{R}$ heißt **Lebesgue-Nullmenge**, falls $N \in \mathcal{L}$ und $\mu(N) = 0$ gilt. Dies ist äquivalent mit

$(*)$ $\quad\forall \varepsilon > 0\, \exists U \subset \mathbb{R}\, (U$ ist offen $\wedge\, U \supset N \wedge \mu(U) < \varepsilon)$.

Die Lebesgue-Nullmengen bilden ein Ideal $\mathcal{I}(\mu) \subset \mathrm{Pot}(\mathbb{R})$. Hierbei heißt $\mathcal{I} \subset \mathrm{Pot}(\mathbb{R})$ ein **Ideal** in $\mathrm{Pot}(\mathbb{R})$, falls gilt

(i) $\emptyset \in \mathcal{I}$.
(ii) $\forall A \in \mathcal{I}\, \forall B \subset \mathbb{R}\, A \cap B \in \mathcal{I}$.
(iii) $\forall A, B \in \mathcal{I}\, A \cup B \in \mathcal{I}$.

Ein Ideal $\mathcal{I}$ heißt **κ-vollständig**, falls gilt $\forall Z \subset \mathcal{I}\, \bigl(\overline{\overline{Z}} < \kappa \longrightarrow \bigcup Z \in \mathcal{I}\bigr)$. Statt $\aleph_1$-vollständig sagt man auch **σ-vollständig**. $\mathcal{I}$ ist offenbar genau dann ein Ideal in $\mathrm{Pot}(\mathbb{R})$, wenn $\mathcal{F} :\equiv \bigl\{\mathbb{R} \setminus A \bigm| A \in \mathcal{I}\bigr\}$ ein Filter auf $\mathbb{R}$ ist. $\mathcal{I}$ ist genau dann κ-vollständig, wenn $\mathcal{F}$ es ist.

Aus der σ-Additivität des Lebesgue-Maßes folgt sofort, daß $\mathcal{I}(\mu)$ ein σ-vollständiges Ideal in $\mathrm{Pot}(\mathbb{R})$ ist. Wir zeigen:

26.9 Satz *Sei $\kappa \in$ Card und es gelte $\mathbf{MA}(\kappa)$. Dann gilt:*
(a) $\mathcal{I}(\mu)$ ist κ^+-vollständig.
(b) μ ist κ^+-additiv.
(c) $\forall A \subset \mathbb{R}\, \bigl(\overline{\overline{A}} \leq \kappa \longrightarrow A$ ist Lebesgue-Nullmenge$\bigr)$.

Beweis. Im Fall $\kappa = \aleph_0$ ist die Gültigkeit von (a), (b) und (c) wohlbekannt; wir können also $\kappa > \aleph_0$ annehmen.

Offenbar folgt (c) sofort aus (a), denn im Fall $A \subset \mathbb{R}$, $\overline{\overline{A}} \leq \kappa$, ist durch $Z :\equiv \bigl\{\{x\} \bigm| x \in A\bigr\}$ eine Teilmenge von $\mathcal{I}(\mu)$ definiert ist, deren Kardinalität höchstens κ beträgt, und es gilt $A = \bigcup Z$.

Wir leiten nun (b) aus (a) ab und beweisen danach (a).

Für $i < \kappa$ sei A_i eine Lebesgue-meßbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ und es sei $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i < j < \kappa$

[209] Constantin Carathéodory (13.9.1873, Berlin–2.2.1950, München) entstammt einer griechischen Familie, sein Vater war Diplomat in türkischem Dienst; nach einer Ausbildung zum Ingenieur 1898–1900 in englischem Dienst bei Staudammbauten am Nil beschäftigt; danach Mathematikstudium 1900–1902 in Berlin und 1902–1904 in Göttingen; 1905 Promotion; 1909 Professor an der TH Hannover, 1910 an der TH Breslau; 1913 Nachfolger von Felix Klein in Göttingen; 1918 an der Universität Berlin; 1920 wechselt er an die Universität im griechisch besetzten Smyrna, nach der Rückgabe Smyrnas an die Türkei an der Universität in Athen; ab 1924 an der Universität München. Carathéodory arbeitet besonders in den Bereichen Variationsrechnung, Differentialgleichungen und Funktionentheorie.

(1) $I :\equiv \{i < \kappa \mid \mu(A_i) > 0\}$ ist höchstens abzählbar.

Beweis. Aus den Eigenschaften des Maßes μ folgt für $i \in I$ die Existenz eines $n_i \in \mathbb{N}$ mit

$$\mu\big(A_i \cap [-n_i, n_i]\big) > 0.$$

Sei $\overline{\overline{I}} > \aleph_0$ angenommen. Dann gibt es nach dem Schubfachprinzip 11.1 ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n_i = n$ für alle i aus einer Teilmenge I_0 von I mit $\overline{\overline{I_0}} = \aleph_1$. O.E. sei $I_0 = \omega_1$. Für $i < \omega_1$ existiert dann ein $m_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit

$$\mu\big(A_i \cap [-n, n]\big) \geq \frac{1}{m_i}.$$

Wiederum nach dem Schubfachprinzip existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\mu\big(A_i \cap [-n, n]\big) \geq \dfrac{1}{m}$ für alle i aus einer abzählbaren Teilmenge I_1 von ω_1. Dann folgt

$$2n = \mu\Big([-n, n]\Big) \geq \mu\Big(\bigcup_{i \in I_1} (A_i \cap [-n, n])\Big) = \sum_{i \in I_1} \underbrace{\mu\Big(A_i \cap [-n, n]\Big)}_{\geq \frac{1}{m}} \geq \frac{1}{m}\overline{\overline{I_1}} = \aleph_0,$$

ein Widerspruch. Also muß doch $\overline{\overline{I}} \leq \aleph_0$ sein. qed(1)

Nach (a) ist $\bigcup_{i \in \kappa \setminus I} A_i$ eine Lebesgue-Nullmenge, ferner ist $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{L}$, da $\mathcal{L}$ als σ-Algebra unter abzählbarer Vereinigung abgeschlossen ist. Somit ist $\bigcup_{i < \kappa} A_i = \big(\bigcup_{i \in I} A_i\big) \cup \big(\bigcup_{i \in \kappa \setminus I} A_i\big) \in \mathcal{L}$. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\mu\Big(\bigcup_{i<\kappa} A_i\Big) &= \mu\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) + \mu\Big(\underbrace{\bigcup_{i \in \kappa \setminus I} A_i}_{\text{ist Nullmenge!}}\Big) \quad \text{(wegen der Additivität von } \mu)\\
&= \sum_{i \in I} \mu(A_i) + 0 \quad \text{(wegen der } \sigma\text{-Additivität von } \mu)\\
&= \sum_{i \in I} \mu(A_i) + \sum_{i \in \kappa \setminus I} \underbrace{\mu(A_i)}_{=0}\\
&= \sum_{i \in \kappa} \mu(A_i).
\end{aligned}$$

Damit ist (b) bewiesen.

Wir beweisen jetzt (a). Sei $\big(A_i \bigm| i < \kappa\big)$ eine Folge von Lebesgue-Nullmengen und $A :\equiv \bigcup\{A_i | i < \kappa\}$. Es ist $A \in \mathcal{I}(\mu)$ zu zeigen. Hierzu konstruieren wir zu jedem $\varepsilon > 0$ mit Hilfe eines generischen Filters eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ mit $U \supset A$ und $\mu(U) \leq \varepsilon$, indem wir jedes A_i mit einer „hinreichend" kleinen offenen Menge überdecken und dann U als Vereinigung dieser offenen Mengen wählen. Sei

$$P :\equiv \big\{p \subset \mathbb{R} \bigm| p \text{ ist offen} \wedge \mu(p) < \varepsilon\big\}.$$

Für $p, q \in P$ sei $p \leq q :\equiv p \supset q$. Dann ist $(P, \leq, \emptyset)$ eine Forcing-Halbordnung. Um $\mathbf{MA}(\kappa)$ ausnutzen zu können zeigen wir

(2) P hat ccc.

Beweis. Sei $\big(p_\alpha \bigm| \alpha < \omega_1\big)$ eine Sequenz mit Werten in P. Es sind zwei kompatible Glieder dieser Folge anzugeben.

Idee: Wir dünnen $(p_\alpha | \alpha < \omega_1)$ zu einer noch immer $\aleph_1$ langen Folge so aus (diese Folge sei o.E. wieder mit $(p_\alpha | \alpha < \omega_1)$ bezeichnet), daß ein offenes $p^* \subset \mathbb{R}$ existiert, das Teil eines jeden p_α ist und den größten Teil von dessen Masse trägt. Dann hat $p_0 \cup p_1$ im wesentlichen dieselbe Masse wie p_0, nämlich $\mu(p^*)$, woraus $p_0 \cup p_1 \in P$ folgt, was $p_0 \parallel p_1$ impliziert.

Ausführung: Zu $\alpha < \omega_1$ existiert wegen $\mu(p_\alpha) < \varepsilon$ ein $n_\alpha < \omega$ mit

$$\mu(p_\alpha) < \varepsilon - \frac{1}{n_\alpha}.$$

Nach dem Schubfachprinzip existiert ein $J_0 \subset \omega_1$ mit $\overline{\overline{J_0}} = \aleph_1$ und ein $n < \omega$ mit $n_\alpha = n$ für alle $\alpha \in J_0$. Durch Übergang zu einer Teilfolge der ursprünglichen Folge können wir $J_0 = \omega_1$ erreichen. Da die Menge

$$\mathcal{J}_0 \;:\equiv\; \big\{]a,b[\,\big|\, a,b \in \mathbb{Q} \wedge a < b\big\}$$

eine abzählbare Basis der Topologie von $\mathbb{R}$ ist,[210] existiert zu jedem $\alpha < \omega_1$ eine Folge $\big(I_{\alpha,k} \,\big|\, k < \omega\big)$ mit $I_{\alpha,k} \in \mathcal{J}_0$ für $k < \omega$, so daß $p_\alpha = \bigcup_{k<\omega} I_{\alpha,k}$ gilt. Da μ ein Maß ist, gilt $\mu(p_\alpha) = \lim_{m\to\omega} \mu\big(\bigcup_{k=0}^{m} I_{\alpha,k}\big)$. Da $\mu(p_\alpha)$ endlich ist, existiert ein $m_\alpha < \omega$, so daß für $p^*_\alpha :\equiv \bigcup_{k=0}^{m_\alpha} I_{\alpha,k}$ gilt $\mu(p_\alpha \setminus p^*_\alpha) < \frac{1}{n}$. Da die Menge $\big\{p^*_\alpha \,\big|\, \alpha < \omega_1\big\}$ höchstens abzählbar ist (p^*_α korrespondiert zu einem Element von ${}^{<\omega}\mathcal{J}_0$, und diese Menge ist abzählbar wegen $\overline{\overline{\mathcal{J}_0}} = \aleph_0$), existiert nach dem Schubfachprinzip ein $J_1 \subset \omega_1$ mit $\overline{\overline{J_1}} = \aleph_1$ und ein p^* mit $p^*_\alpha = p^*$ für alle $\alpha \in J_1$. Wieder können wir o.E. $J_1 = \omega_1$ annehmen. Betrachte nun p_0, p_1. $p_0 \cup p_1$ ist offen. Wegen

$$p_0 \cup p_1 = p_0 \cup \big(\underbrace{p^*_1}_{=p^* \subset p_0} \cup (p_1 \setminus p^*_1)\big) = p_0 \cup (p_1 \setminus p^*_1)$$

folgt

$$\mu(p_0 \cup p_1) \le \mu(p_0) + \mu(p_1 \setminus p^*_1) < \big(\varepsilon - \frac{1}{n}\big) + \frac{1}{n} = \varepsilon.$$

Somit ist $p_0 \cup p_1 \in P$; außerdem gilt $p_0 \cup p_1 \le p_0, p_1$. Also $p_0 \parallel p_1$. qed(2)

Für $i < \kappa$ sei $D_i :\equiv \big\{p \in P \,\big|\, p \supset A_i\big\}$. D_i sorgt dafür, daß A_i von unserem zu konstruierenden Objekt überdeckt wird. Es gilt

(3) D_i ist dicht in P.

Beweis. Sei $p \in P$ beliebig. Wähle ein $n < \omega$ mit $\mu(p) < \varepsilon - \frac{1}{n}$. Da A_i eine Lebesgue-Nullmenge ist, existiert ein offenes $p' \subset \mathbb{R}$ mit $p' \supset A_i$ und $\mu(p') < \frac{1}{n}$. Dann ist $p \cup p' \in D_i$ und $p \cup p' \le p$. qed(3)

Nach $\mathbf{MA}(\kappa)$ existiert ein P-generischer Filter G über $\big\{D_i \,\big|\, i < \kappa\big\}$. $U :\equiv \bigcup G$ ist als Vereinigung offener Mengen selbst offen. Für $i < \kappa$ ist $A_i \subset U$: wähle nämlich $p \in G \cap D_i$; dann ist $A_i \subset p \subset \bigcup G = U$. Es ist noch $\mu(U) \le \varepsilon$ zu zeigen. Angenommen, $\mu(U) > \varepsilon$.

(4) Es gibt eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}$ mit $K \subset U$ und $\mu(K) > \varepsilon$.

Beweis. Da U offen ist, existiert zu jedem $x \in U$ ein kompaktes Intervall $I(x) \subset U$, das rationale Endpunkte hat, so daß $x \in I(x)$ gilt. Sei $X :\equiv \big\{I(x) \,\big|\, x \in U\big\}$. Dann ist $U = \bigcup X$. Da es wegen $\overline{\overline{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}}} = \aleph_0$ nur abzählbar viele Intervalle mit rationalen Endpunkten gibt, existieren $x_k \in U$ $(k < \omega)$ mit $X = \big\{I(x_k) \,\big|\, k < \omega\big\}$. Also ist $U = \bigcup_{k<\omega} I(x_k)$. Da μ ein Maß ist, gilt $\varepsilon < \mu(U) = \lim_{m\to\omega} \mu\big(\bigcup_{k=0}^{m} I(x_k)\big)$. Also existiert ein $m < \omega$ mit $\mu\big(\bigcup_{k=0}^{m} I(x_k)\big) > \varepsilon$. Als Vereinigung endlich vieler kompakter Mengen ist $K :\equiv \bigcup_{k=0}^{m} I(x_k)$ kompakt. Ferner ist $K \subset U$ und $\mu(K) > \varepsilon$. qed(4)

Sei nun K wie in (4). Dann ist G eine Überdeckung von K mit offenen Mengen. Da K kompakt ist, wird K bereits von einer endlichen Teilmenge E von G überdeckt. Da G als Filter $\aleph_0$-vollständig ist, existiert ein $q \in G$ mit $q \supset p$ für jedes $p \in E$. Dann gilt $K \subset \bigcup E \subset q$. Wegen $q \in P$ ist $\mu(q) < \varepsilon$, so daß auch $\mu(K) < \varepsilon$ sein muß. Dies widerspricht der Wahl von K. Also muß unsere Annahme $\mu(U) > \varepsilon$ falsch sein und der Satz ist bewiesen. QED

Aus 26.9 folgt sofort das folgende Resultat, welches unsere Behauptung stützt, daß sich unter $\mathbf{MA}$ die Kardinalzahlen im Intervall $[\aleph_0, 2^{\aleph_0}[$ gleich verhalten.

[210] D.h., jede offene Menge ist Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{J}_0$. Da $\mathcal{J}_0$ abzählbar ist, ist jede offene Menge Vereinigung von *höchstens abzählbar vielen* Elementen von $\mathcal{J}_0$.

26.10 Corollar *Es gelte* **MA**. *Dann gilt*

(a) *Die Vereinigung von weniger als $2^{\aleph_0}$ vielen Nullmengen ist eine Nullmenge.*

(b) *Das* LEBESGUE*-Maß ist $2^{\aleph_0}$-additiv.*

(c) *Jede Teilmenge von $\mathbb{R}$, die von kleinerer Kardinalität als $\mathbb{R}$ ist, ist eine* LEBESGUE*-Nullmenge.*

26.3.2 Ein Beispiel aus der Topologie.

Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, d.h., X ist eine Menge und $\mathcal{O}$ ist eine **Topologie** auf X, also eine Teilmenge von $\mathrm{Pot}(X)$, die $\emptyset$ und X als Elemente enthält und gegen endliche Schnitte und beliebige Vereinigungen abgeschlossen ist. Die Elemente von $\mathcal{O}$ heißen **offen**, die Komplemente der Mengen von $\mathcal{O}$ heißen **abgeschlossen**. Für $A \subset X$ sei

$$\overline{A} :\equiv \bigcap\{B \mid A \subset B \wedge B \text{ ist abgeschlossen}\}$$

der **Abschluß** von A (d.h., $\overline{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Obermenge von A) und

$$\mathring{A} :\equiv \bigcup\{B \mid B \subset A \wedge B \in \mathcal{O}\}$$

das **Innere** von A (d.h., $\mathring{A}$ ist die größte offene Teilmenge von A).

26.11 Definition Sei $A \subset X$.

(a) A ist **dicht in** $X :\equiv \overline{A} = X$.

(b) A ist **nirgends dicht in** $X :\equiv \mathring{\overline{A}} = \emptyset$.

(c) A ist **mager**[211] $:\equiv \exists Z\big(\overline{\overline{Z}} \leq \aleph_0 \wedge \forall B \in Z\ (B \subset X \wedge B \text{ ist nirgends dicht}) \wedge A = \bigcup Z\big)$.

26.12 Beispiel Bezüglich der kanonischen Topologie von $\mathbb{R}$ sind alle endlichen Teilmengen von $\mathbb{R}$ nirgends dicht und alle höchstens abzählbaren mager. $\mathbb{Q}$ ist mager aber nicht nirgends dicht, da $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. $\mathbb{N}$ ist mager und nirgends dicht.

26.13 Lemma *Sei $A \subset X$. Dann gilt*

(a) *A ist dicht in $X \longleftrightarrow \forall B \in \mathcal{O}\ \big(B \neq \emptyset \to A \cap B \neq \emptyset\big)$.*

(b) *A ist nirgends dicht in $X \longleftrightarrow \exists D \in \mathcal{O}\ \big(D \subset X \setminus A \wedge D$ ist dicht in $X\big)$.*

(c) *A ist mager $\longleftrightarrow \exists Z \subset \mathcal{O}\ \big(\overline{\overline{Z}} \leq \aleph_0 \wedge \forall D \in Z\ D$ ist dicht in $X \wedge A \cap \bigcap Z = \emptyset\big)$.*

BEWEIS. zu (a). zu „$\Rightarrow$“. Sei $B \in \mathcal{O}$ mit $B \neq \emptyset$ und $A \cap B = \emptyset$. Dann ist $X \setminus B$ eine abgeschlossene Obermenge von A, die von X verschieden ist. Also ist $\overline{A} \neq X$, d.h., A ist nicht dicht in X.
zu „$\Leftarrow$“. Sei A nicht dicht in X, d.h., $\overline{A} \neq X$. Dann ist $B :\equiv X \setminus \overline{A} \in \mathcal{O} \setminus \{\emptyset\}$ und wegen $X \setminus \overline{A} \subset X \setminus A$ ist $A \cap B = \emptyset$.

zu (b). zu „$\Rightarrow$“. Sei A nirgends dicht in X, also $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$. Sei $D :\equiv X \setminus \overline{A}$. Dann ist D offen und es gilt $D \subset X \setminus A$. Ist $B \supset D$ eine abgeschlossene Menge, so ist $X \setminus B$ offen und es gilt $X \setminus B \subset \overline{A}$. Da A nirgends dicht ist, ist $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$, also $B = X$. Also ist X die einzige abgeschlossene Obermenge von D, d.h., $\overline{D} = X$.
zu „$\Leftarrow$“. Sei $D \subset X \setminus A$ offen und dicht. Dann ist $A \subset X \setminus D$ und $X \setminus D$ ist abgeschlossen. Folglich ist $\overline{A} \subset X \setminus D$. Ist also $B \subset \overline{A}$ eine offene Menge, so gilt $B \subset X \setminus D$. Es folgt $D \subset X \setminus B$ und somit, da $X \setminus B$ abgeschlossen ist, $\overline{D} \subset X \setminus B$. Wegen $\overline{D} = X$ ergibt sich $X \setminus B = X$, also $B = \emptyset$. $\emptyset$ ist also die einzige Teilmenge von $\overline{A}$, die offen ist, d.h., $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$.

[211] Es wird auch die Bezeichnung **von erster Kategorie** verwendet; ist A nicht mager, so sagt man auch, A ist **von zweiter Kategorie**.

zu (c). zu „$\Rightarrow$". Sei $A = \bigcup_{i<\omega} A_i$, wobei A_i für $i < \omega$ nirgends dicht in X ist. Nach (b) existiert ein offenes $D_i \subset X \setminus A_i$, das dicht in X ist. Dann ist $A \cap \bigcap_{i<\omega} D_i = \emptyset$, d.h., $Z :\equiv \{D_i \mid i < \omega\}$ ist wie benötigt.
zu „$\Leftarrow$". Sei $Z = \{D_i \mid i < \omega\}$. Für $i < \omega$ sei $A_i :\equiv A \cap (X \setminus D_i)$. Nach (b) ist A_i nirgends dicht in X (beachte $D_i \subset X \setminus A_i$). Ferner ist

$$A \supset \bigcup_{i<\omega} A_i = A \cap \bigcup_{i<\omega} (X \setminus D_i) = A \cap (X \setminus \bigcap_{i<\omega} D_i) \supset A \cap (X \setminus (X \setminus A)) = A;$$

beachte daß $\bigcap_{i<\omega} D_i \subset X \setminus A$ gilt wegen $A \cap \bigcap Z = \emptyset$. Somit ist A Vereinigung von abzählbar vielen nirgends dichten Mengen, also mager.
Damit ist das Lemma bewiesen. QED

26.14 Corollar *Ist $\mathcal{D}$ eine endliche, nicht-leere Menge von in X dichten, offenen Mengen, so ist $\bigcap \mathcal{D}$ dicht und offen in X.*

Beweis. Durch Induktion nach $n < \omega$ zeigen wir

(1) Sind $D_0, \ldots, D_n$ dicht und offen in X, so ist $\bigcap_{i<n+1} D_i$ dicht und offen.

Beweis. Die Behauptung ist für $n = 0$ klar.
Sei nun $n > 0$. Die Offenheit von $D :\equiv \bigcap_{i<n+1} D_i$ ist klar. In Hinblick auf 26.13(a) bleibt zu zeigen, daß jede offene Menge $B \neq \emptyset$ mit D einen nicht-leeren Schnitt hat. Nach Induktionsvoraussetzung ist $D' :\equiv \bigcap_{i<n} D_i$ dicht und offen. Nach 26.13(a) ist $B' :\equiv B \cap D' \neq \emptyset$. Ferner ist B' offen. Wiederum nach 26.13(a) ist $B' \cap D_n \neq \emptyset$. Wegen $B' \cap D_n = B \cap D$ ist damit alles gezeigt. qed(1)

Aus (1) ergibt sich sofort die Behauptung des Corollars. QED

26.15 Corollar *$\mathbb{R}$ ist nicht mager.*

Beweis. Wegen 26.13(c) genügt es zu zeigen, daß der Schnitt von je abzählbar vielen offenen, dichten Teilmengen von $\mathbb{R}$ nicht leer ist. Sei also für $i < \omega$ D_i eine offene, dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Definiere eine Folge $(I_i \mid i < \omega)$ nicht-leerer, kompakter Intervalle von $\mathbb{R}$ mit $I_i \subset D_i$ und $I_{i+1} \subset I_i$ wie folgt:
Da D_0 offen und nicht leer ist, existiert ein kompaktes Intervall $I_0 \subset D_0$ mit $\overset{\circ}{I_0} \neq \emptyset$.
Sei nun I_i definiert. Da D_i dicht ist, existiert $x_i \in D_i \cap \overset{\circ}{I_i}$. Da $D_i \cap \overset{\circ}{I_i}$ offen ist, existiert ein kompaktes Intervall $I_{i+1} \subset D_i \cap \overset{\circ}{I_i}$ mit $x_i \in I_{i+1}$.
Nach dem Satz über Intervallschachtelungen der reellen Analysis ist $\bigcap_{i<\omega} I_i \neq \emptyset$. Wegen $\bigcap_{i<\omega} I_i \subset \bigcap_{i<\omega} D_i$ ist damit alles bewiesen. QED

Wir zeigen nun mit Hilfe eines generischen Filters:

26.16 Satz *Sei $\kappa \in \mathrm{Card}$ und es gelte $\mathbf{MA}(\kappa)$. Dann ist jede Vereinigung von höchstens κ vielen mageren Teilmengen von $\mathbb{R}$ eine magere Menge.*

Beweis. Sei $(A_\alpha \mid \alpha < \kappa)$ eine Sequenz magerer Teilmengen von $\mathbb{R}$ und $A :\equiv \bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$. Da jedes A_α Vereinigung von abzählbar vielen nirgends dichten Mengen ist, ist A Vereinigung von κ vielen nirgends dichten Mengen. Es genügt also zu zeigen:

$(*)$ Jede Vereinigung von κ vielen nirgends dichten Teilmengen von $\mathbb{R}$ ist mager.

Wir können deshalb annehmen, daß jedes A_α eine nirgends dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Wir konstruieren mit Hilfe eines generischen Filters eine Familie $\{O_i \mid i < \omega\}$ von offenen, dichten Teilmengen von $\mathbb{R}$, so daß $A \cap \bigcap_{i<\omega} O_i = \emptyset$ gilt. Mit

$$\mathcal{J}_0 :\equiv \{]a,b[\mid a,b \in \mathbb{Q} \wedge a < b\} \text{ und } \mathcal{J} :\equiv \{\bigcup E \mid E \subset \mathcal{J}_0 \wedge \overline{\overline{E}} < \aleph_0\}$$

definieren wir hierzu

$$P :\equiv \Big\{ \big((U_i, E_i) | i < n+1 \big) \;\Big|\; n < \omega \wedge \forall i < n+1 \; \big(U_i \in \mathcal{J} \wedge E_i \subset \kappa \wedge \overline{\overline{E_i}} < \aleph_0 \wedge U_i \cap \bigcup_{\alpha \in E_i} A_\alpha = \emptyset \big) \Big\}.$$

Auf P definieren wir eine schwache partielle Ordnung durch

$$\big((U'_i, E'_i) \mid i < m+1 \big) \le \big((U_i, E_i) \mid i < n+1 \big) :\equiv m \ge n \wedge \forall i < n+1 \; \big(U'_i \supset U_i \wedge E'_i \supset E_i \big).$$

(Größtes Element von P ist $1_P :\equiv \big((\emptyset, \emptyset) \big)$.) Um $\mathbf{MA}(\kappa)$ ausnutzen zu können, zeigen wir:

(1) P hat ccc.

Beweis. Sei $S :\equiv \big(p_\alpha \mid \alpha < \lambda \big)$ eine Antikette in P. Sei $p_\alpha = \big((U_{\alpha,i}, E_{\alpha,i}) \mid i < n(\alpha)+1 \big)$. Definiere $f \colon \lambda \to \omega \times {}^{<\omega}\mathcal{J}$ durch $\alpha \mapsto \big(n(\alpha), (U_{\alpha,i} | i < n(\alpha)+1) \big)$. f ist injektiv: aus $f(\alpha) = f(\beta)$ folgt nämlich $n(\alpha) = n(\beta) \equiv: n$ und $U_{\alpha,i} = U_{\beta,i} \equiv: U_i$ für $i < n+1$, so daß $\big((U_i, E_{\alpha,i} \cup E_{\beta,i}) \mid i < n+1 \big) \le p_\alpha, p_\beta$, also $p_\alpha \parallel p_\beta$ gilt, was $\alpha = \beta$ bedeutet, da S eine Antikette ist. Es folgt

$$\lambda \le \overline{\overline{\omega \times {}^{<\omega}\mathcal{J}}} \le \aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \overline{\overline{\mathcal{J}}} = \aleph_0.$$

Also ist jede Antikette höchstens abzählbar. qed(1)

Für $i < \omega$ und $I \in \mathcal{J}_0$ sei

$$D_{i,I} :\equiv \big\{ p \in P \mid \mathrm{dom}(p) > i \wedge U_i \cap I \neq \emptyset \big\};$$

für $\alpha < \kappa$ sei

$$D_\alpha :\equiv \big\{ p \in P \mid \alpha \in \bigcup_{i \in \mathrm{dom}(p)} E_i \big\}.$$

(2) $D_{i,I}$ und D_α sind dicht in P

Beweis. Sei $p = \big((U_i, E_i) \mid i < n+1 \big) \in P$.
zu $D_{i,I}$. Definiere $p' \in P$ durch

$$p' :\equiv \begin{cases} p; & \text{falls } i \in \mathrm{dom}(p), \\ p \cup \big\{ (j, (\emptyset, \emptyset)) \mid \mathrm{dom}(p) \le j \le i \big\}; & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $p' \le p$ und $i \in \mathrm{dom}(p')$, so daß wir o.E. annehmen können, daß bereits $i \in \mathrm{dom}(p)$ gilt. Sei nun $\alpha \in E_i$ beliebig. Da A_α nirgends dicht ist, existiert nach 26.13 eine offene, dichte Menge $B_\alpha \subset \mathbb{R} \setminus A_\alpha$. $B :\equiv \mathbb{R} \cap \bigcap_{\alpha \in E_i} B_\alpha$ ist dicht und offen: im Fall $E_i \neq \emptyset$ folgt dies aus 26.14; im Fall $E_i = \emptyset$ ist $B = \mathbb{R} \cap V = \mathbb{R}$. Da B dicht und I offen sowie nicht leer ist, ist $B \cap I \neq \emptyset$ und offen. Also existiert ein $J \in \mathcal{J}_0$ mit $J \subset B \cap I$. Dann ist $J \subset B_\alpha \subset \mathbb{R} \setminus A_\alpha$ für $\alpha \in E_i$ und somit $J \cap \bigcup_{\alpha \in E_i} A_\alpha = \emptyset$. Somit ist durch

$$q(j) :\equiv \begin{cases} p(j); & \text{falls } j \in \mathrm{dom}(p) \setminus \{i\}, \\ (U_i \cup J, E_i); & \text{falls } i = j, \end{cases}$$

ein Element von P definiert. Es ist $q \le p$, ferner $q \in D_{i,I}$ wegen $J \cap I = J \neq \emptyset$. q ist also wie benötigt.
zu D_α. Es ist $q :\equiv p \cup \big\{ \big(n+1, (\emptyset, \{\alpha\}) \big) \big\} \in D_\alpha$ und $q \le p$. Dies war zu zeigen. qed(2)

Wegen $\mathbf{MA}(\kappa)$ existiert ein P-generischer Filter G über $\big\{ D_{i,I} \mid i < \omega \wedge I \in \mathcal{J}_0 \big\} \cup \big\{ D_\alpha \mid \alpha < \kappa \big\}$. Sei

$$O_i :\equiv \bigcup \Big\{ U \;\Big|\; \exists p \in P \; \big(p = \big((U_j, E_j) \mid j < n+1 \big) \wedge i < n+1 \wedge U_i = U \big) \Big\}.$$

O_i ist als Vereinigung offener Mengen offen.

(3) O_i ist dicht in $\mathbb{R}$.

Beweis. Sei B eine beliebige, nicht-leere offene Menge. Dann existiert ein $I \in \mathcal{J}_0$ mit $I \subset B$. Wähle $p \in G \cap D_{i,I}$, $p = \big((U_j, E_j) \bigm| j < n+1\big)$. Dann ist $U_i \subset O_i$ und $U_i \cap I \neq \emptyset$. Also ist $O_i \cap B \neq \emptyset$. Dies war zu zeigen. qed(3)

Für $\alpha < \kappa$ und $i < \omega$ gilt

(4) $A_\alpha \cap O_i = \emptyset$.

Beweis. Sei $p = \big((U_j, E_j) \bigm| j < n+1\big) \in G$ beliebig mit $i < n+1$. Es ist $A_\alpha \cap U_i = \emptyset$ zu zeigen. Wähle hierzu $p' = \big((U'_j, E'_j) \bigm| j < n'+1\big) \in G \cap D_\alpha$ und $p'' = \big((U''_j, E''_j) \bigm| j < n''+1\big) \in G$ mit $p'' \leq p, p'$. Dann ist $i < n+1 \leq n''+1$ und $\alpha \in E'_i \subset E''_i$. Nach Definition von P ist also $U''_i \cap A_\alpha = \emptyset$. Wegen $p'' \leq p$ gilt $U''_i \supset U_i$, so daß sich $U_i \cap A_\alpha = \emptyset$ ergibt. qed(4)

Aus (4) folgt sofort $\big(\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha\big) \cap \bigcap_{i<\omega} O_i = \emptyset$. Also ist $\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$ mager. QED

26.17 Corollar *Gilt* **MA**, *so ist die Vereinigung von weniger als* $2^{\aleph_0}$ *vielen mageren Teilmengen von* $\mathbb{R}$ *wiederum mager.*

26.3.3 Ein Beispiel aus der Kombinatorik.

Um kardinalzahlarithmetische Implikationen von **MA** zu beweisen, verwenden wir hier *almost disjoint forcing*. Grundlage dieses Verfahrens sind fast-disjunkte Familien.

26.18 Definition F ist **fast-disjunkt** $:\equiv \forall x, y \in F\ (x \neq y \longrightarrow \overline{\overline{x \cap y}} < \aleph_0)$.

26.19 Satz *Es gibt ein fast-disjunktes* $F \subset [\omega]^{\aleph_0}$ *mit* $\overline{\overline{F}} = 2^{\aleph_0}$.

Beweis. Es genügt, ein fast-disjunktes $F \subset [T]^{\aleph_0}$ mit $\overline{\overline{F}} = 2^{\aleph_0}$ zu finden, wobei T eine beliebige, zu ω gleichmächtige Menge ist. Wir wählen $T :\equiv {}^{<\omega}2 = \big\{f \bigm| \exists n < \omega\ f{:}\, n \to 2\big\}$ und setzen für $f{:}\, \omega \to 2$ $x_f :\equiv \{f \restriction n \,|\, n < \omega\}$. Dann ist $x_f \in [T]^{\aleph_0}$. $\big\{x_f \bigm| f \in {}^\omega 2\big\}$ hat Kardinalität $2^{\aleph_0}$ und ist fast-disjunkt: zu $f, g \in {}^\omega 2$ mit $f \neq g$ existiert ein $m < \omega$ mit $f \restriction m = g \restriction m$ und $f(m) \neq g(m)$; dann ist $x_f \cap x_g = \{f \restriction n \,|\, n \leq m\}$ eine endliche Menge. QED

26.20 Satz *Sei* $\kappa \in \mathrm{Card}$ *und* $(x_\alpha | \alpha < \kappa)$ *eine Sequenz fast-disjunkter, unendlicher Teilmengen von* ω. *Gilt* $\mathbf{MA}(\kappa)$, *so ist durch* $x \mapsto \{\alpha < \kappa \,|\, x \cap x_\alpha$ *ist unendlich*$\}$ *eine Surjektion* $h{:}\, [\omega]^{\aleph_0} \to \mathrm{Pot}(\kappa)$ *definiert.*

Beweis. Sei $A \in \mathrm{Pot}(\kappa)$. Es ist ein $x \subset \omega$ mit $\overline{\overline{x}} = \aleph_0$ anzugeben, so daß für alle $\alpha < \kappa$ gilt:

$(*)$ $\alpha \in A \longrightarrow x \cap x_\alpha$ unendlich
$\alpha \notin A \longrightarrow x \cap x_\alpha$ endlich.

Wir konstruieren die charakteristische Funktion χ_x von x m.H. eines generischen Filters. Unsere Bedingungen sind Paare (f, E), wobei $f \in {}^{<\omega}2$ Kandidat für ein Anfangsstück von χ_x und $E \subset \kappa$ eine endliche Menge ist, die diejenigen α festlegt, für die $(*)$ bereits erfüllt ist. Setze also

$$P :\equiv \big\{(f, E) \bigm| f \in {}^{<\omega}2 \wedge E \subset \kappa \wedge \overline{\overline{E}} < \aleph_0\big\}.$$

Für $(f, E), (f', E') \in P$ setze

$$(f', E') \leq (f, E) :\equiv f' \supset f \wedge E' \supset E \wedge \big(f' \neq f \longrightarrow \forall \alpha \in E\ (\alpha \in A \leftrightarrow \exists i \in \mathrm{dom}(f' \setminus f) \cap x_\alpha\ f'(i) = 1)\big).$$

Dann ist $(P, \leq, (\emptyset, \emptyset))$ eine Forcing-Halbordnung.

(1) P hat ccc.

Beweis. Da je zwei Elemente von P der Art $(f, E_1), (f, E_2)$ in $(f, E_1 \cup E_2)$ eine gemeinsame Verstärkung haben, unterscheiden sich je zwei inkompatible Elemente schon in ihren ersten Komponenten. Wegen der Abzählbarkeit von ${}^{<\omega}2$ existieren nur abzählbar viele verschiedene erste Komponenten, so daß jede Antikette höchstens abzählbar ist. qed(1)

Für $\alpha < \kappa$ setze $D_\alpha :\equiv \{(f, E) \in P \mid \alpha \in E\}$. D_α sorgt dafür, daß α in der Konstruktion in Hinblick auf $(*)$ berücksichtigt wird. Wegen $(f, E \cup \{\alpha\}) \leq (f, E)$ gilt

(2) D_α ist dicht in P.

Für $n < \omega$ sei $D'_n :\equiv \{(f, E) \in P \mid n \in \mathrm{dom}(f)\}$. D'_n sorgt dafür, daß n in den Definitionsbereich von χ_x aufgenommen wird. Weiter sei $D''_n :\equiv \{(f, E) \mid \exists k \in \mathrm{dom}(f)\ (k > n \wedge f(k) = 1)\}$. D''_n bewirkt, daß $\chi_x(k) = 1$ gilt für ein $k > n$ und wir insgesamt $\overline{\overline{x}} = \aleph_0$ bekommen.

(3) D'_n und D''_n sind dicht in P.

Beweis. Sei $p = (f, E) \in P$. Sei $m :\equiv \mathrm{dom}(f)$. Wir verlängern f zu einem f' wie folgt (also $f' \upharpoonright m :\equiv f$): Da E endlich und die Familie $\{x_\alpha \mid \alpha \in E\}$ fast-disjunkt ist, existiert ein $m' > \max\{m, n\}$ mit $x_\alpha \cap x_\beta \subset m'$ für alle $\alpha, \beta \in E$ mit $\alpha \neq \beta$ (wähle etwa $m' :\equiv m + n + \bigcup\{x_\alpha \cap x_\beta \mid \alpha, \beta \in E \wedge \alpha \neq \beta\} + 1$). Um ein geeignetes k für D''_n zu bekommen, zeigen wir

(3.1) Es gibt ein $k > m'$ mit $k \notin \bigcup_{\alpha \in E} x_\alpha$.

Beweis. Wenn dies nicht der Fall ist, ist $]m', \omega[\subset \bigcup_{\alpha \in E} x_\alpha$. Da E endlich ist, existiert ein $\beta \in \kappa \setminus E$. Dann ist $x_\beta \cap]m', \omega[\subset \bigcup_{\alpha \in E}(x_\alpha \cap x_\beta)$, d.h., eine Vereinigung endlich vieler endlicher Mengen und somit endlich. Also ist $x_\beta = \big(x_\beta \cap (m' + 1)\big) \cup \big(x_\beta \cap]m', \omega[\big)$ endlich im Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes. Also muß (3.1) doch richtig sein. qed(3.1)

Wir setzen für $m \leq i \leq k$

$$f'(i) :\equiv \begin{cases} 0, & \text{falls } i < k; \\ 1, & \text{falls } i = k. \end{cases}$$

Da die x_α unendlich sind und E endlich ist, existiert ein $m'' > k$, so daß $x_\alpha \cap]k, m''[\neq \emptyset$ für alle $\alpha \in E$ gilt; setze etwa $m'' :\equiv \bigcup_{\alpha \in E} \min(x_\alpha \cap]k, \omega[) + 1$. Wir definieren für $k < i < m''$

$$f'(i) :\equiv \begin{cases} 1, & \text{falls } \exists \alpha \in E \cap A\ i \in x_\alpha; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $p' :\equiv (f', E)$. Offenbar ist $p' \in P$, $p' \in D'_n$ und $p' \in D''_n$. Ferner:

(3.2) $p' \leq p$.

Beweis. Es ist die Gültigkeit von $\forall \alpha \in E\ (\alpha \in A \leftrightarrow \exists i \in \mathrm{dom}(f' \setminus f) \cap x_\alpha\ f'(i) = 1)$ zu zeigen. Sei also $\alpha \in E$.
zu „$\Rightarrow$“. Sei $\alpha \in A$. Nach Wahl von m'' existiert ein $i \in]k, m''[\cap x_\alpha$; nach Definition von f' ist $f'(i) = 1$. Wegen $]k, m''[\subset \mathrm{dom}(f' \setminus f)$ ist i wie benötigt.
zu „$\Leftarrow$“. Sei $\alpha \notin A$. Es ist $f'(i) = 0$ für alle $i \in x_\alpha$ mit $i \in \mathrm{dom}(f' \setminus f) = [m, m''[$ zu zeigen. Gilt $m \leq i \leq k$, so folgt dies sofort aus der Definition von f'; beachte, daß $k \notin x_\alpha$ gilt. Sei $k < i < m''$. Wenn dann $f'(i) = 1$ gilt, so gibt es ein $\beta \in A \cap E$ mit $i \in x_\beta$. Dann ist $\beta \neq \alpha$ wegen $\alpha \notin A$. Da nach Wahl von m' gilt $x_\alpha \cap x_\beta \subset m' < k$, ist $i \notin x_\alpha$. M.a.W., für $i \in]k, m''[\cap x_\alpha$ ist $f'(i) = 0$. qed(3.2)

p' ist also wie benötigt. qed(3)

Sei nun G ein P-generischer Filter über $\{D_\alpha \mid \alpha < \kappa\} \cup \{D'_n \mid n < \omega\} \cup \{D''_n \mid n < \omega\}$. Setze

$$\chi :\equiv \bigcup \{f \mid \exists p \in G\, \exists E\ p = (f, E)\}.$$

Dann gilt $\chi\colon\omega \supset\!\!\rightarrow 2$. Es ist $\mathrm{dom}(\chi) = \omega$: ist $n < \omega$ beliebig, so wähle $p = (f, E) \in G \cap D'_n$; dann ist $n \in \mathrm{dom}(f) \subset \mathrm{dom}(\chi)$. Sei $x :\equiv \chi^{-1}\big[\{1\}\big]$. x ist unendlich: zu $n < \omega$ wähle $p = (f, E) \in G \cap D''_n$; dann existiert ein $k > n$ mit $k \in \mathrm{dom}(f)$ und $p(k) = 1$, so daß $\chi(k) = 1$ wegen $p = \chi \restriction \mathrm{dom}(f)$ gilt; x ist also in ω nicht beschränkt. Es verbleibt $(*)$ zu zeigen.

(4) $\quad \alpha \in A \longrightarrow x \cap x_\alpha$ unendlich.

Beweis. Sei $\alpha \in A$ fixiert. Es ist zu zeigen, daß $]n, \omega] \cap (x \cap x_\alpha) \neq \emptyset$ für alle $n < \omega$ gilt. Fixiere also $n < \omega$. Wähle je ein Element aus $G \cap D_\alpha$ und ein Element aus $G \cap D'_n$ und zu diesen beiden eine gemeinsame Verstärkung $p = (f, E) \in G$. Aus der Definition von $\leq$, D_α und D'_n folgt $p \in G \cap D_\alpha \cap D'_n$. Sei $m :\equiv \mathrm{dom}(f)$. Dann ist $n < m$ wegen $p \in D'_n$. Wähle ein Element aus $G \cap D'_m$ und zu diesem sowie p eine gemeinsame Verstärkung $p' = (f', E') \in G$. Dann gilt $p' \in D'_m$ und $p' \leq p$. Insbesondere ist $f' \neq f$ wegen $\mathrm{dom}(f) = m \in \mathrm{dom}(f')$. Wegen $\alpha \in E \subset E'$ existiert nach Definition von $\leq$ ein $i \in \mathrm{dom}(f' \setminus f) \cap x_\alpha$ mit $f'(i) = 1$. Dann ist $i \geq \mathrm{dom}(f) = m > n$. Ferner ist $\chi(i) = 1$, da $f' = \chi \restriction \mathrm{dom}(f')$ gilt wegen $p' \in G$. Somit ist $i \in]n, \omega[\cap (x \cap x_\alpha)$, wie benötigt. qed(4)

$(*)$ folgt aus

(5) $\quad \alpha \notin A \longrightarrow x \cap x_\alpha$ endlich.

Beweis. Sei $\alpha \in \kappa \setminus A$ fixiert. Wähle $p = (f, E) \in G \cap D_\alpha$ und setze $n :\equiv \mathrm{dom}(f)$. Wir zeigen $x \cap x_\alpha \subset n$. Hierzu sei $i \in x_\alpha \cap [n, \omega[$ beliebig fixiert. Es ist $\chi(i) = 0$ zu zeigen. Wähle ein Element von $G \cap D'_i$ und zu diesem sowie p eine gemeinsame Verstärkung $p' = (f', E') \in G$. Dann ist $p' \leq p$, und wie man leicht sieht gilt $p' \in D_\alpha \cap D'_i$. Wegen $\mathrm{dom}(f') > i \geq n = \mathrm{dom}(f)$ und $i \in x_\alpha$ folgt

$$i \in \underbrace{\mathrm{dom}(f') \setminus \mathrm{dom}(f)}_{=\mathrm{dom}(f' \setminus f)} \cap x_\alpha.$$

Wegen $\alpha \in E'$ folgt $f'(i) = 0$ aus $p' \leq p$. Folglich ist $\chi(i) = 0$ wegen $\chi \restriction \mathrm{dom}(f') = f'$. Dies war zu zeigen. qed(5)

Damit ist der Satz bewiesen. QED

Als Folgerung erhalten wir die folgenden Resultate den Wert von $2^{\aleph_0}$ betreffend:

26.21 Satz *Es gelte* $\mathbf{MA}(\kappa)$. *Dann gilt* $2^{\aleph_0} = 2^\kappa$ *und* $\mathrm{cf}(2^{\aleph_0}) > \kappa$.

Beweis. Da nach dem Lemma von König 10.29 $\mathrm{cf}(2^\kappa) > \kappa$ gilt, genügt es, $2^{\aleph_0} = 2^\kappa$ zu zeigen. Wegen $\aleph_0 \leq \kappa$ ist hier „$\leq$“ klar.
zu „$\geq$“. Sei $F :\equiv \big(x_\alpha \bigm| \alpha < 2^{\aleph_0}\big)$ die fast-disjunkte Familie unendlicher Teilmengen von ω aus 26.19. Da $\mathbf{MA}(\kappa)$ gilt, muß $\kappa < 2^{\aleph_0}$ sein. Nach 26.20 (mit der Teilfamilie $F \restriction \kappa$ von F) existiert eine Surjektion $h\colon [\omega]^{\aleph_0} \to \mathrm{Pot}(\kappa)$. Also gilt

$$2^\kappa = \overline{\overline{\mathrm{Pot}(\kappa)}} \leq \overline{\overline{[\omega]^{\aleph_0}}} \leq \overline{\overline{\mathrm{Pot}(\omega)}} = 2^{\aleph_0}.$$

Dies war zu zeigen. QED

26.22 Corollar *Es gelte* $\mathbf{MA}$. *Dann ist* $2^\kappa = 2^{\aleph_0}$ *für alle* $\kappa < 2^{\aleph_0}$ *und* $2^{\aleph_0}$ *ist regulär.*

Beweis. Da $\mathbf{MA}(\kappa)$ für alle $\kappa < 2^{\aleph_0}$ gilt, ist nach 26.21 $2^\kappa = 2^{\aleph_0}$ und $\kappa < \mathrm{cf}(2^{\aleph_0})$ für $\kappa < 2^{\aleph_0}$ für alle $\kappa < 2^{\aleph_0}$. Somit ist $2^{\aleph_0} \leq \mathrm{cf}(2^{\aleph_0})$, woraus $\mathrm{cf}(2^{\aleph_0}) = 2^{\aleph_0}$ folgt, da stets $\mathrm{cf}(\lambda) \leq \lambda$ ist. Also ist $2^{\aleph_0}$ regulär. QED

Wir analysieren abschließend die fast-disjunkten Teilmengen von $\mathrm{Pot}(\omega)$ unter $\mathbf{MA}$ etwas genauer.

26.23 Definition $F \subset \mathrm{Pot}(\omega)$ sei fast-disjunkt.
F ist **maximal** $:\equiv \neg\exists x \in [\omega]^{\aleph_0} \setminus F \; F \cup \{x\}$ ist fast-disjunkt.

26.24 Lemma *Es gelte* $\mathbf{MA}(\kappa)$ *und* $(x_\alpha | \alpha < \kappa)$ *sei fast-disjunkt. Ferner seien im Fall* $\kappa = \aleph_0$ *unendlich viele der* x_α *unendlich. Dann ist* $(x_\alpha | \alpha < \kappa)$ *nicht maximal.*

Beweis. Sei $F' :\equiv F \setminus [\omega]^{<\aleph_0}$. Dann gilt $\overline{\overline{F'}} = \kappa$: dies folgt im Fall $\kappa = \aleph_0$ sofort aus der Zusatzvoraussetzung, im Fall $\kappa > \aleph_0$ aus $\overline{\overline{[\omega]^{<\aleph_0}}} = \aleph_0 < \overline{\overline{F}}$. Da nicht-Maximalität von einer unendlichen Menge bezeugt wird, ist F genau dann maximal, wenn F' maximal ist. Es ist also zu zeigen, daß F' nicht maximal ist. Sei $\{x_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ eine injektive Aufzählung der Elemente von F'. Nach 26.20 ist durch $x \mapsto \{\alpha < \kappa \,|\, x \cap x_\alpha$ unendlich$\}$ eine Surjektion $h\colon [\omega]^{\aleph_0} \to \mathrm{Pot}(\kappa)$ gegeben. Sei $x \in h^{-1}[\{\emptyset\}]$. Dann ist x unendlich und $\{\alpha < \kappa \,|\, x \cap x_\alpha$ unendlich$\} = \emptyset$, also $x \cap x_\alpha$ endlich für alle $\alpha < \kappa$. x ist also wie benötigt.
QED

26.25 Bemerkung Ohne die Zusatzvoraussetzung an F im Fall $\kappa = \aleph_0$ ist das Lemma falsch: betrachte etwa

$$x_n :\equiv \begin{cases} \omega; & \text{falls } n = 0, \\ n; & \text{falls } n > 0. \end{cases}$$

Dann ist $F :\equiv \{x_n \mid n < \omega\}$ fast-disjunkt. Da jede unendliche Teilmenge x von ω mit x_0 einen unendlichen Schnitt hat, ist F maximal.

26.26 Satz *Es gelte* $\mathbf{MA}$. *Ist dann* $F \subset \mathrm{Pot}(\omega)$ *fast-disjunkt und maximal, so gilt* $\overline{\overline{F}} \in (\omega \setminus \{0\}) \cup \{\aleph_0, 2^{\aleph_0}\}$*, und jeder der Fälle ist möglich. Sind unendlich viele der Elemente von* F *unendlich, so ist* $\overline{\overline{F}} = 2^{\aleph_0}$.

Beweis. $F = \emptyset$ ist nicht maximal, da $F \cup \{\omega\}$ fast-disjunkt ist. Also hat jedes maximale, fast-disjunkte F positive Kardinalität. Da $\mathbf{MA}(\kappa)$ für $\kappa \in]\aleph_0, 2^{\aleph_0}[$ gilt, ist nach 26.24 kein fast-disjunktes $F \subset \mathrm{Pot}(\omega)$ mit $\overline{\overline{F}} = \kappa$ maximal. Also ist $\overline{\overline{F}} \in (\omega \setminus \{0\}) \cup \{\aleph_0, 2^{\aleph_0}\}$ für jedes maximale, fast-disjunkte $F \subset \mathrm{Pot}(\omega)$. Sind unendlich viele Elemente eines solchen F unendlich, so ist einerseits $\overline{\overline{F}} \geq \aleph_0$, andererseits kann $\overline{\overline{F}} = \aleph_0$ nicht gelten, da nach 26.24 ein solches F nicht maximal sein kann. Also muß $\overline{\overline{F}} = 2^{\aleph_0}$ sein.
Wir zeigen abschließend, daß alle Werte aus $(\omega \setminus \{0\}) \cup \{\aleph_0, 2^{\aleph_0}\}$ als Kardinalität eines maximalen, fast-disjunkten F in Frage kommen:
Für $1 \leq k < \omega$ ist $F :\equiv \{\omega\} \cup (k-1)$ fast-disjunkt und maximal. Ein maximales, fast-disjunktes F mit $\overline{\overline{F}} = \aleph_0$ ist in 26.25 angegeben worden. Ein maximales, fast-disjunktes F mit $\overline{\overline{F}} = 2^{\aleph_0}$ erhält man durch Wahl eines $\subset$-maximalen Elementes in $\{F \subset \mathrm{Pot}(\omega) \,|\, F_0 \subset F \wedge F$ fast-disjunkt$\}$, wobei F_0 die fast-disjunkte Teilmenge von $[\omega]^{\aleph_0}$ mit $\overline{\overline{F_0}} = 2^{\aleph_0}$ aus 26.19 ist. QED

26.27 Bemerkung Der letzte Satz liefert ein „**CH**-ähnliches“ Resultat. Besagt **CH**, daß *jede* Teilmenge von $\mathrm{Pot}(\omega)$ höchstens abzählbar oder gleichmächtig zu $\mathrm{Pot}(\omega)$ ist, so impliziert **MA**, daß *jede maximale, fast-disjunkte* Teilmenge von $\mathrm{Pot}(\omega)$ höchstens abzählbar oder gleichmächtig zu $\mathrm{Pot}(\omega)$ ist.

27 Generische Erweiterungen.

Wir wollen mit Hilfe generischer Filter auf geeigneten Forcing-Halbordnungen relative Konsistenzbeweise führen. Es sei eine Liste T von $\in$-Formeln vorgelegt, die **ZFC** umfaßt. T' sei eine weitere Liste von $\in$-Sätzen. Wir wollen zeigen

$(*)$ $\quad \mathrm{Kon}(T) \Rightarrow \mathrm{Kon}(T')$.

Nach 23.14 genügt es hierfür zu zeigen, daß für jedes endliche Teilsystem T_0' von T' gilt

$$T_M \vdash \exists M' \left((T_0')^{M'} \wedge M' \neq \emptyset \right);$$

hierbei ist M ein neues Konstantensymbol und $T_M :\equiv T + M$ ist abzählbar und transitiv $+ T^M$. Wir erhalten also $(*)$, wenn wir folgendes zeigen können:[212]

> Wenn T gilt und M ein abzählbares, transitives Modell von T ist, so existiert für jedes endliche Teilsystem T_0' von T' ein (nicht-leeres) Modell von T_0'.

27.1 Das Grundmodell.

Da jedes von uns zu betrachtende M wegen $T \supset$ **ZFC** zumindest ein Modell von **ZFC** sein muß, definieren wir:

27.1 Definition M ist ein **Grundmodell** $:\equiv$ M ist abzählbar und transitiv $\wedge$ $\mathbf{ZFC}^M$.

Wir skizzieren informell die Konstruktion von M': Die Gültigkeit von T' in einer Struktur M' bedingt i.a. das Vorhandensein gewisser Objekte in M'. Ziel ist es, diese Objekte zu einem Grundmodell M hinzuzufügen und so M' zu erhalten. Hierzu codieren wir deren Eigenschaften in Form gewisser dichter Mengen $D \in M$ auf einer (der Fragestellung angemessenen) Forcing-Halbordnung $(P, \leq, 1_P) \in M$, so daß diese Eigenschaften aus einem P-generischen Filter G über M m.H. mengentheoretischer Operationen (z.B. Vereinigungsmengenbildung) „decodiert“ werden können. Im allgemeinen ist $G \notin M$, da G sämtliche Elemente von M, die dichte Teilmenge von P sind, schneiden muß, und dies i.a. bedeutet, daß für „fast jedes“ $D \in M$ ein anderes Element in G aufgenommen werden muß. Der Fall $G \in M$ ist für unsere Zwecke auch uninteressant: i.a. wird nämlich M noch kein Modell von T' sein, im Fall $G \in M$ würden jedoch mengentheoretische Operationen keine neuen Objekte zu M hinzufügen, da diese wegen $\mathbf{ZFC}^M$ aus M nicht hinausführen.

Da M abzählbar ist, existiert nach 25.4 ein P-generischer Filter über M. Wir wählen ein $\subset$-minimales Grundmodell $M[G] \supset M$ mit $G \in M[G]$. Kombinatorische Eigenschaften von P gestatten es wegen der Minimalität von $M[G]$, die Eigenschaften von $M[G]$ zu kontrollieren. In $M[G]$ können wir wegen $\mathbf{ZFC}^{M[G]}$ die mengentheoretischen Operationen an G durchführen und erhalten die codierten Objekte. Die Kontrolle, die wir über die Eigenschaften von $M[G]$ haben, ermöglicht es uns nachzuweisen, daß die generierten Objekte *in* $M[G]$ die von T' verlangten Eigenschaften haben. Was bedeutet dies? Angenommen, T' enthält eine Formel der Art $\varphi(t_0(\vec{x}), \ldots, t_{n-1}(\vec{x}), \vec{y}, z)$, wobei $\varphi(u_0, \ldots, u_{n-1}, \vec{y}, z)$ eine $\in$-Formel ist und $t_0(\vec{x}), \ldots, t_{n-1}(\vec{x})$ gewisse Klassenterme sind. Nach dem Relativierungslemma 22.22 gilt

$$\forall \vec{x}, \vec{y}, z \in M[G] \ \left(M[G] \models \varphi(t_0(\vec{x}), \ldots, t_{n-1}(\vec{x}), \vec{y}, z) \longleftrightarrow \varphi^{M[G]}(t_0^{M[G]}(\vec{x}), \ldots, t_{n-1}^{M[G]}(\vec{x}), \vec{y}, z) \right).$$

Um also zu zeigen, daß $z \in M[G]$ in $M[G]$ die Eigenschaft $\varphi(t_0(\vec{x}), \ldots, t_{n-1}(\vec{x}), \vec{y}, z)$ erfüllt, ist

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in M[G] \ \ \varphi^{M[G]}(t_0^{M[G]}(\vec{x}), \ldots, t_{n-1}^{M[G]}(\vec{x}), \vec{y}, z)$$

zu zeigen.

27.2 Beispiel Um die relative Konsistenz von **ZFC** + **CH** zu beweisen starten wir mit einem Grundmodell M und haben $M[G] \models \exists f\, (f\colon \omega_1 \overset{surj.}{\longrightarrow} \mathrm{Pot}(\omega))$, also $\exists f \in M[G] \ \ f\colon \omega_1^{M[G]} \overset{surj.}{\longrightarrow} \mathrm{Pot}(\omega)^{M[G]}$ zu zeigen. (Beachten Sie, daß $\omega = \omega^M \in M$ ist, da $(\mathbf{Inf})^M + (\mathbf{Aus})^M$ gilt, vgl. 22.30.) Hierzu wählen wir eine geeignete Forcing-Halbordnung $P \in M$, bezüglich der wir m.H. dichter Teilmengen von P die Eigenschaften einer *Surjektion* mit *Definitionsbereich* ω_1^M und *Wertebereich* $\left(\mathrm{Pot}(\omega)\right)^M$ codieren können. Dann wählen wir einen P-generischen Filter G über M und bilden $M[G]$. In $M[G]$ gibt es dann eine Surjektion von ω_1^M auf $\left(\mathrm{Pot}(\omega)\right)^M$, d.h., es gilt $\exists f \in M[G] \ f\colon \omega_1^M \overset{surj.}{\longrightarrow} \mathrm{Pot}(\omega)^M$. Es bleibt zu verifizieren, daß $\omega_1^M = \omega_1^{M[G]}$ und $\left(\mathrm{Pot}(\omega)\right)^M = \left(\mathrm{Pot}(\omega)\right)^{M[G]}$ gilt. Dies gelingt uns, da wir „Kontrolle“ über das Verhalten von $M[G]$ haben. In 31.2 führen wir diese Überlegungen detailliert aus.

[212] vgl. 23.15

Wir fixieren ein Grundmodell M.

27.3 Definition

$(P, \leq, 1_P)$ ist eine **Forcing-Halbordnung für** M $:\equiv$ $(P, \leq, 1_P) \in M \wedge$
$\big((P, \leq, 1_P)$ ist eine Forcing-Halbordnung$\big)^M$.

27.4 Lemma *Wenn $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung für M ist, so ist $P \in M$, $\leq \in M$, $1_P \in M$ und $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung (in V). Ferner gilt für $p, q \in P$, und $D, A \in M$:*

(a) $\big(p \parallel q \textit{ in } P\big)^M \longleftrightarrow p \parallel q \textit{ in } P.$

(b) $\big(p \perp q \textit{ in } P\big)^M \longleftrightarrow p \perp q \textit{ in } P.$

(c) $\big(D \textit{ ist dicht in } P\big)^M \longleftrightarrow D \textit{ ist dicht in } P.$

(d) $\big(A \textit{ ist Antikette in } P\big)^M \longleftrightarrow A \textit{ ist Antikette in } P.$

(e) $\big(A \textit{ ist maximale Antikette in } P\big)^M \longleftrightarrow A \textit{ ist maximale Antikette in } P.$

Beweis. $P, \leq, 1_P \in M$ folgt leicht aus $(P, \leq, 1_P) \in M$ und der Transitivität von M. Wegen

$$\begin{aligned}
(P, \leq, 1_P) \text{ ist Forcing-Halbordnung} \iff\ & 1_P \in P \wedge \ \leq \subset P \times P \ \wedge \\
& \forall x \in P\ (x, x) \in \leq\ \wedge \\
& \forall x, y, z \in P\ \big(((x, y) \in \leq\ \wedge (y, z) \in \leq) \longrightarrow (x, z) \in \leq\big)\ \wedge \\
& \forall x \in P\ (x, 1_P) \in \leq
\end{aligned}$$

folgt aus dem Relativierungslemma

$$\begin{aligned}
\big((P, \leq, 1_P) \text{ ist Forcing-Halbordnung}\big)^M \iff\ & 1_P \in P \wedge \ \leq \subset (P \times P)^M \ \wedge \\
& \forall x \in P\ (x, x)^M \in \leq\ \wedge \\
& \forall x, y, z \in P \\
& \big(((x, y)^M \in \leq\ \wedge (y, z)^M \in \leq) \longrightarrow (x, z)^M \in \leq\big)\ \wedge \\
& \forall x \in P\ (x, 1_P)^M \in \leq .
\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite können nach 22.24 alle Relativierungen entfernt werden (beachte, daß P eine Variable ist und $P \in M$ gilt). Die rechte Seite ist also äquivalent zu $(P, \leq, 1_P)$ ist Forcing-Halbordnung. Um (a) – (e) zu beweisen, wählen wir jeweils eine geeignete, unter **ZFC** äquivalente Formulierung der jeweiligen Eigenschaft. Dann folgt wegen $P, \leq \in M$ und der Transitivität von M:

zu (a).

$$\begin{aligned}
\big(p \parallel q \text{ in } P\big)^M &\iff \big(\exists r \in P\ ((r, p) \in \leq\ \wedge (r, q) \in \leq)\big)^M \\
&\iff \exists r \in P\ ((r, p)^M \in \leq\ \wedge (r, q)^M \in \leq) \quad \text{(Relativierungslemma)} \\
&\iff \exists r \in P\ ((r, p) \in \leq\ \wedge (r, q) \in \leq) \\
&\iff p \parallel q \text{ in } P.
\end{aligned}$$

zu (b).

$$\begin{aligned}
\big(p \perp q \text{ in } P\big)^M &\iff \big(\neg\,(p \parallel q \text{ in } P)\big)^M \\
&\iff \neg\,(p \parallel q \text{ in } P) \quad \text{(nach (a))} \\
&\iff p \perp q \text{ in } P.
\end{aligned}$$

zu (c).

$$\begin{aligned}\big(D \text{ ist dicht in } P\big)^M &\iff \big(\forall p \in P\,\exists q \in D\ (q,p) \in \leq\big)^M\\ &\iff \forall p \in P\,\exists q \in D\ (q,p)^M \in \leq\\ &\iff \forall p \in P\,\exists q \in D\ (q,p) \in \leq\\ &\iff D \text{ ist dicht in } P.\end{aligned}$$

zu (d).

$$\begin{aligned}\big(A \text{ ist Antikette in } P\big)^M &\iff \big(A \subset P \wedge \forall p,q \in A\,\neg(p \parallel q \text{ in P})\big)^M\\ &\iff A \subset P \wedge \forall p,q \in A\ (p \perp q \text{ in P})^M\\ &\qquad (\text{da } x \subset y \text{ als } \Sigma_0^{\mathbf{EML}}\text{-Formel } M\text{-absolut ist})\\ &\iff A \subset P \wedge \forall p,q \in A\ (p \perp q \text{ in P}) \quad (\text{nach (b)})\\ &\iff A \text{ ist Antikette in } P.\end{aligned}$$

zu (e)

$$\begin{aligned}\big(A \text{ ist maximale Antikette in } P\big)^M &\iff \big(A \text{ ist Antikette in } P \wedge \forall p \in P\,\exists q \in A\ (p \parallel q \text{ in } P)\big)^M\\ &\iff (A \text{ ist Antikette in } P)^M \wedge \forall p \in P\,\exists q \in A\ (p \parallel q \text{ in } P)^M\\ &\iff A \text{ ist Antikette in } P \wedge \forall p \in P\,\exists q \in A\ p \parallel q \text{ in } P\\ &\qquad (\text{wegen (a), (d)})\\ &\iff A \text{ ist maximale Antikette in } P.\end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. QED

27.5 Corollar *Sei $\varphi(p,\vec{x})$ eine $\in$-Formel. Dann gilt für alle $\vec{x} \in M$:*

$$\Big(\big\{p \in P \mid \varphi(p,\vec{x})\big\} \text{ ist dicht in } P\Big)^M \longleftrightarrow \big\{p \in P \mid \varphi^M(p,\vec{x})\big\} \text{ ist dicht in } P,$$

wobei $\{p \in P \mid \varphi^M(p,\vec{x})\} \in M$ ist.

Beweis. $\{p \in P \mid \varphi^M(p,\vec{x})\} \in M$ folgt wegen $P \in M$, und $\vec{x} \in M$ sofort aus $(\mathbf{Aus})^M$. Wir haben also

(1) $$\big\{p \in P \mid \varphi(p,\vec{x})\big\}^M = \big\{p \in P \mid \varphi^M(p,\vec{x})\big\} \in M,$$

so daß nach 22.31(a)

$$\Big(\big\{p \in P \mid \varphi(p,\vec{x})\big\} \text{ ist dicht in } P\Big)^M \longleftrightarrow \big\{p \in P \mid \varphi(p,\vec{x})\big\}^M \text{ ist dicht in } P$$

gilt; beachte, daß die $\in$-Formel „z ist dicht in P“ M-V-absolut ist. Nach (1) ist die rechte Seite gerade die rechte Seite der behaupteten Äquivalenz. QED

Wir fixieren eine Forcing-Halbordnung für M $(P,\leq,1_P)$. Da $(P,\leq,1_P)$ nach 27.4 eine Forcing-Halbordnung ist, ferner M abzählbar ist, existiert nach dem Existenzsatz für generische Filter 25.4 ein P-generischer Filter über M. Sei $G \in V$ ein solcher Filter. Bei den von uns zu betrachtenden Forcing-Halbordnungen gilt $G \notin M$; wir zeigen hierzu:

27.6 Satz *Sei $(P,\leq,1_P)$* **verzweigt**, *d.h., es gilt $\forall p \in P\,\exists q,r \in P\ (q \leq p \wedge r \leq p \wedge q \perp r)$. Dann ist $G \notin M$.*

Beweis. Angenommen, $G \in M$. Sei $D :\equiv P \setminus G$. Wegen $D = \{p \in P \,|\, p \notin G\} = \{p \in P \,|\, (p \notin G)^M\}$ ist $D \in M$ nach $(\mathbf{Aus})^M$.

(1) D ist dicht in P.

Beweis. Sei $p \in P$. Wähle $q, r \in P$ mit $q \leq p$, $r \leq p$ und $q \perp r$. Ist $q \notin G$, so ist $q \in D$ und wir sind fertig. Ist $q \in G$, so ist $r \notin G$, da die Elemente von G paarweise kompatibel sind. Folglich ist $r \in D$. Damit ist (1) gezeigt. qed(1)

Da G P-generisch über M ist, folgt $D \cap G \neq \emptyset$ aus (1) und $D \in M$. Dies widerspricht der Definition von D. QED

27.7 Bemerkung Wie man leicht sieht, gilt:

(a) $\big((P, \leq, 1_P) \text{ ist verzweigt}\big)^M \longleftrightarrow (P, \leq, 1_P)$ ist verzweigt.

(b) Für $p \in P$ sei $C_p :\equiv \{r \in P \mid r \leq p\}$ der **Kegel** unter p. $(P, \leq, 1_P)$ ist genau dann verzweigt, wenn zu jedem $p \in P$ Verstärkungen $q, r \in C_p$ existieren mit $C_q \cap C_r = \emptyset$.

27.2 Die Definition der generischen Erweiterung.

Die generische Erweiterung $M[G]$ von M mit G soll das $\subset$-kleinste $\in$-Modell von **ZFC** sein, das M umfaßt und G enthält. Um Kontrolle darüber zu haben, wie M und G die Eigenschaften von $M[G]$ steuern, ist es zweckmäßig, $M[G]$ *explizit* zu definieren. Dabei verfolgen wir die folgende Idee: die Elemente von $M[G]$ sollen – ähnlich wie die des Henkinschen Modells in der Mathematischen Logik – geeignete Interpretationen von Konstanten sein. Zu diesem Zweck erweitern wir die Sprache der Mengenlehre um neue Konstantensymbole, indem wir für jedes Element x von M ein Konstantensymbol $\dot{x}$ wählen. Die entstehende Sprache bezeichnen wir als **Forcing-Sprache**; $\dot{x}$ heißt **M-Name**. Wir identifizieren x mit $\dot{x}$. Nun definieren wir eine Interpretation $\dot{x}^G$ von $\dot{x}$, so daß

$$(\dot{y}, p) \in \dot{x} \wedge p \in G \longrightarrow \dot{y}^G \in \dot{x}^G$$

gilt. Um den Term $\dot{x}^G$ formal definieren und Eigenschaften dieses Termes beweisen zu können, benötigen wir folgendes Lemma:

27.8 Lemma *Definiere eine Relation R durch $yRx :\equiv y \in M \wedge x \in M \wedge y \in \operatorname{dom}(x)$. Dann gilt $\operatorname{SF}(M, R)$. Ferner folgt $\operatorname{rg}(y) < \operatorname{rg}(x)$, falls yRx.*

Beweis. $R \subset M \times M$ ist klar. Wegen

$$\{y \mid yRx\} = \begin{cases} \operatorname{dom}(x), & \text{falls } x \in M; \\ \emptyset, & \text{falls } x \notin M; \end{cases}$$

sind alle Klassen von Vorgängern Mengen. Gilt yRx, also $y \in \operatorname{dom}(x)$, so existiert ein p mit $(y, p) \in x$ und wir haben

(1) $y \in \{y\} \in (y, p) \in x$.

Jede absteigende R-Kette induziert also eine absteigende $\in$-Kette. Da es keine unendlich lange, absteigende $\in$-Kette gibt, gibt es also keine unendlich lange, absteigende R-Kette. Damit ist $\operatorname{SF}(M, R)$ verifiziert. Aus (1) folgt ferner $\operatorname{rg}(y) < \operatorname{rg}(\{y\}) < \operatorname{rg}((y, p)) < \operatorname{rg}(x)$. QED

Nun macht folgende Definition Sinn:

27.9 Definition Definiere durch R-Rekursion auf M für $\dot{x} \in M$ die **G-Interpretation $\dot{x}^G$ von $\dot{x}$** durch

$$\dot{x}^G :\equiv \{\dot{y}^G \mid \exists p \in G\ (\dot{y}, p) \in \dot{x}\}.$$

27.10 Definition $M[G] :\equiv \{\dot{x}^G \mid \dot{x} \in M\}$ heißt **generische Erweiterung von M durch P und G**.

27.3 Fundamentale Eigenschaften von $M[G]$.

27.11 Satz *$M[G]$ ist transitiv.*

Beweis. Sei $u \in v \in M[G]$. Dann ist $v = \dot{x}^G$ für ein $\dot{x} \in M$. Aus $u \in \dot{x}^G$ folgt nach Definition von $\dot{x}^G$ die Existenz eines $\dot{y} \in \mathrm{dom}(\dot{x}) \subset M$ mit $u = \dot{y}^G$. Folglich ist $u \in M[G]$. QED

27.12 Satz *Die Elemente von M werden durch G „nach unten" interpretiert: $\forall \dot{x} \in M\ \mathrm{rg}(\dot{x}^G) \leq \mathrm{rg}(\dot{x})$.*

Beweis. Wir führen eine R-Induktion durch.

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}\Big(\dot{x}^G\Big) &= \mathrm{rg}\Big(\big\{\dot{y}^G \bigm| \exists p \in G\ (\dot{y},p) \in \dot{x}\big\}\Big) = \mathrm{lub}\big\{\mathrm{rg}(\dot{y}^G) \bigm| \underbrace{\exists p \in G\ (\dot{y},p) \in \dot{x}}_{\Rightarrow \dot{y}R\dot{x}}\big\}\\ &\leq \mathrm{lub}\big\{\mathrm{rg}(\dot{y}) \bigm| \dot{y}R\dot{x}\big\} \quad \text{(Ind.Vor.)}\\ &< \mathrm{rg}(\dot{x}) \quad (\text{wegen } \dot{y}R\dot{x} \longrightarrow \mathrm{rg}(\dot{y}) < \mathrm{rg}(\dot{x})).\end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. QED

Um $M \subset M[G]$ zu zeigen, müssen wir zu jedem $x \in M$ einen M-Namen $\check{x}$ so zuordnen, daß die G-Interpretation von $\check{x}$ gerade x ist.

27.13 Definition Definiere durch $\in$-Rekursion: $\check{x} :\equiv \big\{(\check{y}, 1_P) \bigm| y \in x\big\}$. Für $x \in M$ heißt $\check{x}$ **kanonischer Name für** x.

27.14 Lemma *Der Term $\check{x}$ ist M-V-absolut. Insbesondere ist $\check{x}^M = \check{x} \in M$ für $x \in M$.*

Beweis. $\check{x}$ ist der kanonische Term, der durch $\in$-Rekursion auf V gemäß der Rekursionsvorschrift

$$H(x,f) :\equiv \begin{cases} \mathrm{ran}(f) \times \{1_P\}, & \text{falls } f\colon x \to V;\\ \emptyset, & \text{sonst;}\end{cases}$$

definiert ist. Nach 22.33 ist zum Nachweis der M-Absolutheit von $\check{x}$ zu zeigen

(1) $\big(H\colon V \times V \to V\big)^M$ und $\forall x, f \in M\ H^M(x,f) = H(x,f)$.

Beweis. Wegen **ZFC** $\vdash H\colon V \times V \to V$ und **ZFC**^{M} gilt $\big(H\colon V \times V \to V\big)^M$ nach dem Modell-Lemma 22.6. Wegen

$$\mathbf{ZFC} \vdash \big(f\colon x \to V \longrightarrow H(x,f) = \mathrm{ran}(f) \times \{1_P\}\big) \wedge \big(\neg\, f\colon x \to V \longrightarrow H(x,f) = \emptyset\big)$$

folgt nach dem Modell-Lemma und 22.25 für alle $x, f \in M$:

$$\big(f\colon x \to M \longrightarrow H^M(x,f) = \mathrm{ran}(f) \times \{1_P\}\big) \wedge \big(\neg\, f\colon x \to M \longrightarrow H^M(x,f) = \emptyset\big).$$

Also $H^M(x,f) = H(x,f)$. qed(1)

Damit ist das Lemma bewiesen. QED

27.15 Satz *Für $x \in M$ gilt $\check{x}^G = x$.*

Beweis. Wir führen eine $\in$-Induktion über $x \in M$ durch.

$$\begin{aligned}\check{x}^G &= \big\{\dot{y}^G \bigm| \exists p \in G\ (\dot{y},p) \in x\big\} = \big\{\dot{y}^G \bigm| (\dot{y}, 1_P) \in x\big\} = \big\{\check{y}^G \bigm| y \in x\big\} = \big\{y \bigm| y \in x\big\} \quad \text{(Ind.Vor.)}\\ &= x.\end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. QED

Aus 27.15 und 27.14 ergibt sich sofort:

27.16 Corollar $M \subset M[G]$.

M und $M[G]$ haben dieselbe ordinale Höhe:

27.17 Corollar $\mathrm{On}^M = \mathrm{On}^{M[G]}$. *M.a.W.*:[213] $M \cap \mathrm{On} = M[G] \cap \mathrm{On}$.

Beweis. Es genügt, die zweite Identität zu zeigen
zu ⊂". Dies folgt sofort aus $M \subset M[G]$.
zu „⊃". Sei $\alpha \in M[G] \cap \mathrm{On}$. Wähle ein $x \in M$ mit $\alpha = \dot{x}^G$. Da rg M-V-absolut ist, siehe 22.35, gilt $\mathrm{rg}(x) = \mathrm{rg}(x)^M \in M \cap \mathrm{On}$. Wegen 27.12 gilt $\alpha = \mathrm{rg}(\alpha) = \mathrm{rg}(\dot{x}^G) \in \mathrm{rg}(x)$. Da $M \cap \mathrm{On}$ als Schnitt transitiver Terme transitiv ist, folgt $\alpha \in M \cap \mathrm{On}$. QED

Um $G \in M[G]$ zu zeigen, benötigen wir einen Namen für den generischen Filter. Wir setzen:

27.18 Definition $\dot{G} :\equiv \big\{(\check{p}, p) \bigm| p \in P\big\}$ heißt **kanonischer Name für P-generische Filter über P.**

27.19 Lemma $\dot{G} \in M$.

Beweis. Sei $\varphi(p, y) :\equiv \exists x \big(x = \check{p} \wedge y = (x, p)\big)$. Da der Term $\check{p}$ (27.14) und die Formel $y = (x, p)$ (22.20) M-V-absolut sind, ist nach 22.31 die Formel $\varphi(p, y)$ ebenfalls M-V-absolut. Ferner verhält sich $\varphi(p, y)$ „funktional":

$$\forall p, y, y' \in M \ \big((\varphi(p, y) \wedge \varphi(p, y')) \longrightarrow y = y'\big).$$

Wegen $(\mathbf{Paar})^M$ folgt

$$\begin{aligned} \dot{G} &= \big\{y \bigm| \exists p \in P \ y = (\check{p}, p)\big\} = \big\{y \in M \bigm| \exists p \in P \ y = (\check{p}, p)\big\} = \big\{y \in M \bigm| \exists p \in P \ \varphi(p, y)\big\} \\ &= \big\{y \in M \bigm| \exists p \in P \ \varphi^M(p, y)\big\} \in M \quad (\text{wegen } (\mathbf{Ers})^M). \end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. QED

Nun können wir die Bezeichnung von $\dot{G}$ als „kanonischer Name für P-generische Filter über M" rechtfertigen.

27.20 Satz *Sei H ein P-generischer Filter über M. Dann gilt $\dot{G}^H = H$. Insbesondere ist $H \in M[H]$.*

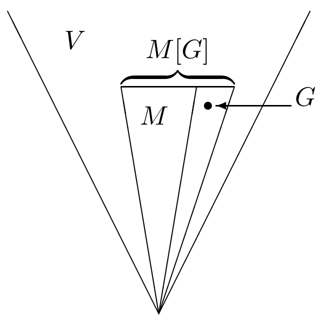
Beweis.

$$\begin{aligned} \dot{G}^H &= \big\{\dot{y}^H \bigm| \exists p \in H \ (\dot{y}, p) \in \dot{G}\big\} = \big\{\dot{y}^H \bigm| \exists p \in H \ ((\check{p}, p) \in \dot{G} \wedge \dot{y} = \check{p})\big\} \\ &= \big\{\dot{y}^H \bigm| \exists p \in H \ \dot{y} = \check{p}\big\} = \big\{\check{p}^H \bigm| p \in H\big\} = \big\{p \bigm| p \in H\big\} \quad (27.15) \\ &= H. \end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. QED

27.21 Corollar $G \in M[G]$. *Ist P verzweigt, so ist* $M \subsetneqq M[G]$.

Aus 27.11, 27.12, 27.16, 27.17 und 27.21 folgt: $M[G]$ eine (falls P verzweigt echte) Erweiterung von M, die G enthält und dieselbe ordinale Höhe wie M hat. $M[G]$ wächst „seitwärts" über M hinaus. In 29.12 werden wir sehen, daß $M[G]$ das $\subset$-kleinste transitive **ZFC**-Modell N ist, das $M \subset N$ und $G \in N$ erfüllt. Zunächst beginnen wir mit dem Nachweis von $\mathbf{ZFC}^{M[G]}$. einige einfache Axiome können wir bereits jetzt zeigen.



[213] siehe 22.24

27.22 Satz *Es gilt* $(\mathbf{Ex})^{M[G]}$, $(\mathbf{Ext})^{M[G]}$, $(\mathbf{Paar})^{M[G]}$, $(\mathbf{Inf})^{M[G]}$ *und* $(\mathbf{Fund})^{M[G]}$.

Beweis. Da $M[G]$ transitiv und nicht-leer ist, gelten $(\mathbf{Ex})^{M[G]}$, $(\mathbf{Ext})^{M[G]}$ und $(\mathbf{Fund})^{M[G]}$ nach 22.8. Wegen $\omega \in M \subset M[G]$ gilt $(\mathbf{Inf})^{M[G]}$. Um $(\mathbf{Paar})^{M[G]}$ zu zeigen fixiere $a, b \in M[G]$. Seien $x, y \in M$ mit $a = \dot{x}^G$ und $b = \dot{y}^G$. Setze $\dot{z} :\equiv \{(\dot{x}, 1_P), (\dot{y}, 1_P)\}$. Dann gilt $\dot{z}^G = \{\dot{x}^G, \dot{y}^G\} = \{a, b\}$. Also ist $\{a, b\} \in M[G]$, d.h., $(\mathbf{Paar})^{M[G]}$ nach 22.8. QED

Wir haben damit genug Informationen, um zeigen zu können, daß $\dot{x}^G$ $M[G]$-V-absolut ist, wenn man $\dot{x}$ aus M wählt. Genauer:

27.23 Lemma *Es gilt* $\left(\dot{x}^G\right)^{M[G]} = \dot{x}^G$ *für alle* $\dot{x} \in M$.

Beweis. Wir zeigen $\left(\dot{x}^G\right)^{M[G]} = \dot{x}^G$ durch R-Induktion. Es ist

$$\dot{x}^G = \left\{z \;\middle|\; \exists p \in G\, \exists \dot{y}\, ((\dot{y}, p) \in \dot{x} \wedge z = \dot{y}^G)\right\}.$$

Wegen $G \in M[G]$ ist $z \in \left(\dot{x}^G\right)^{M[G]}$ also gleichwertig mit

(1) $\quad z \in M[G] \wedge \exists p \in G\, \exists \dot{y} \in M[G]\, ((\dot{y}, p)^{M[G]} \in \dot{x} \wedge z = \left(\dot{y}^G\right)^{M[G]})$.

Wegen $(\mathbf{Paar})^{M[G]}$ gilt $(\dot{y}, p)^{M[G]} = (\dot{y}, p)$, siehe 22.24. (1) ist also gleichwertig mit

(2) $\quad z \in M[G] \wedge \exists p \in G\, \exists \dot{y} \in M[G]\, ((\dot{y}, p) \in \dot{x} \wedge z = \left(\dot{y}^G\right)^{M[G]})$.

Wegen $(\dot{y}, p) \in \dot{x} \in M \subset M[G]$ und der Transitivität von $M[G]$ kann hier die Beschränkung des Quantors $\exists \dot{y}$ auf $M[G]$ weggelassen werden. (2) ist also äquivalent zu

(3) $\quad z \in M[G] \wedge \exists p \in G\, \exists \dot{y}\, ((\dot{y}, p) \in \dot{x} \wedge z = \left(\dot{y}^G\right)^{M[G]})$.

Da $(\dot{y}, p) \in \dot{x} \in M$ impliziert $\dot{y} R \dot{x}$, gilt nach Induktionsvoraussetzung $\left(\dot{y}^G\right)^{M[G]} = \dot{y}^G$. Wegen $\dot{y}^G \in M[G]$ ist (3) dann gleichwertig mit

(4) $\quad \exists p \in G\, \exists \dot{y}\, ((\dot{y}, p) \in \dot{x} \wedge z = \dot{y}^G)$.

Dies ist gleichwertig mit $z \in \dot{x}^G$. Also $\left(\dot{x}^G\right)^{M[G]} = \dot{x}^G$. QED

27.24 Corollar *(a) Es gilt* $\left(\dot{x}_0^G = \dot{x}_1^G\right)^{M[G]} \longleftrightarrow \dot{x}_0^G = \dot{x}_1^G$ *und* $\left(\dot{x}_0^G \in \dot{x}_1^G\right)^{M[G]} \longleftrightarrow \dot{x}_0^G \in \dot{x}_1^G$ *für alle* $\dot{x}_0, \dot{x}_1 \in M$.

(b) Sei $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ *eine* $\in$*-Formel und seien* $\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1} \in M$. *Dann gilt* $\varphi^{M[G]}(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G) \longleftrightarrow \left(\varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G)\right)^{M[G]}$.

Beweis. zu (a). $\left(\dot{x}_0^G = \dot{x}_1^G\right)^{M[G]} \iff \left(\dot{x}_0^G\right)^{M[G]} = \left(\dot{x}_1^G\right)^{M[G]} \iff \dot{x}_0^G = \dot{x}_1^G$; analog ergibt sich die Aussage über $\dot{x}_0^G \in \dot{x}_1^G$.
zu (b). Dies folgt aus (a) durch eine Induktion über den Aufbau der $\in$-Formeln. QED

27.25 Corollar *Sei* $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ *eine* $M[G]$*-*V*-absolute* $\in$*-Formel und seien* $\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1} \in M$. *Dann gilt* $\left(\varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G)\right)^{M[G]} \longleftrightarrow \varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G)$.

Beweis. Da φ $M[G]$-V-absolut ist, gilt

$$\forall v_0 \in M[G] \ldots \forall v_{n-1} \in M[G]\ \left(\varphi^{M[G]}(v_0, \ldots, v_{n-1}) \longleftrightarrow \varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})\right);$$

setzt man hier $v_i :\equiv \dot{x}_i^G$, so folgt $\varphi^{M[G]}(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G) \longleftrightarrow \varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G)$. Mit 27.24(b) ergibt sich die Behauptung. QED

Um die weiteren **ZFC**-Axiome nachweisen zu können, müssen wir einen Begriff entwickeln, der es uns ermöglicht, genauere Aussagen über die Eigenschaften von $M[G]$ treffen zu können: die Forcing-Relation.

28 Forcing.

Sei M ein Grundmodell und $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung für M. Sei G ein beliebiger P-generischer Filter über M. Um Namen für komplizierte mathematische Objekte aus $M[G]$ angeben zu können, benötigen wir ein Verfahren, das es uns ermöglicht, die Eigenschaften von $M[G]$ aufgrund der Kenntnis von M und P kontrollieren zu können. Wollen wir etwa $(\mathbf{Aus})^{M[G]}$ beweisen, so ist für jedes $a \in M[G]$, $a = \dot{a}^G$ mit $\dot{a} \in M$, und jede $\in$-Formel φ zu zeigen, daß $b :\equiv \{x \in a \mid \varphi^{M[G]}(x)\} \in M[G]$ gilt. Ein erster Ansatz für die Wahl eines Namens $\dot{b}$ wäre

$$\dot{b} :\equiv \{(\dot{x}, p) \mid \dot{x} \in \mathrm{dom}(\dot{a}) \wedge \underbrace{p \in G \wedge M[G] \models \varphi(\dot{x}^G)}_{(*)}\}.$$

Dies ist jedoch nicht notwendig ein Element von M, da in $(*)$ der außerhalb von M lebende Parameter G vorkommt. Auf den Bezug zu G können wir verzichten, wenn wir uns nicht nur auf G sondern auf *alle* P-generischen Filter über M beziehen: wir ersetzen $(*)$ durch

$$(**) \quad \forall H \Big(\big(H \text{ ist } P\text{-generischer Filter über } M \wedge p \in H\big) \longrightarrow \varphi^{M[H]}(\dot{x}^H) \Big).$$

Wenn $(**)$ gilt, sagen wir, p erzwingt $\varphi(\dot{x})$ und schreiben $p \Vdash \varphi$. Der Name für b sieht damit wie folgt aus:

$$\dot{b} :\equiv \{(\dot{x}, p) \mid \dot{x} \in \mathrm{dom}(\dot{a}) \wedge p \Vdash \varphi(\dot{x})\}.$$

Wir haben noch ein weiteres Problem zu lösen: um m.H. von $(\mathbf{Ers})^M$ zu zeigen, daß diese Menge ein Element von M ist, müssen wir sicherstellen, daß ihre definierende Formel eine auf M relativierte $\in$-Formel ist, also

$$p \Vdash \varphi(\dot{x}) \iff \big(p \Vdash^* \varphi(\vec{x})\big)^M$$

für ein gewisses $\Vdash^*$ gilt. Wir werden sehen, daß dies der Fall ist. Damit haben wir die folgenden Aufgaben zu erledigen:

(1) Angabe einer formalen Definition von $p \Vdash \varphi$ für jedes $p \in P$ und jede Formel φ der Forcing-Sprache.

(2) Angabe einer Relation $\Vdash^*$, so daß für alle $p \in P$ und jede Formel φ der Forcing-Sprache gilt: $p \Vdash \varphi \iff \big(p \Vdash^* \varphi\big)^M$.

Wir fixieren ein Grundmodell M und eine Forcing-Halbordnung für M $(P, \leq, 1_P)$.[214]

28.1 Die Forcingrelation $\Vdash$.

28.1 Definition Sei $\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})$ eine Formel der Forcing-Sprache, d.h., $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ ist eine $\in$-Formel und $\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1} \in M$ sind M-Namen. Für $p \in P$ setzen wir

$$p \Vdash_P \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1}) :\equiv \forall G \Big(\big(G \text{ ist } P\text{-generischer Filter über } M \wedge p \in G\big) \longrightarrow \varphi^{M[G]}(\dot{x}_0^G \ldots, \dot{x}_{n-1}^G) \Big).$$

In diesem Fall sagen wir, p **erzwingt** $\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})$. Ist P aus dem Zusammenhang bekannt, so schreiben wir $\Vdash$ statt $\Vdash_P$.

28.2 Bemerkung Aus 27.24 folgt

$$p \Vdash_P \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1}) \longleftrightarrow \forall G \Big(\big(G \text{ ist } P\text{-generischer Filter über } M \wedge p \in G\big) \longrightarrow \big(\varphi(\dot{x}_0^G \ldots, \dot{x}_{n-1}^G)\big)^{M[G]} \Big).$$

Erzwingen vererbt sich von schwächeren auf stärkere Bedingungen:

[214] Unsere Darstellung in diesem Kapitel fußt auf [25].

28.3 Lemma *(a) Wenn $p \Vdash \varphi(\dot{x}_0,\dots,\dot{x}_{n-1})$ gilt, so gilt $q \Vdash \varphi(\dot{x}_0,\dots,\dot{x}_{n-1})$ für alle $q \leq p$.*
(b) Aus $p \Vdash \varphi(\dot{x}_0,\dots,\dot{x}_{m-1})$ und $p \Vdash \psi(\dot{y}_0,\dots,\dot{y}_{n-1})$ folgt $p \Vdash (\varphi(\dot{x}_0,\dots,\dot{x}_{m-1}) \wedge \psi(\dot{y}_0,\dots \dot{y}_{n-1}))$.
(c) Gilt $(\dot{x},p) \in \dot{y}$ mit $p \in P$, so gilt $p \Vdash \dot{x} \in \dot{y}$.

Beweis. zu (a). Sei $q \leq p$. Ist G ein P-generischer Filter über M mit $q \in G$, so ist $p \in G$ wegen des Abschlusses des Filters nach oben. Wegen $p \Vdash \varphi(\dot{x}_0,\dots,\dot{x}_{n-1})$ gilt $\varphi^{M[G]}(\dot{x}_0^G,\dots,\dot{x}_{n-1}^G)$. Also gilt $q \Vdash \varphi(\dot{x}_0,\dots,\dot{x}_{n-1})$.
zu (b). Ist G ein P-generischer Filter über M mit $p \in G$, so gilt unter den Voraussetzungen von (b) nach 28.2 $\big(\varphi(\dot{x}_0^G,\dots,\dot{x}_{m-1}^G)\big)^{M[G]}$ und $\big(\psi(\dot{y}_0^G,\dots,\dot{y}_{n-1}^G)\big)^{M[G]}$, d.h, $\big(\varphi(\dot{x}_0^G,\dots,\dot{x}_{m-1}^G) \wedge \psi(\dot{y}_0^G,\dots,\dot{y}_{n-1}^G)\big)^{M[G]}$. Nach 28.2 haben wir $p \Vdash (\varphi(\dot{x}_0,\dots,\dot{x}_{m-1}) \wedge \psi(\dot{y}_0,\dots \dot{y}_{n-1}))$ nachgewiesen.
zu (c). Ist G ein P-generischer Filter über M mit $p \in G$, so gilt unter den Voraussetzungen von (c) $\dot{x}^G \in \dot{y}^G$ nach Definition von $\dot{y}^G$. Dies ist nach 27.24 gleichwertig mit mit $\big(\dot{x}^G \in \dot{y}^G\big)^{M[G]}$. QED

28.2 Die Forcingrelation $\Vdash^*$.

Um $\Vdash^*$ zu definieren, benötigen wir die folgende Abschwächung des Begriffes der dichten Teilmenge von P. Da dieser und viele weitere Begriffe dieses Kapitels bereits dann Sinn machen, wenn $(P,\leq,1_P)$ eine Forcing-Halbordnung ist, **setzen wir in diesem Kapitel von nun an – sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird – nur voraus, daß** $(P,\leq,1_P)$ **eine Forcing-Halbordnung ist.**

28.4 Definition Sei $p \in P$ und $D \subset P$. D ist **dicht in** P **unter** p $:\equiv \forall q \leq p \, \exists r \leq q \; r \in D$.

Die Eigenschaft „D ist dicht in P unter p“ ist M-V-absolut:

28.5 Lemma *Sei $(P,\leq,1_P)$ eine Forcing-Halbordnung für M, $D \in M$ und $p \in P$. Dann gilt:*
$\big(D$ ist dicht in P unter $p\big)^M \longleftrightarrow D$ ist dicht in P unter p.

Beweis. Dies folgt wegen

$$D \text{ ist dicht in } P \text{ unter } p \iff \forall q \in P \, \exists r \in P \, \big((q,p) \in {\leq} \longrightarrow ((r,q) \in {\leq} \wedge r \in D)\big)$$

leicht m.H. der üblichen Absolutheitsargumente aus 22.24, dem Relativierungslemma 22.22 und 22.15. QED

Analog zu 27.5 beweist der Leser leicht:

28.6 Corollar *Sei $(P,\leq,1_P)$ eine Forcing-Halbordnung für M. Sei $\varphi(p,\vec{x})$ eine $\in$-Formel. Dann gilt für alle $\vec{x} \in M$ und $p \in P$:*

$$\Big(\big\{q \in P \;\big|\; \varphi(q,\vec{x})\big\} \text{ ist dicht in } P \text{ unter } p\Big)^M \longleftrightarrow \big\{q \in P \;\big|\; \varphi^M(q,\vec{x})\big\} \text{ ist dicht in } P \text{ unter } p,$$

wobei $\big\{q \in P \;\big|\; \varphi^M(q,\vec{x})\big\} \in M$ ist.

Unter bestimmten Voraussetzungen verhält sich eine unter p dichte Menge relativ zu einem generischen Filter wie eine dichte Menge:

28.7 Satz *Sei $(P,\leq,1_P)$ eine Forcing-Halbordnung für M, $D \in M$, $p \in P$ und D sei dicht in P unter p. Sei G ein P-generischer Filter über M mit $p \in G$. Dann existiert ein $q \in D \cap G$ mit $q \leq p$.*

Beweis. Sei $D' :\equiv \{r \in D \,|\, r \leq p\} \cup \{r \in P \,|\, r \perp p\}$. Es ist $D' \in M$: da $r \perp p$ M-V-absolut und $P \in M$ ist, gilt $\big\{r \;\big|\; r \in P \wedge r \perp p\big\} = \big\{r \in P \;\big|\; (r \perp p)^M\big\} \in M$ nach $(\mathbf{Aus})^M$. Wegen $(\mathbf{Aus})^M$ ist ferner $\{r \in D \,|\, r \leq p\} = \{r \in D \,|\, (r \leq p)^M\} \in M$. Schließlich ist M gegen Vereinigungen abgeschlossen wegen $(\bigcup\textbf{-Ax})^M$, vgl. 22.8.

(1) D' ist dicht in P.

Beweis. Sei $q \in P$ beliebig. Gilt $q \perp p$, so ist $q \in D'$ und wir sind fertig. Ist $q \parallel p$ so wähle ein $q' \leq q, p$. Da D dicht unter p ist, existiert ein $r \in D$ mit $r \leq q'$. Dann ist $r \leq q$ und $r \in D'$, also wie benötigt. qed(1)

Wegen (1) und $D' \in M$ existiert $r \in G \cap D'$. Dann kann nicht $r \perp p$ gelten, da die Elemente von G paarweise kompatibel sind. Also ist $r \in D$ und $r \leq p$. QED

Wir beginnen nun mit der recht umfangreichen Definition von $p \Vdash^* \varphi$. Wir definieren diese Relation für jede $\in$-Formel, indem wir eine Rekursion über den Aufbau von φ durchführen. Hierbei ist der atomare Fall der kompliziertestete. Wir behandeln zunächst den Fall, daß φ die Gleichheit ist:

28.8 Definition $p \Vdash^* x_1 = x_2 :\equiv$

$$(\alpha) \quad \forall (y_1, s_1) \in x_1 \Big(s_1 \in P \longrightarrow \underbrace{\big\{ q \in P \bigm| q \leq s_1 \to \exists (y_2, s_2) \in x_2 (s_2 \in P \wedge q \leq s_2 \wedge q \Vdash^* y_1 = y_2) \big\}}_{\equiv: D_{(\alpha)}(y_1, s_1, x_2)} \text{ ist dicht in } P \text{ unter } p \Big) \wedge$$

$$(\beta) \quad \forall (y_2, s_2) \in x_2 \Big(s_2 \in P \longrightarrow \underbrace{\big\{ q \in P \bigm| q \leq s_2 \to \exists (y_1, s_1) \in x_1 (s_1 \in P \wedge q \leq s_1 \wedge q \Vdash^* y_1 = y_2) \big\}}_{\equiv: D_{(\beta)}(x_1, y_2, s_2)} \text{ ist dicht in } P \text{ unter } p \Big).$$

28.9 Bemerkung Wie später deutlich werden wird, steht hier der α-Teil für die Beziehung $x_1^G \subset x_2^G$ und der β-Teil für die Beziehung $x_1^G \supset x_2^G$.

Diese Definition beinhaltet erneut eine Rekursion. Um diese zu präzisieren und zu rechtfertigen, zeigen wir:

28.10 Lemma *Definiere auf $A :\equiv P \times V \times V$ eine Relation R durch*

$$(q, y_1, y_2) R (p, x_1, x_2) :\equiv q \in P \wedge p \in P \wedge y_1 \in \operatorname{dom}(x_1) \wedge y_2 \in \operatorname{dom}(x_2).$$

Dann gilt $\mathrm{SF}(A, R)$. *Sei F der kanonische Term, der durch R-Rekursion auf A durch die Rekursionsvorschrift $H \colon A \times V \to 2$ bestimmt ist, wobei $H(x, f) \in 2$ für $(x, f) \in A \times V$ definiert ist durch $H(x, f) :\equiv 1$ genau dann, wenn*

$$\begin{aligned}
&\exists p, x_1, x_2 \Big(p \in P \wedge x = (p, x_1, x_2) \wedge f \colon P \times \operatorname{dom}(x_1) \times \operatorname{dom}(x_2) \to 2 \wedge \\
&\forall (y_1, s_1) \in x_1 \Big(s_1 \in P \longrightarrow \\
&\big\{ q \in P \bigm| q \leq s_1 \to \exists (y_2, s_2) \in x_2 (s_2 \in P \wedge q \leq s_2 \wedge f(q, y_1, y_2) = 1) \big\} \textit{ ist dicht in } P \textit{ unter } p \Big) \wedge \\
&\forall (y_2, s_2) \in x_2 \Big(s_2 \in P \longrightarrow \\
&\big\{ q \in P \bigm| q \leq s_2 \to \exists (y_1, s_1) \in x_1 (s_1 \in P \wedge q \leq s_1 \wedge f(q, y_1, y_2) = 1) \big\} \textit{ ist dicht in } P \textit{ unter } p \Big) \Big).
\end{aligned}$$

gilt. Ist $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung für M, so ist der Term $F(x)$ M-V-absolut.

Beweis. $\mathrm{SF}(A, R)$ beweist man analog zu 27.8.

Sei nun $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung für M. Um die Absolutheit des Termes $F(x)$ zu zeigen, ist nach 22.33 folgendes zu verifizieren:

(1) (a) $\big(\mathrm{SF}(A,R) \wedge H\colon A\times V\to 2\big)^M$.
(b) Die $\in$-Formeln $x\in A$ und yRx sind M-V-absolut.
(c) $\forall x\in A^M\,\forall f\in M\,\big(H(x,f)\big)^M = H(x,f)$.
(d) $\forall x\in M\,\forall y\,\big(yRx\longrightarrow y\in M\big)$.

BEWEIS. zu (a). Da wir unter der Voraussetzung **ZFC** gezeigt haben, daß $\mathrm{SF}(A,R)$ gilt, ferner unter ebendieser Voraussetzung auch $H\colon A\times V\to V$ gilt, folgt (a) sofort aus $\mathbf{ZFC}^M$. Insbesondere hat man $(H\colon(P\times V\times V)\times V\to 2)^M$, was nach 22.25 und 22.24 zu $H^M\colon(P\times M\times M)\times M\to 2$ gleichwertig ist.
zu (b). Mit den üblichen Absolutheitsargumenten folgt für $x,y\in M$:

$$\begin{aligned}\big(x\in A\big)^M &\iff \big(\exists p\in P\,\exists x_1,x_2\,x=(p,x_1,x_2)\big)^M \iff \exists p\in P\,\exists x_1,x_2\in M\ x=(p,x_1,x_2)^M\\ &\iff \exists p\in P\,\exists x_1,x_2\in M\ x=(p,x_1,x_2)\\ &\iff \exists p\in P\,\exists x_1,x_2\,x=(p,x_1,x_2)\quad (\text{da } (p,x_1,x_2)=x\in M\longrightarrow x_1,x_2\in M)\\ &\iff x\in A.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\big(yRx\big)^M &\iff \big(\exists p,q\in P\,\exists x_1,x_2,y_1,y_2\\ &\qquad (y=(q,y_1,y_2)\wedge x=(p,x_1,x_2)\wedge y_1\in\mathrm{dom}(x_1)\wedge y_2\in\mathrm{dom}(x_2))\big)^M\\ &\iff \exists p,q\in P\,\exists x_1,x_2,y_1,y_2\in M\\ &\qquad (y=(q,y_1,y_2)^M\wedge x=(p,x_1,x_2)^M\wedge y_1\in\mathrm{dom}(x_1)^M\wedge y_2\in\mathrm{dom}(x_2)^M)\\ &\iff \exists p,q\in P\,\exists x_1,x_2,y_1,y_2\in M\\ &\qquad (y=(q,y_1,y_2)\wedge x=(p,x_1,x_2)\wedge y_1\in\mathrm{dom}(x_1)\wedge y_2\in\mathrm{dom}(x_2))\\ &\iff \exists p,q\in P\,\exists x_1,x_2,y_1,y_2\\ &\qquad (y=(q,y_1,y_2)\wedge x=(p,x_1,x_2)\wedge y_1\in\mathrm{dom}(x_1)\wedge y_2\in\mathrm{dom}(x_2))\\ &\qquad (\text{beachte } x,y\in M)\\ &\iff yRx.\end{aligned}$$

zu (c). Es genügt, $\big(H(x,f)=1\big)^M \iff H(x,f)=1$ zu zeigen. Es gilt $\mathbf{ZFC}\vdash(H(x,f)=1\longleftrightarrow\varphi)$ mit

$$\begin{aligned}\varphi :\equiv \exists p,x_1,x_2\,\Big(&p\in P\wedge x=(p,x_1,x_2)\wedge f\colon P\times\mathrm{dom}(x_1)\times\mathrm{dom}(x_2)\to 2\ \wedge\\ &\forall y\in x_1\,\forall y_1\,\forall s_1\in P\,\Big(y=(y_1,s_1)\longrightarrow\\ &\big\{q\in P\,\big|\,(q,s_1)\in\leq\to\exists z\in x_2\exists s_2\in P(z=(y_2,s_2)\wedge(q,s_2)\in\leq\ \wedge f(q,y_1,y_2)=1)\big\}\\ &\text{ist dicht in } P \text{ unter } p\Big)\wedge\\ &\forall y\in x_2\,\forall y_2\,\forall s_2\in P\,\Big(y=(y_2,s_2)\longrightarrow\\ &\big\{q\in P\,\big|\,(q,s_2)\in\leq\to\exists z\in x_1\exists s_1\in P(z=(y_1,s_1)\wedge(q,s_1)\in\leq\ \wedge f(q,y_1,y_2)=1)\big\}\\ &\text{ist dicht in } P \text{ unter } p\Big)\Big).\end{aligned}$$

Nach dem Modell-Lemma gilt dann $\big(H(x,f)=1\big)^M\longleftrightarrow\varphi^M$. M.H. von 22.20, 22.25, 22.30, 28.6 und dem Relativierungslemma 22.22 zeigt man mit den üblichen Absolutheitsargumenten, daß φ M-V-absolut ist. Also gilt $\varphi^M\longleftrightarrow\varphi\,(\longleftrightarrow H(x,f)=1)$. Dies war zu zeigen.
zu (d). Sei $x\in M$ und $y\in V$ mit yRx. Dann existieren $p,q\in P$ und x_1,x_2,y_1,y_2 mit $x=(p,x_1,x_2)$ und $y=(q,y_1,y_2)$. Wegen $x\in M$ sind $x_1,x_2\in M$, also auch $\mathrm{dom}(x_1),\mathrm{dom}(x_2)\in M$. Wegen yRx gilt $y_1\in\mathrm{dom}(x_1)$ und $y_2\in\mathrm{dom}(x_2)$, so daß die Transitivität von M $y_1,y_2\in M$ impliziert. Aus $q,y_1,y_2\in M$ folgt $(q,y_1,y_2)\in M$ wegen $(\mathbf{Paar})^M$. Also ist $y\in M$. qed(1)

Damit ist das Lemma bewiesen. QED

Es folgt sofort der wichtige Satz:

28.11 Satz *(a) $p \Vdash^* x_1 = x_2$ ist wohldefiniert durch $p \Vdash^* x_1 = x_2 :\equiv F(p, x_1, x_2) = 1$, wobei F der kanonische Term aus 28.10 ist.*

(b) $p \Vdash^* x_1 = x_2 \longleftrightarrow p \Vdash^* x_2 = x_1$.

Ist $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung für M, so gilt weiter:

(c) Die Formel $p \Vdash^* x_1 = x_2$ ist M-V-absolut: $\big(p \Vdash^* x_1 = x_2\big)^M \iff p \Vdash^* x_1 = x_2$ für alle $x_1, x_2 \in M$, $p \in P$.

(d) Für $p \in P$, $x_1, x_2 \in M$ sind die in der Definition von $p \Vdash^* x_1 = x_2$ vorkommenden Klassen $D_{(\alpha)}(y_1, s_1, x_2)$ und $D_{(\beta)}(x_1, y_2, s_2)$ Elemente von M. Es gilt $D_{(\alpha)}(y_1, s_1, x_2)^M = D_{(\alpha)}(y_1, s_1, x_2)$ und $D_{(\beta)}(x_1, y_2, s_2)^M = D_{(\beta)}(x_1, y_2, s_2)$.

Beweis. zu (a). Aus der Definition von F folgt unmittelbar

$$F(p, x_1, x_2) = H\Big(x, \big(F(q, y_1, y_2) \mid q \in P \wedge y_1 \in \mathrm{dom}(x_1) \wedge y_2 \in \mathrm{dom}(x_2)\big)\Big).$$

Also bedeutet $F(p, x_1, x_2) = 1$ nach Definition von H gerade

$$\begin{aligned}
&\forall (y_1, s_1) \in x_1 \Big(s_1 \in P \longrightarrow \\
&\big\{q \in P \mid q \leq s_1 \to \exists (y_2, s_2) \in x_2 (s_2 \in P \wedge q \leq s_2 \wedge F(q, y_1, y_2) = 1)\big\} \text{ ist dicht in } P \text{ unter } p\Big) \wedge \\
&\forall (y_2, s_2) \in x_2 \Big(s_2 \in P \longrightarrow \\
&\big\{q \in P \mid q \leq s_2 \to \exists (y_1, s_1) \in x_1 (s_1 \in P \wedge q \leq s_1 \wedge F(q, y_1, y_2) = 1)\big\} \text{ ist dicht in } P \text{ unter } p\Big).
\end{aligned}$$

Ersetzen wir hier $F(q, y_1, y_2) = 1$ durch $p \Vdash^* y_1 = y_2$, so erhalten wir die Mengen $D_{(\alpha)}(y_1, s_1, x_2)$ bzw. $D_{(\beta)}(x_1, y_2, s_2)$ aus 28.8.

zu (b). Dies folgt leicht durch R-Induktion.

zu (c). Die Absolutheit des Termes $F(x)$ impliziert in Verbindung mit (a) offenbar die Absolutheit von $p \Vdash^* x_1 = x_2$.

zu (d). Es folgt mit Hilfe von (c) sofort, daß die definierenden Formeln dieser Klassen M-V-absolut sind, also durch ihre Relativierungen auf M ersetzt werden können. Also gilt $D_{(\alpha)}(y_1, s_1, x_2) = D_{(\alpha)}(y_1, s_1, x_2)^M$ und $D_{(\beta)}(x_1, y_2, s_2) = D_{(\beta)}(x_1, y_2, s_2)^M$. Wegen $(\mathbf{Aus})^M$ sind diese Klassen somit Elemente von M.

Damit ist der Satz bewiesen. QED

Nun führen wir unsere rekursive Definition von $p \Vdash^* \varphi$ fort.

28.12 Definition

(i) $p \Vdash^* x_1 \in x_2 :\equiv \big\{q \in P \mid \exists (y, s) \in x_2\ (s \in P \wedge q \leq s \wedge q \Vdash^* x_1 = y)\big\}$ ist dicht in P unter p;

(ii) $p \Vdash^* (\varphi(\vec{x}) \wedge \psi(\vec{x})) :\equiv \big(p \Vdash^* \varphi(\vec{x}) \wedge p \Vdash^* \psi(\vec{x})\big)$;

(iii) $p \Vdash^* \neg \varphi(\vec{x}) :\equiv \neg \exists\, q \leq p\ q \Vdash^* \varphi(\vec{x})$;

(iv) $p \Vdash^* \exists v\, \varphi(v, \vec{x}) :\equiv \big\{q \in P \mid \exists y\, q \Vdash^* \varphi(y, \vec{x})\big\}$ ist dicht in P unter p.

28.13 Bemerkung Mit Hilfe der oben angegebenen Definition läßt sich für jede $\in$-Formel φ und jedes $p \in P$ in endlich vielen Schritten entscheiden, ob $p \Vdash^* \varphi$ gilt oder nicht.

Aus der Absolutheit von $p \Vdash^* x_1 = x_2$ folgt:

28.14 Lemma *Sei $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung für M. Seien $x_1, x_2 \in M$, $p \in P$. Dann gilt $\big(p \Vdash^* x_1 \in x_2\big)^M \longleftrightarrow p \Vdash^* x_1 \in x_2$. Die in der Definition von $p \Vdash^* x_1 \in x_2$ vorkommende Klasse ist ein Element von M.*

28.15 Bemerkung Während die Forcing-Relation $\Vdash$ zur Analyse von Modellen korrespondiert, entspricht $\Vdash^*$ eher der Berechnung in einem Kalkül: durch Zurückführen auf den atomaren Fall kann man berechnen, ob $p \Vdash^* \varphi$ gilt oder nicht. Somit ist $\Vdash$ eher verbunden mit der Relation $\models$ der Mathematischen Logik wohingegen $\Vdash^*$ eher mit der Relation $\vdash$ vergleichbar ist. Man bezeichnet deshalb die Relation $\Vdash$ auch als **semantisches Forcing** und die Relation $\Vdash^*$ als **syntaktisches Forcing**.

Wir leiten einige Eigenschaften von $\Vdash^*$ her. Dabei benötigen wir folgendes Lemma:

28.16 Lemma *Sei $p \in P$ und $D \subset P$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *D ist dicht in P unter p;*

(ii) *$\forall r \leq p$ (D ist dicht in P unter r);*

(iii) *$D' :\equiv \big\{r \in P \;\big|\; D$ ist dicht in P unter $r\big\}$ ist dicht in P unter p.*

Beweis. „(i)⇒(ii)“. Dies folgt leicht aus der Transitivität von $\leq$.

„(ii)⇒(iii)“. Dies folgt sofort aus (ii), da jedes $r \leq p$ in D' liegt.

„(iii)⇒(i)“. Sei $q \leq p$ beliebig. Da D' dicht in P unter p ist, existiert ein $r \leq q$ mit $r \in D'$. Letzteres impliziert die Existenz eines $r' \leq r$ mit $r' \in D$. Aus der Transitivität von $\leq$ folgt $r' \leq p$. r' ist also wie benötigt. QED

28.17 Satz *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $p \Vdash^* \varphi(\vec{x})$;

(ii) $\forall r \leq p\; r \Vdash^* \varphi(\vec{x})$;

(iii) $\big\{r \in P \;\big|\; r \Vdash^* \varphi(\vec{x})\big\}$ *ist dicht in P unter p.*

Beweis. Wir führen eine Induktion über den Aufbau von φ durch.

Fall 1. $\varphi \equiv x_1 = x_2$. Unter Verwendung von 28.16 folgt:

„(i)⇒(ii)“.

$$\begin{aligned}
p \Vdash^* x_1 = x_2 \iff\ & \forall (y_1, s_1) \in x_1 \big(s_1 \in P \to D_{(\alpha)}(y_1, s_1, x_2) \text{ ist dicht in } P \text{ unter } p\big) \wedge \\
& \forall (y_2, s_2) \in x_2 \big(s_2 \in P \to D_{(\beta)}(x_1, y_2, s_2) \text{ ist dicht in } P \text{ unter } p\big) \\
\iff\ & \forall (y_1, s_1) \in x_1 \big(s_1 \in P \to \forall r \leq p\ (D_{(\alpha)}(y_1, s_1, x_2) \text{ ist dicht in } P \text{ unter } r)\big) \wedge \\
& \forall (y_2, s_2) \in x_2 \big(s_2 \in P \to \forall r \leq p\ (D_{(\beta)}(x_1, y_2, s_2) \text{ ist dicht in } P \text{ unter } r\big) \\
\implies\ & \forall r \leq p \\
& \Big(\forall (y_1, s_1) \in x_1 \big(s_1 \in P \to D_{(\alpha)}(y_1, s_1, x_2) \text{ ist dicht in } P \text{ unter } r\big) \wedge \\
& \forall (y_2, s_2) \in x_2 \big(s_2 \in P \to D_{(\beta)}(x_1, y_2, s_2) \text{ ist dicht in } P \text{ unter } r\big)\Big) \\
\implies\ & \forall r \leq p\ r \Vdash^* x_1 = x_2.
\end{aligned}$$

„(ii)⇒(iii)“. trivial.

„(iii)⇒(i)“. Sei $\big\{r \in P \;\big|\; r \Vdash^* x_1 = x_2\big\}$ dicht in P unter p. Sei $(y_1, s_1) \in x_1$ mit $s_1 \in P$. Dann gilt nach Definition von $r \Vdash^* x_1 = x_2$:

$$\big\{r \in P \;\big|\; D_{(\alpha)}(y_1, s_1, x_2) \text{ ist dicht in } P \text{ unter } r\big\} \supset \big\{r \in P \;\big|\; r \Vdash^* x_1 = x_2\big\}.$$

Da Obermengen von unter p dichten Mengen offenbar wieder dicht unter p sind, folgt, daß die links stehende Menge dicht unter p ist. Nach 28.16 ist dann $D_{(\alpha)}(y_1, s_1, x_2)$ dicht unter p. Also gilt (α) aus 28.8. Analog sieht man, daß auch (β) erfüllt ist.

Fall 2. $\varphi \equiv x_1 \in x_2$. Diesen Fall behandelt man analog zu Fall 1.
Fall 3. $\varphi(\vec{x}) \equiv (\psi(\vec{x}) \wedge \chi(\vec{x}))$.
„(i)⇒(ii)“.

$$\begin{aligned} p \Vdash^* \varphi(\vec{x}) &\iff p \Vdash^* \psi(\vec{x}) \wedge p \Vdash^* \chi(\vec{x}) \\ &\implies \forall r \leq p \left(r \Vdash^* \psi(\vec{x}) \wedge r \Vdash^* \chi(\vec{x})\right) \quad \text{(nach Ind.Vor.)} \\ &\iff \forall r \leq p\, r \Vdash^* \left(\psi(\vec{x}) \wedge \chi(\vec{x})\right). \end{aligned}$$

„(ii)⇒(iii)“. trivial.
„(iii)⇒(i)“. Da Obermengen dichter Mengen dichte Mengen sind, folgt:

$$\begin{aligned} \left\{r \in P \;\middle|\; r \Vdash^* \varphi(\vec{x})\right\} \text{ ist dicht unter } p &\iff \left\{r \in P \;\middle|\; r \Vdash^* \psi(\vec{x}) \wedge r \Vdash^* \chi(\vec{x})\right\} \text{ ist dicht unter } p \\ &\implies \left\{r \in P \;\middle|\; r \Vdash^* \psi(\vec{x})\right\} \text{ ist dicht unter } p \wedge \\ &\qquad \left\{r \in P \;\middle|\; r \Vdash^* \chi(\vec{x})\right\} \text{ ist dicht unter } p \\ &\iff p \Vdash^* \psi(\vec{x}) \wedge p \Vdash^* \chi(\vec{x}) \quad \text{(Ind.Vor.)} \\ &\iff p \Vdash^* \varphi(\vec{x}). \end{aligned}$$

Fall 4. $\varphi \equiv \neg\,\psi(\vec{x})$.
„(i)⇒(ii)“.

$$\begin{aligned} p \Vdash^* \varphi(\vec{x}) &\iff \neg\,\exists q \leq p\, q \Vdash^* \psi(\vec{x}) \iff \forall q \leq p\, \neg\, q \Vdash^* \psi(\vec{x}) \\ &\iff \forall r \leq p \forall q \leq r\, \neg\, q \Vdash^* \psi(\vec{x}) \quad \text{(da } \leq \text{ transitiv ist)} \\ &\iff \forall r \leq p\, \neg\,\exists q \leq r\, q \Vdash^* \psi(\vec{x}) \iff \forall r \leq p\, r \Vdash^* \varphi(\vec{x}). \end{aligned}$$

„(ii)⇒(iii)“. trivial.
„(iii)⇒(i)“. Sei $\left\{r \in P \;\middle|\; r \Vdash^* \varphi(\vec{x})\right\} = \left\{r \in P \;\middle|\; \neg\,\exists q \leq r\, q \Vdash^* \psi(\vec{x})\right\}$ dicht in P unter p.

(1) $\quad \neg\,\exists q \leq p\, q \Vdash^* \psi(\vec{x})$.

Beweis. Angenommen, dies gilt nicht. Dann existiert ein $q \leq p$ mit $q \Vdash^* \psi$. Nach Induktionsvoraussetzung für ψ gilt dann

$(*)$ $\quad \forall r \leq q\, r \Vdash^* \psi$.

Wegen der Dichtheit von $\left\{r \in P \;\middle|\; \neg\,\exists q' \leq r\, q' \Vdash^* \psi(\vec{x})\right\}$ und $q \leq p$ existiert andererseits ein $r \leq q$ mit $\neg\,\exists q' \leq r\, q' \Vdash^* \psi$. Insbesondere gilt also $\neg\, r \Vdash^* \psi$, was $(*)$ widerspricht. Also muß (1) doch richtig sein. qed(1)

Da (1) gleichwertig ist mit $p \Vdash^* \varphi(\vec{x})$, ist (i) bewiesen.
Fall 5. $\varphi(\vec{x}) \equiv \exists v \psi(v, \vec{x})$. Diesen Fall behandelt man analog zu Fall 1. QED

Es folgt sofort:

28.18 Corollar *Es gelte $p \Vdash^* \varphi(\vec{x})$.*
(a) Ist $q \leq p$, so gilt $q \Vdash^* \varphi(\vec{x})$.
(b) Gilt $q \Vdash^* \neg\varphi(\vec{x})$, so sind p und q inkompatibel.

In Hinblick auf unser angestrebtes Resultat $p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1}) \iff \left(p \Vdash^* \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\right)^M$ notieren wir:

28.19 Corollar *Sei $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung für M. Ist $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ eine $\in$-Formel und sind $\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1} \in M$, so sind äquivalent:*
(i) $\left(p \Vdash^* \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\right)^M$;

(ii) $\forall r \leq p \left(r \Vdash^* \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\right)^M$;

(iii) $\left\{r \in P \mid \left(r \Vdash^* \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\right)^M\right\}$ *ist dicht in* P *unter* p.

Beweis. Da unter **ZFC** die Aussagen (i) – (iii) von 28.17 äquivalent sind und $\mathbf{ZFC}^M$ gilt, sind diese Aussagen äquivalent, wenn man sie auf M relativiert und nur Parameter aus M zuläßt. M.H. von 28.6 sieht man leicht, daß die im Corollar angegebenen Aussagen gerade diese relativierten Aussagen des Satzes sind. QED

28.20 Lemma *Sei* $(P, \leq, 1_P)$ *eine Forcing-Halbordnung für* M. *Sei* $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ *eine* $\in$*-Formel und es seien* $\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1} \in M$. *Dann ist die Menge*

$$D_{\varphi(\dot{x}_0,\ldots,\dot{x}_{n-1})} :\equiv \left\{p \in P \mid \left(p \Vdash^* \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\right)^M \vee \left(p \Vdash^* \neg\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\right)^M\right\}$$

ein Element von M *und dicht in* P.

Beweis. $D \in M$ folgt wegen $P \in M$ sofort aus $(\mathbf{Aus})^M$. Sei nun $p \in P$. Gilt $\left(p \Vdash^* \neg\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\right)^M$, so sind wir fertig. Gilt dies nicht, so gilt

$$\Big(\neg \underbrace{p \Vdash^* \neg\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})}_{\leftrightarrow \neg \exists q \leq p \; q \Vdash^* \varphi(\dot{x}_0,\ldots,\dot{x}_{n-1})}\Big)^M,$$

also $\left(\exists q \leq p \; q \Vdash^* \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\right)^M$, was, wie man leicht sieht, zu $\exists q \leq p \left(q \Vdash^* \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\right)^M$ äquivalent ist. Dies war gerade zu zeigen. QED

28.3 Das Forcing-Theorem.

Der erste Schritt zur Nachweis der Äquivalenz $p \vdash \varphi \iff (p \Vdash^* \varphi)^M$ ist:

28.21 Satz *Sei* M *ein Grundmodell,* $(P, \leq, 1_P)$ *eine Forcing-Halbordnung für* M *und* G *ein* P*-generischer Filter über* M. *Dann gilt für alle* $\dot{x}_1, \dot{x}_2 \in M$:
(a) Ist $p \in G$ *mit* $p \Vdash^* \dot{x}_1 = \dot{x}_2$, *so gilt* $\dot{x}_1^G = \dot{x}_2^G$.
(b) Gilt $\dot{x}_1^G = \dot{x}_2^G$, *so existiert ein* $p \in G$ *mit* $p \Vdash^* \dot{x}_1 = \dot{x}_2$.

Beweis. zu (a). Wir machen eine R-Induktion.[215] Seien also $p \in G$ und $\dot{x}_1, \dot{x}_2 \in M$ mit $p \Vdash^* \dot{x}_1 = \dot{x}_2$. Für alle $(q, \dot{y}_1, \dot{y}_2) R (p, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$ gelte $(q \in G \wedge q \Vdash^* \dot{y}_1 = \dot{y}_2) \longrightarrow \dot{y}_1^G = \dot{y}_2^G$. Aus Symmetriegründen genügt es, $\dot{x}_1^G \subset \dot{x}_2^G$ zu zeigen. Hierzu fixiere $z \in \dot{x}_1^G = \left\{\dot{y}_1^G \mid \exists s_1 \in G \; (\dot{y}_1, s_1) \in \dot{x}_1\right\}$. Wähle $\dot{y}_1 \in \mathrm{dom}(\dot{x}_1)$ und ein $s_1 \in G$, so daß $(\dot{y}_1, s_1) \in \dot{x}_1$ und $z = \dot{y}_1^G$ ist. Nach Definition von $p \Vdash^* \dot{x}_1 = \dot{x}_2$ ist

$$D_{(\alpha)}(\dot{y}_1, s_1, \dot{x}_2) = \left\{q \in P \mid q \leq s_1 \rightarrow \exists (\dot{y}_2, s_2) \in \dot{x}_2 (s_2 \in P \wedge q \leq s_2 \wedge q \Vdash^* \dot{y}_1 = \dot{y}_2)\right\}$$

dicht in P unter p.

(1) $\quad \exists q \in D_{(\alpha)}(\dot{y}_1, s_1, \dot{x}_2) \cap G \;\; q \leq s_1$.

Beweis. Sei $r \in G$ mit $r \leq p, s_1$. Da $D_{(\alpha)}(\dot{y}_1, s_1, \dot{x}_2)$ dicht unter p ist, ist $D_{(\alpha)}(\dot{y}_1, s_1, \dot{x}_2)$ auch dicht unter r. Da nach 28.11 $D_{(\alpha)}(\dot{y}_1, s_1, \dot{x}_2) \in M$ gilt und $r \in G$ ist, existiert nach 28.7 ein $q \in D_{(\alpha)}(\dot{y}_1, s_1, \dot{x}_2) \cap G$ mit $q \leq r$. Wegen $r \leq s_1$ ist q wie benötigt. qed(1)

Sei nun q wie in (1). Wegen $q \in D_{(\alpha)}(\dot{y}_1, s_1, \dot{x}_2)$ und $q \leq s_1$ existiert nach Definition von $D_{(\alpha)}(\dot{y}_1, s_1, \dot{x}_2)$ ein $(\dot{y}_2, s_2) \in \dot{x}_2$ mit $s_2 \in P$, $q \leq s_2$ und $q \Vdash^* \dot{y}_1 = \dot{y}_2$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\dot{y}_1^G = \dot{y}_2^G$. Wegen $q \leq s_2$ und $q \in G$ ist $s_2 \in G$. Aus $(\dot{y}_2, s_2) \in \dot{x}_2$ folgt also $\dot{y}_2^G \in \dot{x}_2^G$ nach Definition von $\dot{x}_2^G$. Insgesamt ergibt sich $z = \dot{y}_1^G \in \dot{x}_2^G$ und dies war zu zeigen.

[215] vgl. 28.10.

zu (b). Wir führen wieder eine R-Induktion durch. Seien also $\dot{x}_1, \dot{x}_2 \in M$ und $s \in P$ und für alle $(q, \dot{y}_1, \dot{y}_2) R(s, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$ gelte $\dot{y}_1^G = \dot{y}_2^G \longrightarrow \exists p \in G\; p \Vdash^* \dot{y}_1 = \dot{y}_2$. Es gelte $\dot{x}_1^G = \dot{x}_2^G$. Setze

$$
\begin{aligned}
D :\equiv \Big\{ p \in P \;\Big|\; & \;p \Vdash^* \dot{x}_1 = \dot{x}_2 \\
& \vee\; \exists (\dot{y}_1, s_1) \in \dot{x}_1 \Big(s_1 \in P \,\wedge\, \forall q \leq p && (\neg\alpha) \\
& \quad \big(q \leq s_1 \,\wedge\, \forall (\dot{y}_2, s_2) \in \dot{x}_2 \big((s_2 \in P \,\wedge\, q \Vdash^* \dot{y}_1 = \dot{y}_2) \to \neg\, q \leq s_2 \big) \big) \Big) \\
& \vee\; \exists (\dot{y}_2, s_2) \in \dot{x}_2 \Big(s_2 \in P \,\wedge\, \forall q \leq p && (\neg\beta) \\
& \quad \big(q \leq s_2 \,\wedge\, \forall (\dot{y}_1, s_1) \in \dot{x}_1 \big((s_1 \in P \,\wedge\, q \Vdash^* \dot{y}_1 = \dot{y}_2) \to \neg\, q \leq s_1 \big) \big) \Big) \Big\}.
\end{aligned}
$$

Mit ähnlichen Argumenten, die auf $D_{(\alpha)}(\dot{y}_1, s_1, \dot{x}_2) \in M$ und $D_{(\beta)}(\dot{x}_1, \dot{y}_2, s_2) \in M$ geführt haben und die M-V-Absolutheit der Formel $r \Vdash^* \dot{z}_1 = \dot{z}_2$ ausnutzen, zeigt man leicht:

(2) $\quad D \in M$.

Wir zeigen:

(3) $\quad D$ ist dicht in P.

Beweis. Sei $r \in P$. Gilt dann $r \Vdash^* \dot{x}_1 = \dot{x}_2$, so ist $r \in D$ und wir sind fertig. Gelte also $\neg\, r \Vdash^* \dot{x}_1 = \dot{x}_2$. Dann ist eine der Bedingungen (α) bzw. (β) aus der Definition von $r \Vdash^* \dot{x}_1 = \dot{x}_2$ nicht erfüllt. O.E. sei (α) nicht erfüllt, d.h.,

$$
\begin{aligned}
& \exists (\dot{y}_1, s_1) \in \dot{x}_1 \Big(s_1 \in P \,\wedge \\
& \underbrace{\big\{ q \in P \;\big|\; q \leq s_1 \to \exists (\dot{y}_2, s_2) \in \dot{x}_2 (s_2 \in P \,\wedge\, q \leq s_2 \,\wedge\, q \Vdash^* \dot{y}_1 = \dot{y}_2) \big\}}_{= D_{(\alpha)}(\dot{y}_1, s_1, \dot{x}_2)} \text{ ist } \textbf{nicht} \text{ dicht in } P \text{ unter } r \Big).
\end{aligned}
$$

Da eine Menge C genau dann nicht dicht unter r ist, wenn es ein $p \leq r$ gibt, so daß für alle $q \leq p$ gilt $q \notin C$, ist die letzte Formel gleichwertig zu

$$\exists (\dot{y}_1, s_1) \in \dot{x}_1 \big(s_1 \in P \,\wedge\, \exists p \leq r\, \forall q \leq p\; q \notin D_{(\alpha)}(\dot{y}_1, s_1, \dot{x}_2) \big).$$

Wähle dementsprechend $p \leq r$ mit $\exists (\dot{y}_1, s_1) \in \dot{x}_1 \big(s_1 \in P \,\wedge\, \forall q \leq p\; q \notin D_{(\alpha)}(\dot{y}_1, s_1, \dot{x}_2) \big)$. Es ist leicht zu sehen daß $q \notin D_{(\alpha)}(\dot{y}_1, s_1, \dot{x}_2)$ gleichwertig ist mit $q \leq s_1 \,\wedge\, \forall (\dot{y}_2, s_2) \in \dot{x}_2 \big((s_2 \in P \,\wedge\, q \Vdash^* \dot{y}_1 = \dot{y}_2) \to \neg\, q \leq s_2 \big)$. Also gilt $(\neg\alpha)$ für p und somit $p \in D$. Wegen $p \leq r$ ist p wie benötigt. qed(3)

Da G P-generisch über M ist, existiert wegen (2) und (3) ein $p \in G \cap D$. Der Satz ist bewiesen, wenn wir gezeigt haben:

(4) $\quad p \Vdash^* \dot{x}_1 = \dot{x}_2$.

Beweis. Wenn dies nicht gilt, gilt $(\neg\alpha)$ oder $(\neg\beta)$ wegen $p \in D$. Aus Symmetriegründen können wir o.E. annehmen, daß $(\neg\alpha)$ für p erfüllt ist. Wähle $(\dot{y}_1, s_1) \in \dot{x}_1$ mit $s_1 \in P$ wie in $(\neg\alpha)$. Setzt man in $(\neg\alpha)$ $q :\equiv p$, so folgt $p \leq s_1$, so daß

(4.1) $\quad s_1 \in G$

wegen $p \in G$ folgt. Nach Definition von $\dot{x}_1^G$ ist dann $\dot{y}_1^G \in \dot{x}_1^G$, also $\dot{y}_1^G \in \dot{x}_2^G = \{ \dot{y}_2^G \mid \exists s_2 \in G\; (\dot{y}_2, s_2) \in \dot{x}_2 \}$ wegen $\dot{x}_1^G = \dot{x}_2^G$. Wähle ein $(\dot{y}_2, s_2) \in \dot{x}_2$ mit

(4.2) $\quad s_2 \in G$ und $\dot{y}_1^G = \dot{y}_2^G$.

Dann gilt $(s_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2) R(s, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$, so daß $\dot{y}_1^G = \dot{y}_2^G$ nach Induktionsvoraussetzung die Existenz eines

(4.3) $\quad q' \in G$

impliziert, so daß

(4.4) $\quad q' \Vdash^* \dot{y}_1 = \dot{y}_2$

gilt. Wähle $q \in G$ mit $q \leq p, s_1, s_2, q'$. (Beachte: nach (4.1) – (4.4) gilt $s_1, s_2, q' \in G$; nach Wahl von p ist $p \in G$.) Wegen $q \leq q'$ und (4.4) folgt $q \Vdash^* \dot{y}_1 = \dot{y}_2$, so daß für q gilt

$$q \leq p \wedge q \leq s_1 \wedge (\dot{y}_2, s_2) \in \dot{x}_2 \wedge s_2 \in P \wedge q \Vdash^* \dot{y}_1 = \dot{y}_2 \wedge q \leq s_2.$$

Dies widerspricht $(\neg\alpha)$. Also muß (4) doch richtig sein. qed(4)

Damit ist der Satz bewiesen. QED

28.22 Satz *Sei M ein Grundmodell, $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung für M und G ein P-generischer Filter über M. Sei $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ eine $\in$-Formel und seien $\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1} \in M$. Dann gilt:*

(a) Ist $p \in G$ mit $\big(p \Vdash^* \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\big)^M$, so gilt $\big(\varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G)\big)^{M[G]}$.

(b) Gilt $\big(\varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G)\big)^{M[G]}$, so existiert ein $p \in G$ mit $\big(p \Vdash^* \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\big)^M$.

Beweis. Wir führen eine Induktion über den Formelaufbau durch.
Fall 1. $\varphi \equiv v_0 = v_1$.
zu (a). Sei $p \in G$ mit $\big(p \Vdash^* \dot{x}_0 = \dot{x}_1\big)^M$. Da $p \Vdash^* v_0 = v_1$ eine M-V-absolute Formel ist, kann man hier die Relativierung auf M ignorieren und erhält dann nach Teil (a) des letzten Satzes $\dot{x}_0^G = \dot{x}_1^G$. Nach 27.24 ist dies gleichwertig mit $\big(\dot{x}_0^G = \dot{x}_1^G\big)^{M[G]}$.
zu (b). Dies folgt analog unter Verwendung von Teil (b) des letzten Satzes.
Fall 2. $\varphi \equiv v_0 \in v_1$.
zu (a). Sei $p \in G$ und $\big(p \Vdash^* \dot{x}_0 \in \dot{x}_1\big)^M$. Nach 28.14 gilt dann $p \Vdash^* \dot{x}_0 \in \dot{x}_1$ und die in der Definition von $p \Vdash^* \dot{x}_0 \in \dot{x}_1$ vorkommende unter p dichte Menge

$$D :\equiv \big\{q \in P \;\big|\; \exists (\dot{y}, s) \in \dot{x}_1\, (s \in P \wedge q \leq s \wedge q \Vdash^* \dot{y} = \dot{x}_0)\big\}$$

ist ein Element von M. Da G P-generisch über M ist und $p \in G$ gilt, existiert nach 28.7 ein $q \in D \cap G$ mit $q \leq p$. Wähle $(\dot{y}, s) \in \dot{x}_1$, so daß

(1) $\quad q \leq s$ und $q \Vdash^* \dot{y} = \dot{x}_0$

gilt. Wegen $q \in G$ ist dann $s \in G$ und somit $\dot{y}^G \in \dot{x}_1^G$. Des weiteren impliziert die zweite Aussage von (1) nach Induktionsvoraussetzung, daß $\dot{y}^G = \dot{x}_0^G$ ist, so daß wir insgesamt $\dot{x}_0^G \in \dot{x}_1^G$ nachgewiesen haben. Nach 27.24 ist dies mit $\big(\dot{x}_0^G \in \dot{x}_1^G\big)^{M[G]}$ gleichwertig.
zu(b). Gelte $\big(\dot{x}_0^G \in \dot{x}_1^G\big)^{M[G]}$, also $\dot{x}_0^G \in \dot{x}_1^G$. Nach Definition von $\dot{x}_1^G$ existiert ein $(\dot{y}, s) \in \dot{x}_1$ mit $s \in G$, so daß

$$\dot{x}_0^G = \dot{y}^G$$

gilt. Nach Teil (b) des letzten Satzes existiert ein $r \in G$ mit $r \Vdash^* \dot{x}_0 = \dot{y}$. Wähle $p \in G$ mit $p \leq r, s$. Dann gilt

(2) $\quad \forall q \leq p\; q \Vdash^* \dot{x}_0 = \dot{y}$,

denn $q \leq p$ impliziert $q \leq r$, so daß $q \Vdash^* \dot{x}_0 = \dot{y}$ nach 28.18 aus $r \Vdash^* \dot{x}_0 = \dot{y}$ folgt. Nach 28.17 folgt aus (2), daß $\big\{q \in P \;\big|\; q \Vdash^* \dot{x}_0 = \dot{y}\big\}$ dicht in P unter p ist. Wegen $p \leq s$ folgt hieraus

$$\big\{q \in P \;\big|\; q \leq s \wedge q \Vdash^* \dot{x}_0 = \dot{y}\big\} \text{ ist dicht in } P \text{ unter } p.$$

Da Obermengen von unter p dichten Mengen wieder dicht unter p sind, impliziert dies

$$\big\{q \in P \;\big|\; \exists (\dot{y}, s) \in \dot{x}_0\, (s \in P \wedge q \leq s \wedge q \Vdash^* \dot{x}_0 = \dot{y})\big\} \text{ ist dicht in } P \text{ unter } p,$$

was $p \Vdash^* \dot{x}_0 \in \dot{x}_1$ impliziert. Hieraus folgt $\big(p \Vdash^* \dot{x}_0 \in \dot{x}_1\big)^M$ wegen der M-V-Absolutheit der Formel $p \Vdash^* \dot{x}_0 \in \dot{x}_1$. Damit ist Fall 2 abgeschlossen.

Fall 3. $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$.

zu (a). Sei $p \in G$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\big(p \Vdash^* \varphi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})\big)^M &\iff \big(p \Vdash^* \psi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1}) \wedge p \Vdash^* \chi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})\big)^M \\
&\iff \big(p \Vdash^* \psi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})\big)^M \wedge \big(p \Vdash^* \chi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})\big)^M \\
&\implies \big(\psi(\dot{x}_0^G, \dots, \dot{x}_{n-1}^G)\big)^{M[G]} \wedge \big(\chi(\dot{x}_0^G, \dots, \dot{x}_{n-1}^G)\big)^{M[G]} \quad \text{(Ind.Vor.)} \\
&\iff \big(\psi(\dot{x}_0^G, \dots, \dot{x}_{n-1}^G) \wedge \chi(\dot{x}_0^G, \dots, \dot{x}_{n-1}^G)\big)^{M[G]} \\
&\iff \big(\varphi(\dot{x}_0^G, \dots, \dot{x}_{n-1}^G)\big)^{M[G]}.
\end{aligned}$$

zu (b). Es gilt:

$$\begin{aligned}
\big(\varphi(\dot{x}_0^G, \dots, \dot{x}_{n-1}^G)\big)^{M[G]} &\iff \big(\psi(\dot{x}_0^G, \dots, \dot{x}_{n-1}^G) \wedge \chi(\dot{x}_0^G, \dots, \dot{x}_{n-1}^G)\big)^{M[G]} \\
&\iff \big(\psi(\dot{x}_0^G, \dots, \dot{x}_{n-1}^G)\big)^{M[G]} \wedge \big(\chi(\dot{x}_0^G, \dots, \dot{x}_{n-1}^G)\big)^{M[G]} \\
&\implies \exists q, r \in G\ \Big(\big(q \Vdash^* \psi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})\big)^M \wedge \big(r \Vdash^* \chi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})\big)^M\Big),
\end{aligned}$$

nach Induktionsvoraussetzung. Sei $p \in G$ mit $p \leq q, r$. Dann folgt

$$\big(p \Vdash^* \psi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})\big)^M \wedge \big(p \Vdash^* \chi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})\big)^M.$$

Dies bedeutet $\big(p \Vdash^* (\psi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1}) \wedge \chi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1}))\big)^M$ also $\big(p \Vdash^* \varphi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})\big)^M$. Dies war zu zeigen.

Fall 4. $\varphi \equiv \neg\psi$.

zu (a). Sei $p \in G$ mit $\big(p \Vdash^* \neg\psi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})\big)^M$, d.h.,

(3) $\qquad \forall q \leq p\ \neg\big(q \Vdash^* \psi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})\big)^M.$

Angenommen, es gilt $\big(\psi(\dot{x}_0^G, \dots, \dot{x}_{n-1}^G)\big)^{M[G]}$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert dann ein $r \in G$ mit

(4) $\qquad \big(r \Vdash^* \psi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})\big)^M.$

Wähle $q \in G$ mit $q \leq p, r$. Nach (3) gilt dann $\neg\big(q \Vdash^* \psi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})\big)^M$, wohingegen aus (4) und $q \leq r$ folgt $\big(q \Vdash^* \psi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})\big)^M$, ein Widerspruch.

zu (b). Es gelte $\big(\neg\,\psi(\dot{x}_0^G, \dots, \dot{x}_{n-1}^G)\big)^{M[G]}$. Nach 28.20 ist

$$D :\equiv \Big\{p \in P \;\Big|\; \big(p \Vdash^* \psi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})\big)^M \vee \big(p \Vdash^* \neg\psi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})\big)^M\Big\}$$

ein Element von M und dicht in P. Sei $p \in D \cap G$. Falls $\big(p \Vdash^* \psi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})\big)^M$ zutrifft, so gilt nach Induktionsvoraussetzung $\big(\psi(\dot{x}_0^G, \dots, \dot{x}_{n-1}^G)\big)^{M[G]}$, was der Voraussetzung von (b) widerspricht. Also muß $\big(p \Vdash^* \neg\psi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})\big)^M$ gelten und p ist wie benötigt.

Fall 5. $\varphi \equiv \exists v \psi(v, w_0, \dots, w_{n-1})$.

zu (a). Sei $p \in G$ mit $\big(p \Vdash^* \exists v \psi(v, \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})\big)^M$. Dies bedeutet

$$\big(\{q \in P \mid \exists x\, q \Vdash^* \psi(x, \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})\} \text{ ist dicht unter } p\big)^M,$$

also

$$\underbrace{\big\{q \in P \;\big|\; \exists x \in M\ \big(q \Vdash^* \psi(x, \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{n-1})\big)^M\big\}}_{\equiv: D} \text{ ist dicht unter } p.$$

Wegen $(\mathbf{Aus})^M$ ist $D \in M$. Da $p \in G$ ist, existiert also ein $q \leq p$ mit $q \in D \cap G$. Wähle ein $\dot{x} \in M$ mit $\big(q \Vdash^* \psi(\dot{x}, \dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\big)^M$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann $\big(\psi(\dot{x}^G, \dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G)\big)^{M[G]}$ was natürlich $\big(\exists v\ \psi(v, \dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G)\big)^{M[G]}$ impliziert. Dies war zu zeigen.
zu (b). Es gelte $\big(\exists v\ \psi(v, \dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G)\big)^{M[G]}$. Wähle $\dot{x} \in M$ mit $\big(\psi(\dot{x}^G, \dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G)\big)^{M[G]}$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert dann ein $p \in G$ mit $\big(p \Vdash^* \psi(\dot{x}, \dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\big)^M$. Nach 28.17 bedeutet dies

$$\Big(\big\{q \in P \bigm| q \Vdash^* \psi(\dot{x}, \dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\big\} \text{ ist dicht in } P \text{ unter } p\Big)^M.$$

Da Obermengen von unter p dichten Mengen wiederum dicht unter p sind, impliziert dies

$$\Big(\big\{q \in P \bigm| \exists v\, q \Vdash^* \psi(v, \dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\big\} \text{ ist dicht in } P \text{ unter } p\Big)^M.$$

Dies bedeutet gerade $\big(p \Vdash^* \exists v \psi(v, \dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\big)^M$.
Damit sind alle Fälle abgehandelt und der Satz ist bewiesen. QED

Wir können nun das von uns angestrebte Resultat beweisen.

28.23 Satz (Forcing-Theorem) *Sei M ein Grundmodell und $(P \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung für M. Ferner seien $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ eine $\in$-Formel und $\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1} \in M$. Dann gilt:*

(a) $\forall p \in P \Big(p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1}) \longleftrightarrow \big(p \Vdash^* \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\big)^M\Big)$.

(b) Ist G ein P-generischer Filter über M, so gilt
$\Big(\big(\varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G)\big)^{M[G]} \longleftrightarrow \exists p \in G\, p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\Big)$.

Beweis. zu (a). „$\Rightarrow$“. Es gelte

$(*)$ $\quad p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})$.

Sei $D :\equiv \big\{q \in P \bigm| \big(q \Vdash^* \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\big)^M\big\}$. Dann gilt

(1) $\quad \big\{q \in P \bigm| \big(q \Vdash^* \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\big)^M\big\}$ ist dicht unter p.

Beweis. Sei $r \leq p$. Sei G ein P-generischer Filter über M mit $r \in G$; G existiert nach dem Existenzsatz für generische Filter 25.4. Dann ist auch $p \in G$ und $(*)$ impliziert $\big(\varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G)\big)^{M[G]}$ nach der Definition von $\Vdash$. Nach 28.22 existiert dann ein $s \in G$ mit

(1.1) $\quad \big(s \Vdash^* \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\big)^M$.

Wähle $q \in G$ mit $q \leq r, s$. Wegen (1.1) und $q \leq s$ gilt dann $\big(q \Vdash^* \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\big)^M$. Also ist $q \in D$. Außerdem ist $q \leq p$. qed(1)

Nach 28.19 impliziert (1), die Behauptung.
„$\Leftarrow$“. Sei $p \in P$ mit $\big(p \Vdash^* \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\big)^M$. Sei G ein beliebiger P-generischer Filter über M. Nach 28.22 gilt dann $\big(\varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G)\big)^{M[G]}$, und dies war zu zeigen.
zu (b). Dies folgt sofort aus (a) und 28.22.
Damit ist das Forcing-Theorem bewiesen. QED

28.24 Bemerkung Das Forcing-Theorem hat zwei Aspekte:

(1) Es kann **in** M entschieden werden, ob eine Eigenschaft erzwungen wird oder nicht.

(2) Jede Eigenschaft einer generischen Erweiterung von M wird durch eine Bedingung aus dem zu dieser Erweiterung gehörenden generischen Filter erzwungen.

28.4 Eigenschaften der Forcing-Relation $\Vdash$.

28.25 Satz *Sei M ein Grundmodell und $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung für M. Ferner sei φ eine $\in$-Formel und $\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1} \in M$. Dann gilt:*

(a) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) $p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})$;

(ii) $\forall r \leq p\; r \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})$;

(iii) $\{r \in P \mid r \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\}$ ist dicht in P unter p.

(b) $\{p \in P \mid p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1}) \vee p \Vdash \neg\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\}$ ist dicht in P und Element von M.

(c) $p \Vdash \neg\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1}) \longleftrightarrow \neg \exists q \leq p\; q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})$.

(d) $p \Vdash \exists v\, \varphi(v, \dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1}) \longleftrightarrow \{q \in P \mid \exists \dot{y} \in M\; q \Vdash \varphi(\dot{y}, \dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\}$ ist dicht in P unter p.

(e) $p \Vdash \exists v\, (v \in \dot{x} \wedge \varphi(v, \dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})) \longrightarrow \exists q \leq p\, \exists \dot{y} \in \operatorname{dom}(\dot{x})\; q \Vdash (\dot{y} \in \dot{x} \wedge \varphi(\dot{y}, \dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1}))$.

Beweis. zu (a). Dies folgt aus 28.19 indem man dort gemäß des Forcing-Theorems die Formeln der Art $\big(s \Vdash^* \psi\big)^M$ durch $s \Vdash \psi$ ersetzt.

zu (b). Die in (b) vorkommende Menge ist gerade die Menge $D_{\varphi(\dot{x}_0,\ldots,\dot{x}_{n-1})}$ aus 28.20.

zu (c). Nach Definition gilt $p \Vdash^* \neg\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1}) \longleftrightarrow \neg \exists q \in P\; \big((q,p) \in \leq\; \wedge q \Vdash^* \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\big)$. Also gilt diese Äquivalenz, wenn man sie auf M relativiert. Nach Definition der Relativierung und dem Relativierungslemma ist die entstehende Formel äquivalent zu

$$\big(p \Vdash^* \neg\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\big)^M \longleftrightarrow \neg \exists q \in P\; \big((q,p)^M \in \leq\; \wedge \big(q \Vdash^* \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\big)^M\big).$$

Wegen $(q,p)^M = (q,p)$ ist dies gleichwertig mit

$$\big(p \Vdash^* \neg\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\big)^M \longleftrightarrow \neg \exists q \leq p\; \big(q \Vdash^* \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\big)^M.$$

Das Forcing-Theorem impliziert, daß dies gerade die in (c) behauptete Äquivalenz ist.

zu (d). Es gilt

$$\begin{aligned}
p \Vdash \exists v\, \varphi(v, \dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1}) &\iff \big(p \Vdash^* \exists v\, \varphi(v, \dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\big)^M \quad \text{(Forcing-Theorem)}\\
&\iff \big(\{q \in P \mid \exists \dot{y}\, q \Vdash^* \varphi(\dot{y}, \dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\} \text{ ist dicht in } P \text{ unter } p\big)^M\\
&\qquad \text{(Definition von } \Vdash^* \text{)}\\
&\iff \big\{q \in P \;\big|\; \big(\exists \dot{y}\, q \Vdash^* \varphi(\dot{y}, \dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\big)^M\big\} \text{ ist dicht in } P \text{ unter } p\\
&\qquad \text{(nach 28.6)}\\
&\iff \big\{q \in P \;\big|\; \exists \dot{y} \in M\; \big(q \Vdash^* \varphi(\dot{y}, \dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\big)^M\big\} \text{ ist dicht in } P \text{ unter } p\\
&\iff \big\{q \in P \;\big|\; \exists \dot{y} \in M\; q \Vdash \varphi(\dot{y}, \dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\big\} \text{ ist dicht in } P \text{ unter } p\\
&\qquad \text{(Forcing-Theorem).}
\end{aligned}$$

zu (e). Wähle einen P-generischen Filter G über M mit $p \in G$. Wegen $p \Vdash \exists v\, (v \in \dot{x} \wedge \varphi(v, \dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1}))$ gilt dann $\big(\exists v\, (v \in \dot{x}^G \wedge \varphi(v, \dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G))\big)^{M[G]}$. Wähle $\dot{z} \in M$ mit

(1) $$\big(\dot{z}^G \in \dot{x}^G \wedge \varphi(\dot{z}^G, \dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G)\big)^{M[G]}.$$

Dann gilt insbesondere $\big(\dot{z}^G \in \dot{x}^G\big)^{M[G]}$, also $\dot{z}^G \in \dot{x}^G$. Nach Definition von $\dot{x}^G$ existiert nun ein $(\dot{y}, s) \in \dot{x}$ mit $s \in G$, so daß $\dot{z}^G = \dot{y}^G$ ist. Dann gilt also $\dot{y}^G \in \dot{x}^G \wedge \dot{y}^G = \dot{z}^G$, d.h., $\big(\dot{y}^G \in \dot{x}^G \wedge \dot{y}^G = \dot{z}^G\big)^{M[G]}$. (1) impliziert somit

$$\big(\dot{y}^G \in \dot{x}^G \wedge \varphi(\dot{y}^G, \dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G)\big)^{M[G]}.$$

Nach dem Forcing-Theorem existiert dann ein $q' \in G$ mit $q' \Vdash \big(\dot y \in \dot x \wedge \varphi(\dot y^G, \dot x_0^G, \ldots, \dot x_{n-1}^G)\big)$. Sei $q \in G$ eine gemeinsame Verstärkung von p, q'. Dann gilt nach 28.3

$$q \Vdash \big(\dot y \in \dot x \wedge \varphi(\dot y^G, \dot x_0^G, \ldots, \dot x_{n-1}^G)\big).$$

Wegen $q \leq p$ und $\dot y \in \mathrm{dom}(\dot x)$ ist also q wie benötigt. QED

Das folgende „Maximalitätsprinzip“ besagt, daß jede Bedingung, die eine Existenzaussage erzwingt, auch eine Instanz dieser Aussage erzwingt.

28.26 Satz (Maximalitätsprinzip) *Sei M ein Grundmodell, $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung für M, $\varphi(v, v_0, \ldots, v_{n-1})$ eine $\in$-Formel, $p \in P$ und seien $\dot x_0, \ldots, \dot x_{n-1} \in M$. Gilt $p \Vdash \exists y\, \varphi(y, \dot x_0, \ldots, \dot x_{n-1})$, so existiert ein $\dot x \in M$ mit $p \Vdash \varphi(\dot x, \dot x_0, \ldots, \dot x_{n-1})$.*

Beweis. Wir benötigen

(1) Sei $A \in M$ mit $\big(A \text{ ist Antikette in } P\big)^M$ und es sei $\big(\dot y_q \mid q \in A\big) \in M$. Dann existiert ein $\dot x \in M$ mit $q \Vdash \dot x = \dot y_q$ für alle $q \in A$.

Beweis. Setze

$$\dot x :\equiv \bigcup\Big\{\big\{(\dot y, r) \mid \dot y \in \mathrm{dom}(\dot y_q) \wedge r \leq q \wedge r \Vdash \dot y \in \dot y_q\big\} \;\Big|\; q \in A\Big\}.$$

Da in $\big\{(\dot y, r) \mid \dot y \in \mathrm{dom}(\dot y_q) \wedge r \leq q \wedge r \Vdash \dot y \in \dot y_q\big\}$ die definierende Formel (nach Übergang von $\Vdash$ zu $(\Vdash^*)^M$) ohne Veränderung der Aussage auf M relativiert werden kann und die beteiligten Parameter Elemente von M sind, liegt diese Menge nach $(\mathbf{Aus})^M$ in M. Nach $(\mathbf{Ers})^M$ gilt dann

$$\Big\{\big\{(\dot y, r) \mid \dot y \in \mathrm{dom}(\dot y_q) \wedge r \leq q \wedge r \Vdash \dot y \in \dot y_q\big\} \;\Big|\; q \in A\Big\} \in M;$$

beachte, daß $A \in M$ ist. $(\bigcup\text{-}\mathbf{Ax})^M$ impliziert dann $\dot x \in M$. Wir zeigen, daß $\dot x$ das Gewünschte leistet, d.h., $q \Vdash \dot x = \dot y_q$ für alle $q \in A$. Fixiere also $q \in A$. Sei G ein P-generischer Filter über M mit $q \in G$; es ist $\dot x^G = \dot y_q^G$ zu zeigen.
„$\subset$“. Sei $v \in \dot x^G$. Dann ist $v = \dot y^G$, wobei $(\dot y, r) \in \dot x$ für ein $r \in G$. Nach Definition von $\dot x$ existiert dann ein $q' \in A$ mit

(1.1) $r \leq q' \wedge r \Vdash \dot y \in \dot y_{q'}$.

Wegen $r \leq q'$ und $r \in G$ ist $q' \in G$, so daß wir $q, q' \in G \cap A$ haben. Da je zwei Elemente von G kompatibel aber je zwei verschiedene Elemente der Antikette A inkompatibel sind, muß $q = q'$ sein. Die zweite Aussage von (1.1) impliziert also $r \Vdash \dot y \in \dot y_q$. Dies impliziert $v = \dot y^G \in \dot y_q^G$ wegen $r \in G$. Das war zu zeigen.
„$\supset$“. Sei $v \in \dot y_q^G$. Dann ist $v = \dot y^G$, wobei $(\dot y, s) \in \dot y_q$ für ein $s \in G$. Aus $\dot y^G \in \dot y_q^G$ folgt nach dem Forcing-Theorem die Existenz eines $r' \in G$ mit $r' \Vdash \dot y \in \dot y_q$. Sei $r \in G$ eine gemeinsame Verstärkung von r' und q. Dann gilt $(\dot y, r) \in \dot x$, beachte 28.3. Wegen $r \in G$ folgt ferner $v = \dot y^G \in \dot x^G$.
Damit ist (1) bewiesen. qed(1)

Sei nun $D :\equiv \big\{q \in P \mid q \leq p \wedge \exists y \in M\, q \Vdash \varphi(y, \dot x_0, \ldots, \dot x_{n-1})\big\}$. Wegen $D = \big\{q \in P \mid (q \leq p \wedge \exists y\, q \Vdash^* \varphi(y, \dot x_0, \ldots, \dot x_{n-1}))^M\big\}$ und $(\mathbf{Aus})^M$ ist $D \in M$.

(2) Es gibt $A \in M$ mit $\big(A \subset D \wedge A \text{ ist Antikette in } P \wedge A \text{ ist maximal mit diesen Eigenschaften}\big)^M$ und $\big(\dot y_q \mid q \in A\big) \in M$ mit $q \Vdash \varphi(\dot y_q, \dot x_0, \ldots, \dot x_{n-1})$ für alle $q \in A$.

Beweis. Die zu zeigende Behauptung ist gleichwertig mit

$$\Big(\exists A\,\exists(\dot y_q \mid q\in A)\\ \big((A\subset\{q\in P\,|\,q\le p\,\wedge\,\exists y\,q\Vdash^*\varphi(y,\dot x_0,\ldots,\dot x_{n-1})\}\wedge A\text{ ist Antikette in }P\,\wedge\\ A\text{ ist maximal mit diesen Eigenschaften})\,\wedge\\ \forall q\in A\; q\Vdash^*\varphi(\dot y_q,\dot x_0,\ldots,\dot x_{n-1})\big)\Big)^M.$$

Wir arbeiten in M.[216] Nach dem Lemma von Zorn existiert eine $\subset$-maximales Element A in

$$\mathcal{A} :\equiv \big\{A \;\big|\; A\subset \{q\in P\,|\,q\le p\,\wedge\,\exists y\,q\Vdash^*\varphi(y,\dot x_0,\ldots,\dot x_{n-1})\}\wedge A\text{ ist Antikette in }P\big\};$$

beachte, daß z.B. $\{p\}\in\mathcal{A}$ und die Vereinigung einer jeden $\subset$-Kette von Antiketten wieder eine Antikette ist. Für $q\in A$ ist dann $\big\{y \;\big|\; q\Vdash^*\varphi(y,\dot x_0,\ldots,\dot x_{n-1})\big\}\neq\emptyset$. Mit Scotts Trick[217] verkleinern wir diese Klasse zu einer nicht-leeren Menge $F(q)$. Nach **(AC)** existiert $\big(\dot y_q \;\big|\; q\in A\big)\in\times_{q\in A}F(q)$. A und diese Folge sind dann wie benötigt. qed(2)

Nach (1) existiert ein $\dot x\in M$ mit $q\Vdash\dot x=\dot y_q$ für alle $q\in A$. Aus (2) folgt also

(3) $\forall q\in A\; q\Vdash\varphi(\dot x,\dot x_0,\ldots,\dot x_{n-1})$.

Wir zeigen, daß $\dot x$ das Gewünschte leistet, daß also

(4) $p\Vdash\varphi(\dot x,\dot x_0,\ldots,\dot x_{n-1})$

gilt. Angenommen, dies ist nicht der Fall. Dann existiert ein P-generischer Filter G über M mit $p\in G$ und $\big(\neg\varphi(\dot x^G,\dot x_0^G,\ldots,\dot x_{n-1}^G)\big)^{M[G]}$. Nach dem Forcing-Theorem existiert ein $r\in G$ mit $r\Vdash\neg\varphi(\dot x,\dot x_0,\ldots,\dot x_{n-1})$. Indem wir ggf. von r zu einer gemeinsamen Verstärkung von r und p in G übergehen, können wir $r\le p$ erreichen. Aus $p\Vdash\exists y\,\varphi(y,\dot x_0,\ldots,\dot x_{n-1})$ folgt nach 28.25, daß D dicht in P unter p ist. Also existiert ein $q\in D$ mit $q\le r$. Da (in M) $A\subset D$ eine maximale Antikette ist, existiert ein $q'\in A$ mit $q\parallel q'$. Sei $s\le q,q'$. Dann ist einerseits $s\le r$, so daß $s\Vdash\neg\varphi(\dot x,\dot x_0,\ldots,\dot x_{n-1})$ gilt. Aus $s\le q'$ und (3) (beachte, daß $q'\in A$ gilt) folgt andererseits $s\Vdash\varphi(\dot x,\dot x_0,\ldots,\dot x_{n-1})$. Beides kann nicht gelten. Also ist unsere Annahme, daß (4) nicht gilt, falsch, was das Maximalitätsprinzip beweist. QED

29 ZFC in $M[G]$.

Fixiere ein Grundmodell M, eine Forcing-Halbordnung für $M(P,\le,1_P)$ und einen P-generischen Filter G über M. Wir verifizieren, daß $M[G]$ das kleinste transitive **ZFC**-Obermodell von M ist, das G als Element enthält, insbesondere also $\mathbf{ZFC}^{M[G]}$ gilt. Nach 27.22 gilt:

29.1 Lemma *Es gilt* $(\mathbf{Ex})^{M[G]}$, $(\mathbf{Ext})^{M[G]}$, $(\mathbf{Paar})^{M[G]}$, $(\mathbf{Inf})^{M[G]}$ *und* $(\mathbf{Fund})^{M[G]}$.

Wir beweisen nun zunächst $(\mathbf{Aus})^{M[G]}$, da wir dann beim Nachweis der anderen Axiome ggf. nur $M[G]$-Obermengen der dort als Elemente von $M[G]$ zu identifizierenden Klassen angeben müssen.

29.2 Lemma *Es gilt* $(\mathbf{Aus})^{M[G]}$.

Beweis. Sei $\varphi(v,\vec w)$ eine $\in$-Formel und seien $y,\vec z\in M[G]$. Nach 22.8 haben wir zu zeigen:

(1) $\big\{v\in y \;\big|\; \varphi(v,\vec z)^{M[G]}\big\}\in M[G]$.

[216] vgl. 22.7.
[217] siehe z.B. die Fußnote auf Seite 71.

Beweis. Wähle Namen $\dot{y}, \vec{\dot{z}} \in M$ mit $y = \dot{y}^G$ und $\vec{z} = \vec{\dot{z}}^G$ und setze

$$t :\equiv \{(\dot{x}, p) \mid \dot{x} \in \mathrm{dom}(\dot{y}) \wedge p \in P \wedge p \Vdash (\dot{x} \in \dot{y} \wedge \varphi(\dot{x}, \vec{\dot{z}}))\}.$$

Es gilt $t \in M$, denn

$$\begin{aligned}
t &= \Big\{z \in \mathrm{dom}(\dot{y}) \times P \;\Big|\; \exists \dot{x}\, \exists p\, \big(z = (\dot{x}, p) \wedge p \Vdash (\dot{x} \in \dot{y} \wedge \varphi(\dot{x}, \vec{\dot{z}}))\big)\Big\} \\
&= \Big\{z \in \mathrm{dom}(\dot{y}) \times P \;\Big|\; \exists \dot{x} \in M\, \exists p \in M\, \big(z = (\dot{x}, p) \wedge p \Vdash (\dot{x} \in \dot{y} \wedge \varphi(\dot{x}, \vec{\dot{z}}))\big)\Big\} \\
&\quad \text{(wegen } \mathrm{dom}(\dot{x}), P \subset M) \\
&= \Big\{z \in \mathrm{dom}(\dot{y}) \times P \;\Big|\; \exists \dot{x} \in M\, \exists p \in M\, \big((z = (\dot{x}, p))^M \wedge \big(p \Vdash^* (\dot{x} \in \dot{y} \wedge \varphi(\dot{x}, \vec{\dot{z}}))\big)^M\big)\Big\} \\
&\quad \text{(Absolutheit der Formel } u = (v, w) \text{, siehe 22.20, und Forcing-Theorem 28.23)} \\
&= \Big\{z \in \mathrm{dom}(\dot{y}) \times P \;\Big|\; \big(\exists \dot{x}\, \exists p\, \big(z = (\dot{x}, p) \wedge p \Vdash^* (\dot{x} \in \dot{y} \wedge \varphi(\dot{x}, \vec{\dot{z}}))\big)\big)^M\Big\} \in M \quad \text{(wegen } (\mathbf{Aus})^M\text{);}
\end{aligned}$$

beachten Sie, daß hierbei aber auch die Gültigkeit weiterer Axiome in M gebraucht wird, da wir auch $\mathrm{dom}(\dot{y}) \times P \in M$ benötigen; dies ergibt sich aus $\big(\mathrm{dom}(\dot{x}) \times P\big)^M = \mathrm{dom}(\dot{x}) \times P$,[218] da wegen $\mathbf{ZFC} \vdash \forall u, v\, \exists w\, w = \mathrm{dom}(u) \times v$ und $\mathbf{ZFC}^M$ gilt $\forall u, v \in M\, \exists w \in M\; w = \big(\mathrm{dom}(u) \times v\big)^M$. (1) folgt nun sofort aus

(1.1) $\quad t^G = \{v \in \dot{y}^G \mid \varphi(v, \vec{\dot{z}}^G)^{M[G]}\}$.

Beweis. zu „$\subset$". Sei $v \in t^G$. Nach Definition von $M[G]$ gilt dann $v = \dot{x}^G$, wobei $(\dot{x}, p) \in t$ für ein $p \in G$. Aus $(\dot{x}, p) \in t$ folgt $p \Vdash (\dot{x} \in \dot{y} \wedge \varphi(\dot{x}, \vec{\dot{z}}))$, was wegen $p \in G$ nach dem Forcing-Theorem auf $\big(\dot{x}^G \in \dot{y}^G \wedge \varphi(\dot{x}^G, \vec{\dot{z}}^G)\big)^{M[G]}$, also $\dot{x}^G \in \dot{y}^G \wedge \varphi(\dot{x}^G, \vec{\dot{z}}^G)^{M[G]}$ führt. Wegen $v = \dot{x}^G$ bedeutet dies gerade, daß v Element der Menge auf der rechten Seite von (1.1) ist.
zu „$\supset$". Es gelte $v \in \dot{y}^G \wedge \varphi(v, \vec{\dot{z}}^G)^{M[G]}$. Wegen $v \in \dot{y}^G$ existiert nach Definition von $\dot{y}^G$ ein $(\dot{x}, q) \in \dot{y}$ mit $q \in G$, so daß $v = \dot{x}^G$ ist. Nach 28.3 gilt

$(*) \qquad q \Vdash \dot{x} \in \dot{y}$.

Wegen $\varphi(\dot{x}^G \vec{\dot{z}}^G)^{M[G]}$ existiert nach dem Forcing-Theorem ein $r \in G$ mit

$(**) \quad r \Vdash \varphi(\dot{x}, \vec{\dot{z}})$.

Sei $p \in G$ eine gemeinsame Verstärkung von q, r. Dann gelten $(*)$ und $(**)$, wenn man q bzw. r durch p ersetzt, so daß $(\dot{x}, p) \in t$ ist. Wegen $p \in G$ ist dann $v = \dot{x}^G \in t^G$. qed(1.1)

Damit ist (1) bewiesen. qed(1)

Aus (1) ergibt sich $(\mathbf{Aus})^{M[G]}$. QED

29.3 Lemma *Es gilt* $(\bigcup\text{-}\mathbf{Ax})^{M[G]}$.

Beweis. Sei $a \in M[G]$; wir haben $\bigcup a \in M[G]$ zu verifizieren. Sei $a = \dot{a}^G$ mit $\dot{a} \in M$. Aus $\mathrm{dom}(\dot{a}) \in M$ (vgl. 22.26) und $(\bigcup\text{-}\mathbf{Ax})^M$ folgt, daß $t :\equiv \bigcup \mathrm{dom}(\dot{a}) \in M$ ist. Wir zeigen:

(1) $\qquad \bigcup a \subset t^G$.

Beweis. Sei $c \in \bigcup a$. Dann existiert ein $b \in a$ mit $c \in b$. Aus $b \in \dot{a}^G$ folgt die Existenz eines $\dot{b} \in M$ und eines $p \in G$ mit $(\dot{b}, p) \in \dot{a}$ und $b = \dot{b}^G$. Analog folgt wegen $c \in \dot{b}^G$ die Existenz eines $\dot{c} \in M$ und eines $q \in G$ mit $(\dot{c}, q) \in \dot{b}$ und $c = \dot{c}^G$. Also gilt $(\dot{c}, q) \in \dot{b} \in \mathrm{dom}(\dot{a})$, d.h., $(\dot{c}, q) \in \bigcup \mathrm{dom}(\dot{a}) = t$. Wegen $q \in G$ folgt hieraus $\dot{c}^G \in t^G$, also $c \in t^G$. Dies war zu zeigen. qed(1)

[218] siehe hierzu 22.24.

Aus (1) folgt nun, da $z \in \bigcup a$ eine Σ_0-Formel ist, $\bigcup a = \{z \in t^G \mid z \in \bigcup a\} = \{z \in t^G \mid (z \in \bigcup a)^{M[G]}\}$. Wegen $(\mathbf{Aus})^{M[G]}$ ist die rechts stehende Klasse ein Element von $M[G]$. Also ist $\bigcup a \in M[G]$; dies war zu zeigen. QED

Aus 29.1 und 29.3 folgt

29.4 Corollar *Es gilt* $\mathbf{EML}^{M[G]}$.

29.5 Lemma *Es gilt* $(\mathbf{Pot})^{M[G]}$.

Beweis. Sei $a \in M[G]$, etwa $a = \dot{a}^G$ mit $\dot{a} \in M$. Nach 22.8 ist $\mathrm{Pot}(a) \cap M[G] \in M[G]$ zu zeigen. Setze

$$s :\equiv \{\dot{y} \in M \mid \dot{y} \subset \mathrm{dom}(\dot{a}) \times P\}.$$

Wegen $(\mathbf{Pot})^M$ und $\mathrm{dom}(\dot{a}) \times P \in M$ ist $s \in M$. s ist die Menge von kanonischen Namen für Teilmengen von a. Wir setzen $t :\equiv \{(\dot{y}, 1_P) \mid \dot{y} \in s\}$. Wegen $s \in M$ und $(\mathbf{Ers})^M$ ist $t \in M$: $t = \{z \in M \mid \exists \dot{y} \in s\ (z = (\dot{y}, 1_P))^M\}$.

(1) $\quad \mathrm{Pot}(a) \cap M[G] \subset t^G$.

Beweis. Sei $z \subset a$, $z \in M[G]$. Sei $\dot{z} \in M$ mit $\dot{z}^G = z$. Wir definieren einen „kanonischen Namen“ für z durch $\dot{y} :\equiv \{(\dot{x}, p) \in \mathrm{dom}(\dot{a}) \times P \mid p \Vdash (\dot{x} \in \dot{z})\}$. Wegen $\mathrm{dom}(\dot{a}) \times P \in M$ und $(\mathbf{Aus})^M$ ist $\dot{y} \in M$; beachte, daß $p \Vdash \dot{x} \in \dot{z}$ nach dem Forcing-Theorem durch $(p \Vdash^* \dot{x} \in \dot{z})^M$ ersetzt werden kann. Folglich ist $\dot{y} \in s$ und somit $(\dot{y}, 1_P) \in t$, was

(1.1) $\quad \dot{y}^G \in t^G$

impliziert. Es verbleibt zu zeigen, daß $\dot{y}$ tatsächlich ein Name für z ist, daß also gilt

(1.2) $\quad \dot{z}^G = \dot{y}^G$.

Beweis von (1.2). zu „$\subset$“. Sei $x \in \dot{z}^G$. Wegen $\dot{z}^G \subset a = \dot{a}^G$ ist dann auch $x \in \dot{a}^G$, so daß nach Definition von $\dot{a}^G$ ein Paar $(\dot{x}, q) \in \mathrm{dom}(\dot{a}) \times P$ mit $q \in G$ existiert, so daß $x = \dot{x}^G$ gilt. Wir haben dann $\dot{x}^G \in \dot{z}^G$, was auf $(\dot{x}^G \in \dot{z}^G)^{M[G]}$ führt. Nach dem Forcing-Theorem existiert ein $p \in G$ mit $p \Vdash (\dot{x} \in \dot{z})$. Dann ist $(\dot{x}, p) \in \dot{y}$. Wegen $p \in G$ folgt hieraus $\dot{x}^G \in \dot{y}^G$, was $x \in \dot{y}^G$ bedeutet. Dies war zu zeigen.
zu „$\supset$“. Sei $x \in \dot{y}^G$. Dann existiert nach Definition von $\dot{y}^G$ und $\dot{y}$ ein Paar $(\dot{x}, p) \in \mathrm{dom}(\dot{a}) \times P$ mit $p \Vdash (\dot{x} \in \dot{z})$ und $p \in G$, so daß $x = \dot{x}^G$ ist. Aus $p \Vdash (\dot{x} \in \dot{z})$ folgt $(\dot{x}^G \in \dot{z}^G)^{M[G]}$ nach dem Forcing-Theorem. Letzteres ist mit $\dot{x}^G \in \dot{z}^G$, also $x \in \dot{z}^G$ gleichwertig. Dies war zu zeigen. qed(1.2)

Aus (1.1) und (1.2) folgt sofort $z \in t^G$; dies war zu zeigen. qed(1)

Da $z \subset a$ eine Σ_0-Formel ist, folgt aus (1): $\mathrm{Pot}(a) \cap M[G] = \{z \in t^G \mid z \subset a\} = \{z \in t^G \mid (z \subset a)^{M[G]}\}$. Wegen $(\mathbf{Aus})^{M[G]}$ ist die rechts stehende Klasse ein Element von $M[G]$. Dies war zu zeigen. QED

Um $(\mathbf{Ers})^{M[G]}$ beweisen zu können, benötigen wir das folgende Lemma.

29.6 Lemma *Sei* $\varphi(u, v, \vec{w})$ *eine* $\in$*-Formel. Seien* $\dot{a}, \vec{\dot{z}} \in M$. *Dann existiert ein* $S \in M$, *so daß*

$$\forall \dot{x} \in \mathrm{dom}(\dot{a})\, \forall p \in P\ \Big(\big(\exists \dot{y} \in M\ p \Vdash \varphi(\dot{x}, \dot{y}, \vec{\dot{z}})\big) \longrightarrow \exists \dot{y} \in S\ p \Vdash \varphi(\dot{x}, \dot{y}, \vec{\dot{z}}) \Big)$$

gilt.

Beweis. Es ist

$$\forall \dot a \in M\, \forall \vec{\dot z} \in M\, \exists S \in M\, \forall \dot x \in \operatorname{dom}(\dot a)\, \forall p \in P\, \Big(\big(\exists \dot y \in M\ p \Vdash \varphi(\dot x, \dot y, \vec{\dot z}) \big) \longrightarrow \exists \dot y \in S\ p \Vdash \varphi(\dot x, \dot y, \vec{\dot z}) \Big)$$

zu zeigen. Mit Hilfe der üblichen Absolutheitsargumente und des Forcing-Theorems folgt, daß dies äquivalent ist zu

$$\Big(\underbrace{\forall a\, \forall \vec z\, \exists S\, \forall x \in \operatorname{dom}(a)\, \forall p \in P\, \Big(\big(\exists y\, p \Vdash^* \varphi(x, y, \vec z) \big) \longrightarrow \exists y \in S\ p \Vdash^* \varphi(x, y, \vec z) \Big)}_{\equiv:\, \chi(P, \leq, 1_P)} \Big)^M .$$

Wir arbeiten in M und beweisen χ. Seien hierzu $a, \vec z$ beliebig vorgegeben. Wir definieren $f\colon \operatorname{dom}(a) \times P \to \mathrm{On}$ durch

$$f(x,p) :\equiv \begin{cases} \min\{\alpha \in \mathrm{On} \mid \exists y \in V_\alpha\ p \Vdash^* \varphi(x,y,\vec z)\}, & \text{falls } \exists y\, p \Vdash^* \varphi(x,y,\vec z); \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen (**Ers**) ist $\operatorname{ran}(f) \in V$.[219] Setze $S :\equiv \bigcup\{V_\alpha \mid \alpha \in \operatorname{ran}(f)\}$. Dann ist $S \in V$ und S ist wie für χ benötigt. QED

Wir kehren zum Nachweis der **ZFC**-Axiome für $M[G]$ zurück.

29.7 Lemma *Es gilt* $(\mathbf{Ers})^{M[G]}$.

Beweis. Sei $\varphi(u, v, \vec w)$ eine $\in$-Formel. Seien $a, \vec z \in M[G]$, so daß

$(*)\qquad \forall x, y, y' \in M[G]\ \big((\varphi(x,y,\vec z)^{M[G]} \wedge \varphi(x,y',\vec z)^{M[G]}) \longrightarrow y = y' \big)$

gilt. Es ist zu zeigen, daß $s :\equiv \{y \in M[G] \mid \exists x \in a\ \varphi(x,y,\vec z)^{M[G]}\} \in M[G]$ ist. Wegen $(\mathbf{Aus})^{M[G]}$ genügt es, ein $t \in M$ zu finden, so daß $s \subset t^G$ gilt. Sei $a = \dot a^G$, $\vec z = \vec{\dot z}^G$. Wähle gemäß 29.6 ein $S \in M$, so daß für alle $\dot x \in \operatorname{dom}(\dot a)$ gilt

(1) $\qquad \forall p \in P\, \Big(\big(\exists \dot y \in M\ p \Vdash \varphi(\dot x, \dot y, \vec{\dot z}) \big) \longrightarrow \exists \dot y \in S\ p \Vdash \varphi(\dot x, \dot y, \vec{\dot z}) \Big).$

Sei nun $t :\equiv \{(r, 1) \mid r \in S\}$. Mit den üblichen Argumenten folgt $t \in M$. Wir zeigen $s \subset t^G$. Hierzu sei $y \in s$. Dann existiert ein $x \in a$ mit

(2) $\qquad \varphi(x, y, \vec z)^{M[G]}.$

Wegen $x \in a = \dot a^G$ existiert ein Paar $(\dot x, q) \in \dot a$ mit $q \in G$, so daß $x = \dot x^G$ ist. Sei $\dot y \in M$ mit $y = \dot y^G$. (2) bedeutet dann

(3) $\qquad \varphi(\dot x^G, \dot y^G, \vec{\dot z}^G)^{M[G]}.$

Nach dem Forcing-Theorem existiert ein $p \in G$ mit $p \Vdash \varphi(\dot x, \dot y, \vec{\dot z})$. Nach (1) existiert ein $\dot y' \in S$ mit $p \Vdash \varphi(\dot x, \dot y', \vec{\dot z})$. Wegen $p \in G$ impliziert das Forcing-Theorem

$$\varphi(\dot x^G, \dot y^G, \vec{\dot z}^G)^{M[G]} \wedge \varphi(\dot x^G, \dot y'^G, \vec{\dot z}^G)^{M[G]},$$

was nach $(*)$ $\dot y^G = \dot y'^G$ impliziert. Da aus $\dot y' \in S$ folgt $\dot y'^G \in t^G$, haben wir $y = \dot y^G = \dot y'^G \in t^G$ nachgewiesen. Dies war zu zeigen. QED

29.8 Corollar *Es gilt* $\mathbf{ZF}^{M[G]}$.

Um die Gültigkeit des Auswahlaxioms und die $\subset$-Minimalität von $M[G]$ zeigen zu können, beweisen wir:

[219] Beachten Sie, daß im Moment M unser mathematisches Universum V ist.

29.9 Satz *Sei N ein transitives* **ZF**-*Obermodell von M, das G als Element enthält; d.h., N ist ein transitiver Term mit $\mathbf{ZF}^N$, $M \subset N$ und $G \in N$. Dann gilt*
(a) $\left(\dot{x}^G\right)^N = \dot{x}^G \in N$ *für alle* $\dot{x} \in M$.
(b) Definiert man $\mathrm{int}_G\colon M \to V$ *durch* $\mathrm{int}_G(\dot{y}) :\equiv \dot{y}^G$, *so ist* $\mathrm{int}_G \restriction x \in N$ *für alle* $x \in M$.

Beweis. zu (a). Wir zeigen dies durch eine Induktion über die Relation R aus 27.8. Sei $\dot{x} \in M$ und für alle $\dot{y}R\dot{x}$ sei $\left(\dot{y}^G\right)^N = \dot{y}^G \in N$ gezeigt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\dot{x}^G &= \left\{z \mid \exists p \in G\, \exists \dot{y}\, ((\dot{y},p) \in \dot{x} \wedge z = \dot{y}^G)\right\} \\
&= \bigcup \Big\{ \left\{z \mid \exists p \in G\, \exists \dot{y}\, ((\dot{y},p) = w \wedge z = \dot{y}^G)\right\} \Bigm| w \in \dot{x} \Big\} \\
&= \bigcup \Big\{ \left\{z \in N \mid \exists p \in G\, \exists \dot{y} \in N\, ((\dot{y},p) = w \wedge z = (\dot{y}^G)^N)\right\} \Bigm| w \in \dot{x} \Big\} \quad \text{(nach Ind.Vor.)} \\
&= \bigcup \Big\{ \underbrace{\left\{z \in N \mid \exists p \in G\, (\exists \dot{y}\, ((\dot{y},p) = w \wedge z = \dot{y}^G))^N\right\}}_{\in N \text{ wegen } (\mathbf{Ers})^N \text{ und } G \in N} \Bigm| w \in \dot{x} \Big\} \\
&= \bigcup \Big\{ v \in N \Bigm| \exists w \in \dot{x}\; v = \left\{z \in N \mid \exists p \in G\, (\exists \dot{y}\, ((\dot{y},p) = w \wedge z = \dot{y}^G))^N\right\} \Big\} \\
&= \bigcup \underbrace{\Big\{ v \in N \Bigm| \exists w \in \dot{x}\, \big(v = \left\{z \mid \exists p \in G\, \exists \dot{y}\, ((\dot{y},p) = w \wedge z = \dot{y}^G)\right\}\big)^N \Big\}}_{\in N \text{wegen } (\mathbf{Ers})^N} \\
&\in N, \quad \text{wegen } (\textstyle\bigcup\text{-}\mathbf{Ax})^N.
\end{aligned}$$

$\left(\dot{x}^G\right)^N = \dot{x}^G$ beweist man nun genau wie $\left(\dot{x}^G\right)^{M[G]} = \dot{x}^G$ im Beweis von 27.23.
zu (b). Sei $x \in M$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{int}_G \restriction x &= \left\{u \in N \mid \exists \dot{y} \in x\, \exists z \in N\, (z = \dot{y}^G \wedge u = (y,z))\right\} \quad (\text{wegen } \dot{y}^G \in N \text{ und } (\mathbf{Paar})^N) \\
&= \left\{u \in N \mid \exists \dot{y} \in x\, (\exists z\, (z = \dot{y}^G \wedge u = (y,z)))^N\right\} \quad (\text{wegen (a)}) \\
&\in N, \quad \text{wegen } (\mathbf{Ers})^N.
\end{aligned}$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. QED

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir:

29.10 Corollar *$M[G]$ ist das $\subset$-kleinste transitive Modell N von* **ZF** *mit $M \subset N$ und $G \in N$.*

Beweis. Nach Teil (a) des Satzes ist für jedes solche N $\dot{x}^G \in N$ für alle $\dot{x} \in M$, also $M[G] \subset N$. Wegen $\mathbf{ZF}^{M[G]}$ ist also $M[G]$ das $\subset$-kleinste transitive **ZF**-Modell, das M erweitert und G als Element enthält. QED

Mit Hilfe von 29.9 zeigen wir außerdem, daß das Auswahlaxiom in $M[G]$ gilt.

29.11 Lemma *Es gilt* $(\mathbf{AC})^{M[G]}$.

Beweis. Da bereits $\mathbf{ZF}^{M[G]}$ nachgewiesen ist, genügt es, eine unter **ZF** zu **(AC)** äquivalente Aussage zu beweisen. Hierzu zeigen wir zunächst

(1) $\mathbf{ZF} \vdash (\mathbf{AC}) \longleftrightarrow \forall x\, \exists x'\, \exists \beta \in \mathrm{On}\, \exists f\, \left(x' \supset x \wedge f\colon \beta \xrightarrow{surj.} x'\right)$.

Beweis. Nach 8.1 gilt:

$(*)$ $\mathbf{ZF} \vdash (\mathbf{AC}) \longleftrightarrow \forall x\, \exists \beta \in \mathrm{On}\, \exists f\; f\colon \beta \xrightarrow{bij.} x$.

Hieraus folgt sofort „$\Rightarrow$“.

zu „$\Leftarrow$“. Sei $x' \supset x$ und $f\colon \beta \xrightarrow{surj.} x'$. Setze $u :\equiv \{\min f^{-1}[\{y\}] \mid y \in x\}$. Dann ist $u \subset \beta$ und $g :\equiv f \restriction u$ ist eine Bijektion $g\colon u \xrightarrow{bij.} x$. Sei γ der MOSTOWSKI-Kollaps von $(u,<)$ und $\pi\colon \gamma \xrightarrow{bij.} u$ die Inverse des MOSTOWSKI-Isomorphismus' von $(u,<)$. Dann ist $g \circ \pi\colon \gamma \xrightarrow{bij.} x$. Also ist die rechte Seite von $(*)$ erfüllt. qed(1)

$(\mathbf{AC})^{M[G]}$ ist also gezeigt, wenn wir verifizieren:

(2) $\big(\forall x\, \exists x'\, \exists \beta \in \mathrm{On}\, \exists f\, (x' \supset x \wedge f\colon \beta \xrightarrow{surj.} x')\big)^{M[G]}$.

BEWEIS. Die zu zeigende Behauptung ist wegen $\mathrm{On}^{M[G]} = \mathrm{On}^M = \mathrm{On} \cap M$ (siehe 27.17) und der $M[G]$-V-Absolutheit von $x \subset x'$ und $f\colon \beta \xrightarrow{surj.} x'$ (siehe 22.20) gleichwertig mit

$$\forall x \in M[G]\, \exists x' \in M[G]\, \exists \beta \in \mathrm{On} \cap M\, \exists f \in M[G]\, (x' \supset x \wedge f\colon \beta \xrightarrow{surj.} x').$$

Sei also $x \in M[G]$. Sei $\dot{x} \in M$ mit $x = \dot{x}^G$. Da $\mathbf{ZFC}^M$ gilt, folgt aus $(*)$: $\big(\exists g\, \exists \beta \in \mathrm{On}\, g\colon \beta \xrightarrow{bij.} \mathrm{dom}(\dot{x})\big)^M$. Wegen $\big(g\colon \beta \xrightarrow{bij.} \mathrm{dom}(\dot{x})\big)^M \iff g\colon \beta \xrightarrow{bij.} \mathrm{dom}(\dot{x})$ bedeutet dies $\exists g \in M\, \exists \beta \in \mathrm{On} \cap M\; g\colon \beta \xrightarrow{bij.} \mathrm{dom}(\dot{x})$. Sei also $\beta \in \mathrm{On} \cap M$ und $g \in M$ mit $g\colon \beta \xrightarrow{bij.} \mathrm{dom}(\dot{x})$. Nach 29.9 ist $h :\equiv \mathrm{int}_G \restriction \mathrm{dom}(\dot{x}) \in M[G]$. Also ist $x' :\equiv \mathrm{ran}(h) \in M[G]$; nach Definition von $\dot{x}^G$ ist $\dot{x}^G \subset x'$. Sei $f :\equiv h \circ g$. Es ist $\mathrm{ran}(f) = \mathrm{ran}(h) = x'$. Es verbleibt also, $f \in M[G]$ zu zeigen. Hierzu:

$$\begin{aligned} h \circ g &= \big\{z \in \mathrm{dom}(g) \times \mathrm{ran}(h) \bigm| \exists u, v, w\, ((u,v) \in g \wedge (v,w) \in h \wedge z = (u,w))\big\} \\ &= \big\{z \in \mathrm{dom}(g) \times \mathrm{ran}(h) \bigm| \exists u, v, w \in M[G]\, ((u,v) \in g \wedge (v,w) \in h \wedge z = (u,w))\big\} \\ &\quad \text{(wegen } g, h \in M[G]) \\ &= \big\{z \in \mathrm{dom}(g) \times \mathrm{ran}(h) \bigm| \big(\exists u, v, w\, ((u,v) \in g \wedge (v,w) \in h \wedge z = (u,w))\big)^{M[G]}\big\} \in M[G] \\ &\quad \text{(wegen } (\mathbf{Aus})^{M[G]}). \end{aligned}$$

x', β und f sind also wie benötigt. qed(2)

Damit ist das Lemma bewiesen. QED

Aus 29.10 und 29.11 folgt sofort:

29.12 Satz *$M[G]$ ist ein Grundmodell. Es ist das $\subset$-kleinste transitive* **ZFC**-*Obermodell von M, das G als Element enthält.*

30 Kardinalzahlen in Forcingerweiterungen.

Bei der Durchführung von Forcingkonstruktionen ist es von fundamentaler Bedeutung, Kardinalitäten und Konfinalitäten auf kontrollierte Art und Weise zu behandeln. Deshalb beschäftigen wir uns in diesem Kapitel mit dem Verhältnis von Kardinalitäten bzw. Konfinalitäten relativ zu M und $M[G]$.

30.1 Bewahrung von Konfinalitäten und Kardinalitäten.

30.1 Definition Sei M ein Grundmodell, $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung für M und $\kappa \in \mathrm{Card}^M$ (also $(\kappa \in \mathrm{Card})^M$).

(a) P **bewahrt Kardinalitäten** $\geq \kappa$ $:\equiv$ für jeden P-generischen Filter G über M und alle $\delta \in \mathrm{On} \cap M$ mit $\delta \geq \kappa$ gilt $\delta \in \mathrm{Card}^M \longleftrightarrow \delta \in \mathrm{Card}^{M[G]}$.

(b) P **bewahrt Kardinalitäten** $:\equiv$ P bewahrt Kardinalitäten $\geq \aleph_1^M$.

(c) P **bewahrt Konfinalitäten** $\geq \kappa$ $:\equiv$ für jeden P-generischen Filter G über M und alle $\delta \in \mathrm{On} \cap M$ mit $\mathrm{Lim}(\delta)$ gilt $\mathrm{cf}(\delta)^M \geq \kappa \longrightarrow \mathrm{cf}(\delta)^M = \mathrm{cf}(\delta)^{M[G]}$.

(d) P **bewahrt Konfinalitäten** $:\equiv$ P bewahrt Konfinalitäten $\geq \aleph_1^M$.

(e) P **bewahrt Kardinalitäten** $\leq \kappa$ $:\equiv$ für jeden P-generischen Filter G über M und alle $\delta \in \mathrm{On} \cap M$ mit $\delta \leq \kappa$ gilt $\delta \in \mathrm{Card}^M \longleftrightarrow \delta \in \mathrm{Card}^{M[G]}$.

(f) P **bewahrt Konfinalitäten** $\leq \kappa$ $:\equiv$ für jeden P-generischen Filter G über M und alle $\delta \in \mathrm{On} \cap M$ mit $\mathrm{Lim}(\delta)$ gilt $\mathrm{cf}(\delta)^M \leq \kappa \longrightarrow \mathrm{cf}(\delta)^M = \mathrm{cf}(\delta)^{M[G]}$.

30.2 Bemerkung Wir haben in 22.38 gesehen, daß Kardinalzahlen abwärts absolut sind: ist G ein P-generischer Filter über M, so gilt $\mathrm{Card}^{M[G]} \subset \mathrm{Card}^M$. Daß P Kardinalzahlen $\geq \kappa$ bzw. $\leq \kappa$ bewahrt, bedeutet also, daß die Kardinalzahlen von M, die $\geq \kappa$ bzw. $\leq \kappa$ sind, zwischen M und $M[G]$ **aufwärts absolut** sind: aus $\delta \in \mathrm{Card}^M$ folgt $\delta \in \mathrm{Card}^{M[G]}$, falls $\delta \geq \kappa$ bzw. $\delta \leq \kappa$.

30.3 Lemma *Sei M ein Grundmodell und $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung für M. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) P bewahrt Kardinalitäten.

(ii) Für jeden P-generischen Filter G über M gilt $\mathrm{Card}^M = \mathrm{Card}^{M[G]}$.

(iii) Für jeden P-generischen Filter G über M ist die $\in$-Formel $x \in \mathrm{Card}$ M-$M[G]$-absolut.

Beweis. „(i)⇒(ii)“. Da Kardinalzahlen abwärts absolut sind, siehe 22.38, gilt $\mathrm{Card}^{M[G]} \subset \mathrm{Card}^M$. Sei nun $\delta \in \mathrm{Card}^M = \{\aleph_\alpha^M \mid \alpha \in \mathrm{On} \cap M\}$.[220] Ist $\delta = \aleph_0^M$, so ist $\delta \in \mathrm{Card}^{M[G]}$ wegen $\aleph_0^M = \aleph_0^{M[G]}$, vgl. 22.38; ist $\delta > \aleph_0^M$, so ist $\delta \in \mathrm{Card}^{M[G]}$, da P Kardinalitäten $\geq \aleph_1^M$ bewahrt.

„(ii)⇒(iii)“. Die Behauptung ist gleichwertig mit $\forall x \in M \, \big((x \in \mathrm{Card})^M \longleftrightarrow (x \in \mathrm{Card})^{M[G]}\big)$, also $\forall x \in M \, \big(x \in \mathrm{Card}^M \longleftrightarrow x \in \mathrm{Card}^{M[G]}\big)$, und dies ist nach (ii) erfüllt.

„(iii)⇒(i)“. Ist $\delta \in \mathrm{On} \cap M$, $\delta \geq \aleph_1^M$, so gilt nach (iii) $(\delta \in \mathrm{Card})^M \longleftrightarrow (\delta \in \mathrm{Card})^{M[G]}$, was mit $\delta \in \mathrm{Card}^M \longleftrightarrow \delta \in \mathrm{Card}^{M[G]}$ gleichwertig ist. QED

Für Konfinalitäten haben wir folgendes Resultat:

30.4 Lemma *Sei M ein Grundmodell und $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung für M. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) P bewahrt Konfinalitäten.

(ii) Für jeden P-generischen Filter G über M gilt $\forall \delta \in \mathrm{On} \cap M \, \big(\mathrm{Lim}(\delta) \longrightarrow \mathrm{cf}(\delta)^M = \mathrm{cf}(\delta)^{M[G]}\big)$.

(iii) Für jeden P-generischen Filter G über M ist der Term $\mathrm{cf}(x)$ M-$M[G]$-absolut.[221]

Beweis. „(i)⇒(ii)“. Sei $\delta \in \mathrm{On} \cap M$ eine Limesordinalzahl. Ist $\mathrm{cf}(\delta)^M \geq \aleph_1^M$, so gilt $\mathrm{cf}(\delta)^M = \mathrm{cf}(\delta)^{M[G]}$ nach Voraussetzung. Ist $\mathrm{cf}(\delta)^M < \aleph_1^M$, so ist $\mathrm{cf}(\delta)^M = \aleph_0^M$. Wegen $\aleph_0^{M[G]} = \omega$ folgt mit 22.40(b) und 22.41(a):

$$\aleph_0^M \leq \mathrm{cf}(\delta)^{M[G]} \leq \mathrm{cf}(\delta)^M = \aleph_0^M.$$

Also gilt auch $\mathrm{cf}(\delta)^{M[G]} = \aleph_0^M$.

„(ii)⇒(iii)“. Sei $x \in M$. Gilt $\neg\, \mathrm{Lim}(x)$, so ist $\mathrm{cf}(x)^M = M \notin M$ und $\mathrm{cf}(x)^{M[G]} = M[G] \notin M[G]$. Ist x eine Limesordinalzahl δ, so gilt nach (ii) $\mathrm{cf}(\delta)^M = \mathrm{cf}(\delta)^{M[G]}$; wegen $\mathbf{ZFC} \vdash \forall \alpha \in \mathrm{On} \, \big(\mathrm{Lim}(\alpha) \longrightarrow \mathrm{cf}(\alpha) \in V\big)$ gilt ferner $\mathrm{cf}(\delta)^M \in M$, $\mathrm{cf}(\delta)^{M[G]} \in M[G]$. Mit 22.28 folgt hieraus die M-$M[G]$-Absolutheit des Termes $\mathrm{cf}(x)$.

---

[220] Beachte 22.37.

[221] Hierbei identifizieren wir $\mathrm{cf}(x)$ mit dem Term $\Big\{y \,\Big|\, \mathrm{Lim}(x) \longrightarrow y \in \min\{\overline{\overline{z}} \mid z \subset x \wedge z \text{ ist unbeschränkt in } x\}\Big\}$, der für $\mathrm{Lim}(x)$ den in 10.17 definierten Wert liefert.

„(iii)⇒(i)“. Sei $\delta \in \mathrm{On} \cap M$ eine Limesordinalzahl. Wie soeben gezeigt, gilt $\mathrm{cf}(\delta)^M \in M$. Aus der M-$M[G]$-Absolutheit des Termes $\mathrm{cf}(x)$ folgt nach 22.28 $\mathrm{cf}(\delta)^M = \mathrm{cf}(\delta)^{M[G]}$. QED

Wir setzen die Bewahrung von Kardinalitäten in Relation zur Nachfolgerbildung und zur $\aleph$-Hierarchie:

30.5 Lemma *Sei M ein Grundmodell, $\kappa \in \mathrm{Card}^M$ und $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung für M, so daß P Kardinalitäten $\leq \kappa$ bewahrt. Sei G ein P-generischer Filter über M. Dann gilt:*
(a) $\forall \lambda < \kappa \left((\lambda^+)^M = (\lambda^+)^{M[G]} \right)$.
(b) $\forall \lambda \leq \kappa \left((\lambda \text{ ist Limeskardinalzahl})^M \longleftrightarrow (\lambda \text{ ist Limeskardinalzahl})^{M[G]} \right)$.
(c) Ist n eine metasprachliche natürliche Zahl mit $\aleph_n^M \leq \kappa$, so gilt $\aleph_n^M = \aleph_n^{M[G]}$.
(d) Ist $\aleph_\omega^M \leq \kappa$, so gilt $\aleph_\omega^M = \aleph_\omega^{M[G]}$.

Beweis. zu (a). Sei $\lambda < \kappa$. Wegen $\mathrm{Card}^{M[G]} \subset \mathrm{Card}^M$ ist $(\lambda^+)^{M[G]} \in \mathrm{Card}^M$. Da $(\lambda^+)^{M[G]} > \lambda$, siehe 22.37(e), gilt also

(1) $\qquad \lambda < (\lambda^+)^M \leq (\lambda^+)^{M[G]}$.

Da aus $\lambda < \kappa$ und $\kappa \in \mathrm{Card}^M$ folgt $(\lambda^+)^M \leq \kappa$ und da P Kardinalitäten $\leq \kappa$ bewahrt, ist $(\lambda^+)^M \in \mathrm{Card}^{M[G]}$. Also sind alle in (1) vorkommenden Werte in $\mathrm{Card}^{M[G]}$. Da $(\lambda^+)^{M[G]}$ nach 22.37(e) das kleinste Element von $\mathrm{Card}^{M[G]}$ ist, das λ übertrifft, muß $(\lambda^+)^M = (\lambda^+)^{M[G]}$ sein.
zu (b). Wegen $\mathbf{ZFC} \vdash \forall \lambda \in \mathrm{On} \left(\lambda \text{ ist Limeskardinalzahl} \longleftrightarrow (\lambda \in \mathrm{Card} \wedge \neg \exists \mu < \lambda\ (\omega \leq \mu \wedge \mu^+ = \lambda) \right)$ folgt

$$\begin{aligned}
(\lambda \text{ ist Limeskardinalzahl})^M &\Longleftrightarrow \lambda \in \mathrm{Card}^M \wedge \neg \exists \mu < \lambda\ (\omega \leq \mu \wedge (\mu^+)^M = \lambda) \\
&\Longleftrightarrow \lambda \in \mathrm{Card}^M \wedge \neg \exists \mu < \lambda\ (\omega \leq \mu \wedge (\mu^+)^{M[G]} = \lambda) \\
&\qquad \text{(wegen (a); beachte } \mu < \lambda \leq \kappa) \\
&\Longleftrightarrow \lambda \in \mathrm{Card}^{M[G]} \wedge \neg \exists \mu < \lambda\ (\omega \leq \mu \wedge (\mu^+)^{M[G]} = \lambda) \\
&\qquad \text{(da } P \text{ Kardinalitäten } \leq \kappa \text{ bewahrt; beachte } \lambda \leq \kappa) \\
&\Longleftrightarrow (\lambda \text{ ist Limeskardinalzahl})^{M[G]}.
\end{aligned}$$

zu(c). Wir führen eine (metasprachliche) Induktion nach n durch.
$n = 0$. Nach 22.38 gilt $\aleph_0^M = \aleph_0^{M[G]}$ ist.
$n = m + 1$. Sei $\aleph_n^M \leq \kappa$. Wegen $\mathbf{ZFC} \vdash \aleph_m < \aleph_n$ gilt $(\aleph_m < \aleph_n)^M$, also $\aleph_m^M < \aleph_n^M$ $(\leq \kappa)$, so daß nach Induktionsvoraussetzung $\aleph_m^M = \aleph_m^{M[G]}$ gilt. Sei $\lambda :\equiv \aleph_m^M = \aleph_m^{M[G]}$. Dann folgt $(\lambda^+)^M = \aleph_{m+1}^M$ und $(\lambda^+)^{M[G]} = \aleph_{m+1}^{M[G]}$ aus 22.37(f). Nach (a) gilt also $\aleph_{m+1}^M = \aleph_{m+1}^{M[G]}$.
zu (d). Es gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbf{ZFC} \vdash \forall\ \lambda \in \mathrm{On}\ \ \lambda = \aleph_\omega \longleftrightarrow \\
&\qquad \big(\ \lambda > \aleph_0 \wedge \lambda \text{ ist Limeskardinalzahl} \wedge \qquad\qquad (*) \\
&\qquad\ \ \forall \mu < \lambda \left((\mu \in \mathrm{Card} \wedge \mu > \aleph_0) \to \neg\, \mu \text{ ist Limeskardinalzahl} \right) \big).
\end{aligned}$$

Sei nun $\lambda :\equiv \aleph_\omega^M$. Dann gilt $(\lambda \in \mathrm{On})^M$ und $(\lambda = \aleph_\omega)^M$. Wegen $\mathbf{ZFC}^M$ folgt also

$$\begin{aligned}
&\lambda > \aleph_0^M \wedge (\lambda \text{ ist Limeskardinalzahl})^M \wedge \\
&\forall \mu < \lambda \left((\mu \in \mathrm{Card}^M \wedge \mu > \aleph_0^M) \to \neg\, (\mu \text{ ist Limeskardinalzahl})^M \right).
\end{aligned}$$

Wegen (b) und weil P Kardinalitäten $\leq \kappa$ bewahrt, können hier alle Relativierungen auf M durch Relativierungen auf $M[G]$ ersetzt werden. Wegen $\mathbf{ZFC}^{M[G]}$ folgt dann aus $(*)$ die Gültigkeit von $\lambda = \aleph_\omega^{M[G]}$. QED

30.6 Corollar *Sei M ein Grundmodell, $\kappa \in \mathrm{Card}^M$ und $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung für M, so daß P Kardinalitäten bewahrt. Sei G ein P-generischer Filter über M. Dann gilt:*
(a) $\forall \lambda \in \mathrm{On} \cap M\ (\lambda^+)^M = (\lambda^+)^{M[G]}$.
(b) $\forall \lambda \big((\lambda \text{ ist Limeskardinalzahl})^M \longleftrightarrow (\lambda \text{ ist Limeskardinalzahl})^{M[G]}\big)$.
(c) Ist n eine metasprachliche natürliche Zahl, so gilt $\aleph_n^M = \aleph_n^{M[G]}$.
(d) $\aleph_\omega^M = \aleph_\omega^{M[G]}$.

Beweis. Dies folgt aus 30.5, da P Kardinalitäten $\leq \kappa$ bewahrt für jedes $\kappa \in \mathrm{Card}^M$. QED

In vielen Fällen kann aus der Bewahrung von Konfinalitäten $\geq \kappa$ (bzw. $\leq \kappa$) auf die Bewahrung von Kardinalitäten $\geq \kappa$ (bzw. $\leq \kappa$) geschlossen werden:

30.7 Satz *Sei $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung für M, $\kappa \in \mathrm{Card}^M$ und es gelte $(\kappa$ ist regulär$)^M$. Bewahrt dann P Konfinalitäten $\geq \kappa$ (bzw. $\leq \kappa$), so bewahrt P Kardinalitäten $\geq \kappa$ (bzw. $\leq \kappa$).*

Beweis. Wir führen den Beweis für $\geq \kappa$; den anderen Fall behandelt man analog. P bewahre also Konfinalitäten $\geq \kappa$ und κ sei in M regulär. Wenn P Kardinalitäten $\geq \kappa$ nicht bewahrt, existiert ein P-generischer Filter G über M und ein $\delta \in \mathrm{On} \cap M$, $\delta \geq \kappa$, so daß $\delta \in \mathrm{Card}^M$ und $\delta \notin \mathrm{Card}^{M[G]}$ gilt, vgl. 30.2. Wähle δ minimal mit dieser Eigenschaft.

(1) $\delta > \kappa$.

Beweis. Wegen $\delta \geq \kappa$, $\delta \notin \mathrm{Card}^{M[G]}$ genügt es, $\kappa \in \mathrm{Card}^{M[G]}$ zu zeigen. Da P Konfinalitäten $\geq \kappa$ bewahrt und $\kappa = \mathrm{cf}(\kappa)^M$ wegen $(\kappa$ ist regulär$)^M$ gilt, ergibt sich $\kappa = \mathrm{cf}(\kappa)^M = \mathrm{cf}(\kappa)^{M[G]}$. Wegen $\mathrm{cf}(\kappa)^{M[G]} \in \mathrm{Card}^{M[G]}$ folgt hieraus $\kappa \in \mathrm{Card}^{M[G]}$. qed(1)

Weiter gilt

(2) $(\neg\ \delta$ ist Limeskardinalzahl$)^M$.

Beweis. Angenommen, δ ist in M eine Limeskardinalzahl. Dann gilt wegen (1)

$$(\delta \text{ ist Limeskardinalzahl } \wedge\ \delta > \kappa)^M.$$

Da $\mathbf{ZFC} \vdash \forall \lambda \exists x \big((\lambda \text{ Limeskardinalzahl } \wedge\ \lambda > \kappa) \longrightarrow (x \neq \emptyset \wedge x \subset \mathrm{Card} \cap]\kappa, \lambda[\wedge \lambda = \bigcup x)\big)$ gilt, existiert also ein $x \in M$, $x \neq \emptyset$, $x \subset \mathrm{Card}^M \cap]\kappa, \delta[$ mit $\delta = \bigcup x$. Wegen der Minimalität von δ ist $\mathrm{Card}^M \cap]\kappa, \delta[\subset \mathrm{Card}^{M[G]}$. Also gilt $\delta = \bigcup x$ mit $x \in M[G]$, $x \neq \emptyset$ und $x \subset \mathrm{Card}^{M[G]}$. Nach 22.39 folgt hieraus $\delta = \bigcup x \in \mathrm{Card}^{M[G]}$. Dies widerspricht der Wahl von δ. Also muß (2) doch richtig sein. qed(2)

Da nach (2) δ in M eine Nachfolgerkardinalzahl ist und $\mathbf{ZFC} \vdash (\gamma \text{ Nachfolgerkardinalzahl } \longrightarrow \mathrm{cf}(\gamma) = \gamma)$ gilt, folgt $\mathrm{cf}(\delta)^M = \delta$. Da P Konfinalitäten $\geq \kappa$ bewahrt, ist $\mathrm{cf}(\delta)^M = \mathrm{cf}(\delta)^{M[G]}$, also $\delta = \mathrm{cf}(\delta)^{M[G]} \in \mathrm{Card}^{M[G]}$. Dies widerspricht der Wahl von δ. Also muß der Satz doch richtig sein. QED

30.8 Corollar *Wenn P Konfinalitäten bewahrt, so bewahrt P auch Kardinalitäten.*

Beweis. Wegen $\mathbf{ZFC} \vdash$ „$\aleph_1$ ist regulär“ gilt $(\kappa$ ist regulär$)^M$ für $\kappa :\equiv \aleph_1^M$. QED

30.2 Kettenbedingungen und Bewahrung „nach oben“.

Wir geben eine kombinatorische Bedingung für Forcing-Halbordnungen an, die Bewahrung von Konfinalitäten bzw. Kardinalitäten $\geq \kappa$ impliziert.

30.9 Satz *Sei $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung für M. Sei $\kappa \in \mathrm{Card}^M$ und es gelte $(P$ hat $\kappa - \mathrm{cc})^M$. Dann bewahrt P Konfinalitäten $\geq \kappa$. Gilt zusätzlich $(\kappa$ ist regulär$)^M$, so bewahrt P Kardinalitäten $\geq \kappa$.*

Beweis. Sei $\kappa \in \mathrm{Card}^M$ und es gelte $(P \text{ hat } \kappa - \mathrm{cc})^M$. Wegen 30.7 genügt es zu zeigen, daß P Konfinalitäten $\geq \kappa$ bewahrt. Sei also G ein P-generischer Filter über M und $\delta \in \mathrm{On} \cap M$ eine Limesordinalzahl mit $\mathrm{cf}(\delta)^M \geq \kappa$. Es ist $\mathrm{cf}(\delta)^M = \mathrm{cf}(\delta)^{M[G]}$ zu zeigen. Wegen $M \subset M[G]$ gilt nach 22.41 $\mathrm{cf}(\delta)^M \geq \mathrm{cf}(\delta)^{M[G]}$, so daß noch $\lambda :\equiv \mathrm{cf}(\delta)^{M[G]} \geq \mathrm{cf}(\delta)^M$ zu zeigen ist. Hierzu ist zu verifizieren, daß

$$(*) \qquad \exists z \in M \left(\overline{\overline{z}}^M \leq \lambda \wedge z \text{ ist unbeschränkt in } \delta\right),$$

also

$$(**) \qquad \left(\exists z \left(\overline{\overline{z}} \leq \lambda \wedge z \text{ ist unbeschränkt in } \delta\right)\right)^M$$

gilt. Wähle hierzu $f \in M[G]$, $f \colon \lambda \to \delta$, so daß $\mathrm{ran}(f)$ konfinal in δ ist.[222] Sei $f = \dot{f}^G$ mit $\dot{f} \in M$. Nach dem Forcing-Theorem existiert $p \in G$ mit $p \Vdash \dot{f} \colon \check{\lambda} \to \check{\delta}$. Um $(**)$ zu beweisen, arbeiten wir in M; d.h., wir haben (in M) ein z anzugeben mit $\overline{\overline{z}} \leq \lambda$, so daß z unbeschränkt in δ ist. Wir setzen (in M!) für $\gamma < \lambda$

$$z_\gamma :\equiv \left\{\beta < \delta \;\middle|\; \exists q \leq p \; q \Vdash^* \dot{f}(\check{\gamma}) = \check{\beta}\right\}$$

und definieren $z :\equiv \bigcup\left\{z_\gamma \;\middle|\; \gamma < \lambda\right\}$. Dann gilt

(1) $\quad z$ ist unbeschränkt in δ.

Beweis. Sei $\alpha < \delta$ beliebig.

(1.1) $\quad \exists \beta < \delta \, \exists q \in P \, \exists \gamma < \lambda \left(\alpha < \beta \wedge q \leq p \wedge q \Vdash^* \dot{f}(\check{\gamma}) = \check{\beta}\right)$.

Beweis. Wir beweisen (1.1) in V, d.h., wir haben zu zeigen

$$\left(\exists \beta < \delta \, \exists q \in P \, \exists \gamma < \lambda \left(\alpha < \beta \wedge q \leq p \wedge q \Vdash^* \dot{f}(\check{\gamma}) = \check{\beta}\right)\right)^M.$$

Durch Hineinziehen der Relativierung und Anwendung des Forcing-Theorems wird dies zu

$$\exists \beta < \delta \, \exists q \in P \, \exists \gamma < \lambda \left(\alpha < \beta \wedge q \leq p \wedge q \Vdash \dot{f}(\check{\gamma}) = \check{\beta}\right).$$

Da $\mathrm{ran}(f)$ unbeschränkt in δ ist, existiert ein $\gamma < \lambda$ mit $\beta :\equiv f(\gamma) > \alpha$. Wegen $\left(\dot{f}^G(\gamma)\right)^{M[G]} = \left(\dot{f}^G\right)^{M[G]}(\gamma)$ (siehe 22.25) und $\left(\dot{f}^G\right)^{M[G]} = \dot{f}^G$ (siehe 27.23) folgt $\left(\dot{f}^G(\gamma) = \beta\right)^{M[G]}$. Nach dem Forcing-Theorem existiert ein $r \in G$ mit $r \Vdash \dot{f}(\check{\gamma}) = \check{\beta}$. Sei $q \in G$ eine gemeinsame Verstärkung von p und r. Dann gilt $q \leq p$ und $q \Vdash \dot{f}(\check{\gamma}) = \check{\beta}$. β, q und γ sind also wie benötigt. qed(1.1)

Seien $\beta > \alpha$, $q \leq p$ und $\gamma < \lambda$ wie in (1.1). Dann ist $\beta \in z_\gamma \subset z$. β ist also wie benötigt. qed(1)

Sei $\kappa_\gamma :\equiv \overline{\overline{z_\gamma}}$.[223]

(2) $\quad \kappa_\gamma < \kappa$.

Beweis. Zu $\beta \in z_\gamma$ wähle $q_\beta \leq p$ mit $q_\beta \Vdash^* \dot{f}(\check{\gamma}) = \check{\beta}$.

(2.1) $\quad$ Ist $\beta \neq \beta'$ so ist $q_\beta \perp q_{\beta'}$

Beweis. Wir arbeiten in V. Dann gilt nach Wahl von β, β': $q_\beta \Vdash \dot{f}(\check{\gamma}) = \check{\beta}$ und $q_{\beta'} \Vdash \dot{f}(\check{\gamma}) = \check{\beta}'$. Angenommen, $q_\beta \parallel q_{\beta'}$. Sei q eine gemeinsame Verstärkung von q_β und $q_{\beta'}$. Dann gilt $q \Vdash \dot{f} \colon \check{\lambda} \to \check{\delta}$ (wegen $p \Vdash \dot{f} \colon \check{\lambda} \to \check{\delta}$), $q \Vdash \dot{f}(\check{\gamma}) = \check{\beta}$ und $q \Vdash \dot{f}(\check{\gamma}) = \check{\beta}'$. Sei H ein P-generischer Filter über M mit $q \in H$. Dann gilt

$$\left(\dot{f}^H \colon \lambda \to \delta \wedge \dot{f}^H(\gamma) = \beta \wedge \dot{f}^H(\gamma) = \beta'\right)^{M[H]},$$

[222] Dies gilt zunächst nur in $M[G]$; wegen der Absolutheit der Formel „y ist unbeschränkt in x“ und des Termes $\mathrm{ran}(f)$ gilt dies nach 22.31 auch in V. Derartige Probleme zu erkennen und die entsprechenden Überlegungen durchzuführen überlassen wir im folgenden i.a. dem Leser.

[223] Wir arbeiten jetzt wieder in M.

woraus $(\beta = \beta')^{M[H]}$, also $\beta = \beta'$ folgt, ein Widerspruch. Also gilt $q_\beta \parallel q_{\beta'}$, nach 27.4 also $(q_\beta \parallel q_{\beta'})^M$. Dies war zu zeigen. qed(2.1)

Nach (2.1) ist die Zuordnung $\beta \mapsto q_\beta$ injektiv und $A :\equiv \{q_\beta \mid \beta \in z_\gamma\}$ eine Antikette in P. Da P κ-cc ist, ist $\overline{\overline{A}} < \kappa$. Es folgt $\overline{\overline{z_\gamma}} \leq \overline{\overline{A}} < \kappa$. qed(2)

Mit (2) können wir zeigen:

(3) $\lambda \geq \kappa$.

Beweis. Angenommen, $\lambda < \kappa$. Für $\gamma < \lambda$ sei $\delta_\gamma :\equiv \bigcup z_\gamma$. Wegen $\kappa_\gamma < \kappa \leq \mathrm{cf}(\delta)$ ist $\delta_\gamma < \delta$. Wegen $\lambda < \kappa \leq \mathrm{cf}(\delta)$ gilt dann $\bar{\delta} :\equiv \bigcup\{\delta_\gamma \mid \gamma < \lambda\} < \delta$. Also ist z nicht unbeschränkt in δ, denn nach Wahl der δ_γ gilt $z \subset \bar{\delta}$. Dies widerspricht (1). Somit muß (3) doch richtig sein. qed(3)

Wir erhalten also

$$\overline{\overline{z}} \leq \sum_{\gamma<\lambda} \overline{\overline{z_\gamma}} = \lambda \cdot \sup_{\gamma<\lambda} \kappa_\gamma \overset{(2)}{\leq} \lambda \cdot \kappa \overset{(3)}{=} \lambda.$$

Dies war zu zeigen. QED

30.10 Corollar *Wenn P ccc hat, so bewahrt P Konfinalitäten und Kardinalitäten.*

30.3 Abgeschlossenheit und Bewahrung „nach unten“.

Wir analysieren Forcing-Halbordnungen, die Konfinalitäten bzw. Kardinalitäten $\leq \kappa$ bewahren. Die hierfür zuständige kombinatorische Eigenschaft der Forcing-Halbordnung ist ihre „Abgeschlossenheit“.

30.11 Definition Sei $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung und $\kappa \in \mathrm{Card}$. P ist **κ-abgeschlossen** $:\equiv$ $\forall \lambda < \kappa\, \forall p \in {}^{\lambda}P\, \exists q \in P\, \Big(\forall i, j \in \lambda\, \big(i < j \to p(j) \leq p(i)\big) \longrightarrow \forall i < \lambda\; q \leq p(i)\Big)$.

30.12 Bemerkung P ist also genau dann κ-abgeschlossen, wenn jede absteigende $\leq$-Kette in P, die kürzer ist als κ, eine untere Schranke in P hat.

30.13 Beispiel $\mathrm{Fn}(a, b, \mu)$ ist $\mathrm{cf}(\mu)$-abgeschlossen. Ist nämlich $\lambda < \mathrm{cf}(\mu)$ und $\big(p_i \mid i < \lambda\big)$ eine absteigende $\leq$-Kette, so setze $p :\equiv \bigcup_{i<\lambda} p_i$. Dann gilt $p{:}\, a \supset\!\!\to b$, da $p_i \subset p_j$ für $i < j$ gilt. Ferner gilt $\overline{\overline{p}} = \sup_{i<\lambda} \overline{\overline{p_i}} < \mu$, denn wegen $\lambda < \mathrm{cf}(\mu)$ ist $\{\overline{\overline{p_i}} \mid i < \lambda\}$ nicht unbeschränkt in μ. Es folgt $p \in \mathrm{Fn}(a, b, \mu)$ und somit $p \leq p_i$ für alle $i < \lambda$.

Das folgende „Abgeschlossenheitsresultat“ besagt, daß man zu M durch Forcing mit einer κ-abgeschlossenen Forcing-Halbordnung für M keine neuen Funktionen zwischen Elementen von M hinzufügen kann, deren Definitionsbereich „klein“ ist.

30.14 Satz *Sei M ein Grundmodell, $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung für M und G ein P-generischer Filter über M. Sei $\kappa \in \mathrm{Card}^M$ und es gelte (P ist κ-abgeschlossen)^M. Sind dann $a, b \in M$ mit $\overline{\overline{a}}^M < \kappa$ und ist $f \in M[G]$ mit $f{:}\, a \to b$, so gilt sogar $f \in M$.*

Beweis. Es genügt, den Spezialfall $A = \alpha < \kappa$ mit $\mathrm{Lim}(\alpha)$ zu betrachten. Wähle nämlich ein $g \in M$ mit $g{:}\, \overline{\overline{a}}^M \xrightarrow{bij.} a$ und setze $\alpha :\equiv \overline{\overline{a}}^M$. Dann ist $h :\equiv f \circ g \in M[G]$, denn $\mathbf{ZFC} \vdash \forall f, g\, \exists h\; h = f \circ g$ impliziert $(f \circ g)^{M[G]} \in M[G]$ und es gilt $(f \circ g)^{M[G]} = f \circ g$, wie man leicht verifiziert. Wegen $h{:}\, \alpha \to b$ folgt $h \in M$ aus dem Spezialfall. Dies impliziert $f = h \circ g^{-1} \in M$, denn mit g ist auch g^{-1} in M. Es genügt also, den Spezialfall zu zeigen.
Sei also $\alpha < \kappa$, $\mathrm{Lim}(\alpha)$ und $f{:}\, \alpha \to b$, $f \in M[G]$. Wir nehmen an, daß $f \notin M$ ist, und leiten einen Widerspruch her. Sei $F :\equiv \big({}^{\alpha}b\big)^M$ $(= {}^{\alpha}b \cap M$ nach 22.25). Dann gilt

(1) $\quad f\colon \alpha \to b \wedge f \notin F.$

Wegen **ZFC** $\vdash \forall u, v \exists w\; w = {}^{u}v$ gilt $\forall u, v \in M\; \exists w \in M\; w = \left({}^{u}v\right)^{M}$, so daß wir $F \in M$ haben. Sei $\dot{f} \in M$ ein Name für f. (1) impliziert $\left(\dot{f}^{G}\colon \check{\alpha}^{G} \to \check{b}^{G} \wedge \dot{f}^{G} \notin \check{F}^{G}\right)^{M[G]}$ aufgrund der Absolutheit der beteiligten $\in$-Formeln und Terme. Nach dem Forcing-Theorem existiert ein $p \in G$ mit

(2) $\quad p \Vdash (\dot{f}\colon \check{\alpha} \to \check{b} \wedge \dot{f} \notin \check{F}).$

Wir arbeiten nun in M. Definiere durch simultane Rekursion eine bzgl. $\leq$ absteigende Folge

$$\left(p_\beta \mid \beta \leq \alpha\right) \in {}^{(\alpha+1)}P$$

und eine Folge

$$g = \left(y_\beta \mid \beta < \alpha\right) \in {}^{\alpha}b$$

wie folgt:

Setze $p_0 :\equiv p$.
Gilt $\operatorname{Lim}(\beta)$, so sei p_β eine untere Schranke zu $\left\{p_\gamma \mid \gamma < \beta\right\}$ in P. Eine derartige Schranke existiert, da P κ-abgeschlossen und $\beta \leq \alpha < \kappa$ ist.
Ist schließlich $\beta < \alpha$ und sind p_β und $\left\{y_\gamma \mid \gamma < \beta\right\}$ bereits definiert, so sei $p_{\beta+1} \in P$ und $y_\beta \in b$ derart gewählt, daß $p_{\beta+1} \Vdash^{*} \dot{f}(\check{\beta}) = \check{y_\beta}$ gilt. Wir wählen diese Elemente mit Hilfe von **(AC)** durch Auswahl aus der Menge $\left\{(q, y) \mid q \leq p_\beta \wedge q \Vdash^{*} \dot{f}(\check{\beta}) = \check{y} \wedge y \in b\right\}$. Hierzu ist zu zeigen:

(3) $\quad \left\{(q, y) \mid q \leq p_\beta \wedge q \Vdash^{*} \dot{f}(\check{\beta}) = \check{y} \wedge y \in b\right\} \neq \emptyset.$

Beweis. Wir beweisen dies in V. Aus der Sicht von V bedeutet (3):

$$\left(\left\{(q, y) \mid q \leq p_\beta \wedge q \Vdash^{*} \dot{f}(\check{\beta}) = \check{y} \wedge y \in b\right\} \neq \emptyset\right)^{M}.$$

Durch „Hineinziehen“ der Relativierung folgt leicht m.H. der üblichen Absolutheitsargumente sowie des Forcing-Theorems, daß dies gleichwertig ist zu

$(*)$ $\quad A :\equiv \left\{(q, y) \mid q \leq p_\beta \wedge q \Vdash \dot{f}(\check{\beta}) = \check{y} \wedge y \in b\right\} \neq \emptyset.$

Beweisen wir also $(*)$. Nach Konstruktion gilt $p_\beta \leq p$, so daß aus (2) $p_\beta \Vdash \dot{f}\colon \check{\alpha} \to \check{b}$ folgt. Sei H ein P-generischer Filter über M mit $p_\beta \in H$. Dann gilt $\left(\dot{f}^{H}\colon \alpha \to b\right)^{M[H]}$. Also existiert ein $y \in b$ mit $\left(\dot{f}^{H}(\beta) = y\right)^{M[H]}$. Nach dem Forcing-Theorem existiert ein $r \in H$ mit $r \Vdash \dot{f}(\check{\beta}) = \check{y}$. Sei $q \in H$ eine gemeinsame Verstärkung von p_β, r. Dann gilt $q \leq p_\beta$ und $q \Vdash \dot{f}(\check{\beta}) = \check{y}$. Also ist $(q, y) \in A$ und $(*)$ bewiesen. qed(3)

Damit sind die Folgen konstruiert. Wir arbeiten nun wieder in V. Da g in M konstruiert wurde, gilt $g \in M$, also

(4) $\quad g \in {}^{\alpha}b \cap M = F.$

Sei H ein P-generischer Filter über M mit $p_\alpha \in H$. Wegen $p_\alpha \leq p$ und $p \Vdash (\dot{f}\colon \check{\alpha} \to \check{b} \wedge \dot{f} \notin \check{F})$ folgt $p_\alpha \Vdash (\dot{f}\colon \check{\alpha} \to \check{b} \wedge \dot{f} \notin \check{F})$, so daß nach dem Forcing-Theorem

(5) $\quad \left(\dot{f}^{H}\colon \alpha \to b \wedge \dot{f}^{H} \notin F\right)^{M[H]}$

gilt. Ist andererseits $\beta < \alpha$, so gilt nach Konstruktion *in M* $p_{\beta+1} \Vdash^{*} \dot{f}(\check{\beta}) = \check{y_\beta}$, also in V

$$\left(p_{\beta+1} \Vdash^{*} \dot{f}(\check{\beta}) = \check{y_\beta}\right)^{M},$$

d.h., $p_{\beta+1} \Vdash \dot f(\check\beta) = \check{y_\beta}$. Wegen $p_\alpha \leq p_{\beta+1}$ ist $p_{\beta+1} \in H$, so daß das Forcing-Theorem $\big(\dot f^H(\beta) = y_\beta\big)^{M[H]}$ impliziert. Da $\beta < \alpha$ beliebig war, ergibt sich $\big(\forall\beta < \alpha\ \dot f^H(\beta) = g(\beta)\big)^{M[H]}$; beachte $y_\beta = g(\beta)$. Wegen

$$\mathbf{ZFC} \vdash \big(f_1\colon \alpha \to V\ \wedge\ f_2\colon \alpha \to V\ \wedge\ \forall\beta < \alpha\ f_1(\beta) = f_2(\beta)\big) \longrightarrow f_1 = f_2$$

folgt hieraus in Verbindung mit (5) $\big(\dot f^H = g\ \wedge\ \dot f^H \notin F\big)^{M[H]}$, also insbesondere $\big(g \notin F\big)^{M[H]}$, was zu $g \notin F$ äquivalent ist. Dies widerspricht (4). Unsere Annahme, daß $f \notin M$ gilt, muß also falsch sein. Damit ist der Satz bewiesen. QED

30.15 Corollar *Sei M ein Grundmodell, $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung für M und G ein P-generischer Filter über M. Sei $\kappa \in \mathrm{Card}^M$ und es gelte $\big(P$ ist κ-abgeschlossen$\big)^M$. Dann gilt*

$$\forall\alpha < \kappa\ \big({}^\alpha\,\mathrm{On}\big)^M = \big({}^\alpha\,\mathrm{On}\big)^{M[G]}.$$

Beweis. zu „$\subset$“. Es gilt

$$\begin{aligned}
\big({}^\alpha\,\mathrm{On}\big)^{M[G]} &= {}^\alpha\big(\mathrm{On} \cap M[G]\big) \cap M[G]\\
&= {}^\alpha\big(\mathrm{On} \cap M\big) \cap M[G]\\
&\supset {}^\alpha\big(\mathrm{On} \cap M\big) \cap M \qquad\qquad (*)\\
&= \big({}^\alpha\,\mathrm{On}\big)^M.
\end{aligned}$$

zu „$\supset$“. Wegen $\mathbf{ZFC} \vdash \forall\alpha \in \mathrm{On}\ \forall f\ \exists\beta \in \mathrm{On}\ \big(f \in {}^\alpha\,\mathrm{On} \longrightarrow f\colon \alpha \to \beta\big)$ folgt

$$\forall\alpha \in \mathrm{On} \cap M[G]\ \forall f \in M[G]\ \exists\beta \in \underbrace{\mathrm{On} \cap M[G]}_{=\mathrm{On} \cap M} \Big(f \in \big({}^\alpha\,\mathrm{On}\big)^{M[G]} \longrightarrow f\colon \alpha \to \beta\Big).$$

Ist also $f \in \Big({}^\alpha\,\mathrm{On}\Big)^{M[G]}$, so gilt $f\colon \alpha \to \beta$ mit $\beta \in M$. Nach dem Satz gilt $f \in M$ wegen $\alpha < \kappa$. Also ist f ein Element der rechten Seite von $(*)$, also von $\big({}^\alpha\,\mathrm{On}\big)^M$. QED

Nun erhalten wir das folgende Bewahrungsresultat für Konfinalitäten bzw. Kardinalitäten:

30.16 Satz *Sei M ein Grundmodell, $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung für M. Sei $\kappa \in \mathrm{Card}^M$ und es gelte $\big(P$ ist κ-abgeschlossen$\big)^M$. Dann bewahrt P Konfinalitäten $\leq \kappa$. Ist überdies κ regulär in M, so bewahrt P auch Kardinalitäten $\leq \kappa$.*

Beweis. Wegen 30.7 genügt es, die Aussage über die Konfinalitäten zu beweisen. Sei $\delta \in \mathrm{On} \cap M$ eine Limesordinalzahl mit $\mathrm{cf}(\delta)^M \leq \kappa$. Wegen $M \subset M[G]$ gilt nach 22.41 $\mathrm{cf}(\delta)^{M[G]} \leq \mathrm{cf}(\delta)^M$. Sei $\alpha :\equiv \mathrm{cf}(\delta)^{M[G]}$. Sei $f\colon \alpha \to \delta$, $f \in M[G]$, eine Funktion, deren Wertebereich unbeschränkt in δ ist. Wäre

$(*)\qquad \alpha < \mathrm{cf}(\delta)^M,$

so wäre auch $\alpha < \kappa$, so daß aus 30.14 $f \in M$ folgt. Dann ist $x :\equiv \mathrm{ran}(f) \in M$ eine in δ unbeschränkte Menge und es gilt

$$\overline{\overline{x}}^M = \overline{\overline{\mathrm{ran}(f)}}^M \leq \overline{\overline{\mathrm{dom}(f)}}^M \leq \big(\mathrm{dom}(f)\big)^M = \alpha,$$

so daß $\mathrm{cf}(\delta)^M \leq \alpha$ ist, was $(*)$ widerspricht. Also ist $(*)$ falsch, d.h., $\mathrm{cf}(\delta)^{M[G]} = \alpha \geq \mathrm{cf}(\delta)^M$. Dies war noch zu zeigen. QED

30.4 Kanonische Namen.

Wir präsentieren ein Verfahren, zu $M[G]$-Teilmengen von Elementen von M einen „kanonischen Namen“ zu konstruieren. Diese Namen sind insbesondere dann von Bedeutung, wenn die betrachtete Forcing-Halbordnung eine Kettenbedingung erfüllt. Da in die Konstruktion dieser Namen gewisse Antiketten involviert sind, läßt sich dann die Anzahl dieser Namen (und damit die Anzahl der $M[G]$-Teilmengen eines jeden $x \in M$) leicht nach oben abschätzen.

30.17 Satz (Definition kanonischer Namen für Teilmengen von Elementen von M bzgl. P) *Sei M ein Grundmodell und $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung für M. Sei $x \in M$ und $\dot{y} \in M$. Für $z \in x$ sei $B_z :\equiv \{p \in P \mid p \Vdash \check{z} \in \dot{y} \ \vee\ p \Vdash \check{z} \notin \dot{y}\}$. Sei $A = (A_z \mid z \in x) \in M$, so daß $A_z \subset B_z$ eine Antikette, maximal mit dieser Eigenschaft ist.*[224] *Sei $\tilde{y} :\equiv \{(\check{z}, p) \mid z \in x \wedge p \in A_z \wedge p \Vdash \check{z} \in \dot{y}\}$. Dann gilt $\tilde{y} \in M$ und $1_P \Vdash (\dot{y} \subset \check{x} \longrightarrow \dot{y} = \tilde{y})$. M.a.W.: ist G ein P-generischer Filter über M, so gilt $\dot{y}^G \subset x \longrightarrow \dot{y}^G = \tilde{y}^G$. $\tilde{y}$ heißt auch* **kanonischer Name für** *$\dot{y}^G$ (bzgl. $(P, \leq, 1_P)$).*

Beweis. $\tilde{y} \in M$ folgt, da $\Vdash$ in M definiert werden kann und $A \in M$ gilt. Sei nun G ein P-generischer Filter über M und es gelte $\dot{y}^G \subset x$. Wir zeigen $\dot{y}^G = \tilde{y}^G$.

zu „$\subset$“. Sei $z \in \dot{y}^G$. Sei $D :\equiv \{q \in P \mid \exists p \in A_z\ q \leq p\}$. Dann ist $D \in M$.

(1) D ist dicht in P.

Beweis. Sei $r \in P$. Da B_z dicht in P ist,[225] existiert ein $s \in B_z$ mit $s \leq r$. Ist $s \in A_z$, so sind wir fertig: es ist $s \in D$ und $s \leq r$. Ist $s \notin A_z$, so ist $A_z \cup \{s\} \subset B_z$ ein Element von M und eine echte Obermenge von A_z. Wegen der Maximalität von A_z kann dann $A_z \cup \{s\}$ keine Antikette sein. Also existiert ein $p \in A_z$ mit $s \parallel p$. Sei $q \in P$ eine gemeinsame Verstärkung von s und p. Dann ist $q \in D$ und $q \leq r$. qed(1)

Sei $q \in G \cap D$. Sei $p \in A_z$ mit $q \leq p$. Dann ist $p \in G$ wegen $q \in G$, so daß $p \in A_z \cap G$ gilt. $z \in \dot{y}^G$ impliziert $(\check{z}^G \in \dot{y}^G)^{M[G]}$, so daß nach dem Forcing-Theorem ein $r \in G$ mit $r \Vdash \check{z} \in \dot{y}$ existiert. Da p und r als Elemente des Filters G kompatibel sind, kann nicht $p \Vdash \check{z} \notin \dot{y}$ gelten. Aus $p \in A_z \subset B_z$ folgt also $p \Vdash \check{z} \in \dot{y}$. Also ist $(\check{z}, p) \in \tilde{y}$. Wegen $p \in G$ impliziert dies $z = \check{z}^G \in \tilde{y}^G$.

zu „$\supset$“. Sei $v \in \tilde{y}^G$. Dann existiert nach Definition von $\tilde{y}$ ein Paar $(\check{z}, p) \in \tilde{y}$ mit $z \in x$ und $p \in G$, so daß $v = \check{z}^G\ (= z)$ ist. Aus $(\check{z}, p) \in \tilde{y}$ folgt $p \Vdash \check{z} \in \dot{y}$. Wegen $p \in G$ führt dies nach dem Forcing-Theorem auf $(\check{z}^G \in \dot{y}^G)^{M[G]}$, also $(v =)\ z \in \dot{y}^G$. Dies war zu zeigen. QED

30.18 Bemerkung Wir konstruieren zu $x \in M$ eine Funktion $A: x \to M$, $A \in M$, mit den im Satz genannten Eigenschaften. Hierzu arbeiten wir in M. Wir setzen für $z \in x$

$$\mathcal{A}_z :\equiv \{A \mid A \text{ ist maximale Antikette in } B_z\}.$$

Nach Zorns Lemma ist $\mathcal{A}_z \neq \emptyset$: $\{A \mid A \text{ ist Antikette in } B_z\}$ enthält $\emptyset$ als Element und die Vereinigung jeder $\subset$-Kette von Antiketten ist wieder eine Antikette; nach Zorns Lemma hat diese Menge ein maximales Element und dies gehört zu $\mathcal{A}_z$. Betrachte die durch $(\mathcal{A}_z \mid z \in x)$ gegebene Funktion. Nach **(AC)** existiert ein $A \in \times_{z \in x} \mathcal{A}_z$. Dann ist A wie gewünscht; beachte, daß die Eigenschaft, maximale Antikette zu sein, M-V-absolut ist, vgl. 27.4.

Wir können die Anzahl der kanonischen Namen für $x \in M$ bzgl. P leicht nach oben abschätzen:

30.19 Lemma *Sei M ein Grundmodell, $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung für M, $\kappa \in \mathrm{Card}^M$ und $x \in M$. Sei $Z :\equiv \{\tilde{y} \in M \mid \tilde{y} \text{ ist kanonischer Name für eine Teilmenge von } x \text{ bzgl. } P\}$. Dann gilt $Z \in M$. Ferner ergibt sich:*

(a) Sei $\lambda_0 :\equiv (2^{\overline{\overline{x}} \cdot \overline{\overline{P}}})^M$. Dann gilt $\overline{\overline{Z}}^M \leq \lambda_0$.

[224] Wir zeigen in 30.18 die Existenz von A.
[225] siehe 28.25

(b) Es gelte $\big(P$ *hat* κ^+-cc$\big)^M$. *Sei* $\lambda_1 :\equiv \big(\overline{\overline{P}}^{\overline{\overline{x}}\cdot\kappa}\big)^M$. *Dann gilt* $\overline{\overline{Z}}^M \leq \lambda_1$.

Beweis. Sei $Y :\equiv \big\{v \in M \bigm| v \subset \{\check{z} \,|\, z \in x\} \times P\big\}$. Dann gilt

(1) $Y \in M$.

Beweis. Sei $B :\equiv \big\{w \bigm| \exists z \in x\ w = \check{z}\big\}$. Dann gilt wegen der M-V-Absolutheit des Termes $\check{z}$

$$B = \big\{w \in M \bigm| \exists z \in x\ w = \check{z}\big\} = \big\{w \in M \bigm| \exists z \in x\ (w = \check{z})^M\big\},$$

also $B \in M$ nach $(\mathbf{Ers})^M$. Damit folgt $B \times P \in M$ und somit $Y = \mathrm{Pot}(B \times P)^M \in M$. qed(1)

Wegen

$$\begin{aligned} Z &= \Big\{\tilde{y} \Bigm| \tilde{y} \text{ ist kanonischer Name für eine Teilmenge von } x \text{ bzgl. } P\Big\} \\ &= \Big\{\tilde{y} \Bigm| \exists \dot{y} \in M\, \exists A \in \big(\textstyle\times_{z\in x} \mathcal{A}_z\big)^M\ \tilde{y} = \big\{(\check{z}, p) \bigm| z \in x \wedge p \in A_z \wedge p \Vdash \check{z} \in \dot{y}\big\}\Big\}^{226} \\ &= \Big\{\tilde{y} \Bigm| \big(\exists \dot{y}\, \exists A \in \textstyle\times_{z\in x} \mathcal{A}_z\ \tilde{y} = \big\{(\check{z}, p) \bigm| z \in x \wedge p \in A_z \wedge p \Vdash^* \check{z} \in \dot{y}\big\}\big)^M\Big\} \end{aligned}$$

ist Z in M definierbar. Wegen $Z \subset Y \in M$ und $(\mathbf{Aus})^M$ gilt $Z \in M$. Überdies folgt $\overline{\overline{Z}}^M \leq \overline{\overline{Y}}^M$. Wegen $\big(Y = \mathrm{Pot}(B \times P)\big)^M$ und $\big(\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{x}}\big)^M$ gilt

(2) $\overline{\overline{Y}}^M \leq \lambda_0$.

Es seien nun die Voraussetzungen von (b) erfüllt. Sei

$$Y' :\equiv \big\{v \in Y \bigm| \overline{\overline{v}}^M \leq \overline{\overline{x}}^M \cdot \kappa\big\} = \big\{v \in Y \bigm| \big(\overline{\overline{v}} \leq \overline{\overline{x}} \cdot \kappa\big)^M\big\}.$$

Dann gilt

(3) $Y' \in M$

nach $(\mathbf{Aus})^M$. Ist $\tilde{y}$ ein kanonischer Name für eine Teilmenge von x, so gilt

(4) $\tilde{y} \in Y'$.

Beweis. Es ist nur zu zeigen, daß $\overline{\overline{\tilde{y}}}^M \leq \overline{\overline{x}}^M \cdot \kappa$, d.h., $\big(\overline{\overline{\tilde{y}}} \leq \overline{\overline{x}} \cdot \kappa\big)^M$ gilt. Arbeite hierzu in M. Dann ist $\tilde{y} \subset \bigcup_{z\in x}\{\check{z}\} \times A_z$. Da P die κ^+-cc hat und A_z eine Antikette ist, gilt $\overline{\overline{A_z}} \leq \kappa$, so daß

$$\overline{\overline{\tilde{y}}} \leq \sum_{z\in x} \overline{\overline{A_z}} \leq \sum_{z\in x} \kappa \leq \overline{\overline{x}} \cdot \kappa$$

folgt. Dies war zu zeigen. qed(4)

Aus (4) folgt $Z \subset Y'$. (b) folgt also aus

(5) $\overline{\overline{Y'}}^M \leq \lambda_1$.

Beweis. Wir arbeiten in M. Wegen $\mathbf{ZFC} \vdash \forall a\, \forall \nu \in \mathrm{Card}\ \overline{\overline{\big\{v \subset a \bigm| \overline{\overline{v}} \leq \nu\big\}}} \leq \overline{\overline{a}}^\nu$, siehe 11.3 und 11.6, folgt

$$\overline{\overline{Y'}} = \overline{\overline{B \times P}}^{\overline{\overline{x}}\cdot\kappa} = (\overline{\overline{x}} \cdot \overline{\overline{P}})^{\overline{\overline{x}}\cdot\kappa}.$$

[226] Hierbei ist $\mathcal{A}_z$ wie in 30.18.

Wegen

$$(\overline{\overline{x}}\cdot\overline{\overline{P}})^{\overline{\overline{x}}\cdot\kappa}=\overline{\overline{x}}^{\overline{\overline{x}}\cdot\kappa}\cdot\overline{\overline{P}}^{\overline{\overline{x}}\cdot\kappa}\leq(\overline{\overline{x}}\cdot\kappa)^{\overline{\overline{x}}\cdot\kappa}\cdot\overline{\overline{P}}^{\overline{\overline{x}}\cdot\kappa}=2^{\overline{\overline{x}}\cdot\kappa}\cdot\overline{\overline{P}}^{\overline{\overline{x}}\cdot\kappa}=\overline{\overline{P}}^{\overline{\overline{x}}\cdot\kappa}$$

impliziert dies die Behauptung. qed(5)

Damit ist der Satz bewiesen. QED

Wir erhalten nun das folgende Resultat die Anzahl der Teilmengen von $x \in M$ in $M[G]$ betreffend.

30.20 Satz *Sei M ein Grundmodell und $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung für M, $\kappa \in \mathrm{Card}^M$ und $x \in M$.*
(a) $1_P \Vdash \overline{\overline{\mathrm{Pot}(\check{x})}} \leq \check{\lambda}_0$.
(b) Es gelte $\big(P$ hat κ^+-cc$\big)^M$. Dann gilt $1_P \Vdash \overline{\overline{\mathrm{Pot}(\check{x})}} \leq \check{\lambda}_1$.

Beweis. Sei G ein P-generischer Filter über M.
zu (a). Es ist $\big(\overline{\overline{\mathrm{Pot}(x)}} \leq \lambda_0\big)^{M[G]}$ zu zeigen. Hierzu zeigen wir

$$(*) \qquad \Big(\exists f\, \exists Z\, \big(\overline{\overline{Z}} \leq \lambda_0 \wedge f\colon Z \overset{surj.}{\longrightarrow} \mathrm{Pot}(x)\big)\Big)^{M[G]}.$$

Wir wählen Z wie in 30.19. Dann gilt $Z \in M$ und $\overline{\overline{Z}}^M \leq \lambda_0$. Hieraus folgt wegen $M \subset M[G]$ nach 22.38 $\overline{\overline{Z}}^{M[G]} \leq \lambda_0$. Nach 29.9 (mit $N :\equiv M[G]$) ist $f :\equiv \mathrm{int}_G \restriction Z \in M[G]$; hierbei ist $\mathrm{int}_G\colon M \to M[G]$ die durch $\dot{x} \mapsto \dot{x}^G$ definierte Funktion. Da jedes $y \in \mathrm{Pot}(x) \cap M[G]$ einen Namen in Z hat, und umgekehrt offenbar $\dot{y}^G \in \mathrm{Pot}(x) \cap M[G]$ für jedes $\dot{y} \in Z$ gilt, ist $\mathrm{int}_G \restriction Z$ eine Surjektion von Z auf $\mathrm{Pot}(x)^{M[G]}$. Wir haben damit gezeigt:

$$\exists f \in M[G]\, \exists Z \in M[G]\ \overline{\overline{Z}}^{M[G]} \leq \lambda_0 \wedge f\colon Z \overset{surj.}{\longrightarrow} \mathrm{Pot}(x)^{M[G]}.$$

Dies ist äquivalent zu $(*)$. Damit ist (a) bewiesen.
zu (b). Dies beweist man anlog m.H. 30.19(b). QED

31 Cohen-Forcing.

Hauptziel dieses Kapitels ist es die relative Konsistenz von **CH** und ¬**CH** mit **ZFC** zu beweisen. Die hier dargestellten Forcings benutzen Forcing-Halbordnungen der Art $\mathrm{Fn}(a, b, \mu)$ und gehen auf Paul Joseph Cohen zurück. Wir fixieren ein Grundmodell M.

31.1 Kombinatorische Eigenschaften der Cohen-Halbordnungen.

31.1 Satz *Seien $a, b \in M$ mit $\big(\overline{\overline{a}} \geq \aleph_0\big)^M$, $\big(\overline{\overline{b}} \geq 2\big)^M$, und $\mu \in \mathrm{Card}^M$ mit $\big(\mu \leq \overline{\overline{a}}^+\big)^M$. Sei $P :\equiv \mathrm{Fn}(a, b, \mu)^M$.*
(a) Es gilt $P = \big\{p \in M \bigm| p\colon a \supset\!\!\!\rightarrow b \wedge \overline{\overline{p}}^M < \mu\big\}$.
(b) Für $p, q \in P$ sei $p \leq q :\equiv p \supset q$, ferner sei $1_P :\equiv \emptyset$. Dann ist $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung für M.
(c) $\big(\overline{\overline{P}} \leq (\overline{\overline{a}} \cdot \overline{\overline{b}})^{<\mu}\big)^M$.
(d) Sei $\kappa :\equiv \Big(\big(\overline{\overline{b}}^{<\mu}\big)^+\Big)^M$. Dann gilt $\big((P, \leq, 1_P)$ hat κ-cc$\big)^M$ und P bewahrt Kardinalitäten $\geq \kappa$ und Konfinalitäten $\geq \kappa$.

(e) *Ist $x \in M$, so gilt $1_P \Vdash \overline{\overline{\mathrm{Pot}(\check{x})}} \leq \check{\gamma}$, wobei $\gamma :\equiv \big(\overline{\overline{a}}^{\overline{\overline{x}}\cdot\overline{\overline{b}}^{<\mu}}\big)^M$ gesetzt ist.*

(f) *Ist $\kappa = \aleph_1^M$, so bewahrt P Kardinalitäten und Konfinalitäten und es ist $\gamma = \big(\overline{\overline{a}}^{\overline{\overline{x}}\cdot\overline{\overline{b}}\cdot\aleph_0}\big)^M$.*

(g) *Sei $\lambda :\equiv \mathrm{cf}(\mu)^M$. Dann gilt $\big((P,\leq,1_P)$ ist λ-abgeschlossen$\big)^M$ und P bewahrt Kardinalitäten $\leq \lambda$ und Konfinalitäten $\leq \lambda$.*

(h) *Ist G ein P-generischer Filter über M und sind $x, y \in M$ mit $\overline{\overline{x}}^M < \lambda$ und ist $f \in M[G]$ mit $f\colon x \to y$, so gilt bereits $f \in M$.Insbesondere gilt*

$$\forall \alpha < \lambda \Big(\big({}^{\alpha}2\big)^M = \big({}^{\alpha}2\big)^{M[G]} \wedge \big({}^{\alpha}\omega\big)^M = \big({}^{\alpha}\omega\big)^{M[G]} \wedge \big({}^{\alpha}\,\mathrm{On}\big)^M = \big({}^{\alpha}\,\mathrm{On}\big)^{M[G]}\Big).$$

(i) $\forall \nu < \lambda \big(\nu \in \mathrm{Card}^M \longrightarrow (\nu^+)^M = (\nu^+)^{M[G]}\big)$.

(j) *Ist n eine metasprachliche natürliche Zahl mit $\aleph_n^M \leq \lambda$, so gilt $\aleph_n^M = \aleph_n^{M[G]}$.*

(k) *Ist $\aleph_\omega^M \leq \lambda$, so gilt $\aleph_\omega^M = \aleph_\omega^{M[G]}$.*

Gilt $\kappa = \aleph_1^M$, so gelten die Aussagen (i)–(k) ohne Beschränkung auf λ.

Beweis. Zunächst halten wir fest

$$\begin{aligned}\mathrm{Fn}(a,b,\mu)^M &= \big\{p \mid p\colon a \supset\!\!\to b \wedge \overline{\overline{p}} < \mu\big\}^M\\ &= \big\{p \in M \mid (p\colon a \supset\!\!\to b)^M \wedge (\overline{\overline{p}} < \mu)^M\big\}\\ &= \big\{p \in M \mid p\colon a \supset\!\!\to b \wedge \overline{\overline{p}}^M < \mu\big\}.\end{aligned}$$

Um $\big(\overline{\overline{P}} \leq (\overline{\overline{a}} \cdot \overline{\overline{b}}\big)^M$ zu beweisen, arbeiten wir in M. Da jedes $p \in P$ eine Element von $[a \times b]^{<\mu}$ ist, folgt nach 11.6

$$\overline{\overline{P}} \leq \overline{\overline{[a \times b]^{<\mu}}} = \overline{\overline{a \times b}}^{<\mu} = (\overline{\overline{a}} \cdot \overline{\overline{b}})^{<\mu},$$

so daß $\big(\overline{\overline{P}} \leq (\overline{\overline{a}} \cdot \overline{\overline{b}})^{<\mu}\big)^M$ gezeigt ist.

Aus 25.3, 26.4 und 30.13 sowie wohlbekannten Resultaten der Kardinalzahlarithmetik folgt sofort die G ültigkeit von

$$\begin{aligned}\mathbf{ZFC} \vdash \forall\, a, b \forall \mu \in \mathrm{Card}\ \exists P, \leq, 1_P\, \exists \kappa, \kappa_1, \lambda \in \mathrm{Card}\\ \Big(\, & P = \mathrm{Fn}(a,b,\mu) \wedge \leq = \big\{z \mid \exists p, q \in \mathrm{Fn}(a,b,\mu)\ p \supset q \wedge z = (p,q)\big\} \wedge 1_P = \emptyset \wedge\\ & (P,\leq,1_P) \in V \wedge (P,\leq,1_P) \text{ ist eine Forcing-Halbordnung} \wedge\\ & \kappa = (\overline{\overline{b}}^{<\mu})^+ \wedge \kappa \text{ ist regulär } \wedge (P,\leq,1_P) \text{ hat } \kappa\text{-cc } \wedge\\ & \kappa_1 = \overline{\overline{b}}^{<\mu} \wedge \kappa = \kappa_1^+ \wedge (P,\leq,1_P) \text{ hat } \kappa_1^+\text{-cc } \wedge\\ & \lambda = \mathrm{cf}(\mu) \wedge \lambda \text{ ist regulär } \wedge (P,\leq,1_P) \text{ ist } \lambda\text{-abgeschlossen}\Big).\end{aligned}$$

Wegen $\mathbf{ZFC}^M$ folgt hieraus m.H. der üblichen Absolutheitsargumente

$$\begin{aligned}&\forall\, a, b \in M\ \forall \mu \in \mathrm{Card}^M\ \exists P, \leq, 1_P \in M\ \exists \kappa, \kappa_1 \lambda \in \mathrm{Card}^M\\ &\Big(\, P = \mathrm{Fn}(a,b,\mu)^M \wedge \leq = \big\{z \mid \exists p, q \in \mathrm{Fn}(a,b,\mu)^M\ p \supset q \wedge z = (p,q)\big\} \wedge 1_P = \emptyset \wedge\\ &(P,\leq,1_P) \in M \wedge \big((P,\leq,1_P) \text{ ist eine Forcing-Halbordnung}\big)^M \wedge\\ &\kappa = \Big((\overline{\overline{b}}^{<\mu})^+\Big)^M \wedge \big(\kappa \text{ ist regulär}\big)^M \wedge \big((P,\leq,1_P) \text{ hat } \kappa\text{-cc}\big)^M \wedge\\ &\kappa_1 = \big(\overline{\overline{b}}^{<\mu}\big)^M \wedge \kappa = \big(\kappa_1^+\big)^M \wedge \big((P,\leq,1_P) \text{ hat } \kappa_1^+\text{-cc }\big)^M \wedge\\ &\lambda = \mathrm{cf}(\mu)^M \wedge \big(\lambda \text{ ist regulär}\big)^M \wedge \big((P,\leq,1_P) \text{ ist } \lambda\text{-abgeschlossen}\big)^M\Big).\end{aligned} \tag{$*$}$$

Insbesondere gilt dies dann für die speziellen Parameter $a, b \in M$, $\mu \in \mathrm{Card}^M$ des Satzes. Daraus ergeben sich dann in Verbindung mit den Resultaten des vorhergehenden Kapitels sofort alle weiteren Aussagen des Satzes bis auf diejenigen über die Mächtigkeit der Potenzmenge von $x \in M$ in $M[G]$. Um diese zu beweisen sei $\kappa_1 :\equiv \big(\overline{\overline{b}}^{<\mu}\big)^M$. Weil dann nach $(*)$ $\big((P, \leq, 1_P)$ hat κ_1^+-cc$\big)^M$ gilt, folgt aus 30.20 $1_P \Vdash \overline{\overline{\mathrm{Pot}(\check{x})}} \leq \check{\lambda}_1$, wobei $\lambda_1 = \Big(\overline{\overline{P}}^{\overline{\overline{x}} \cdot \kappa_1}\Big)^M$ gesetzt ist. Es ist somit $\lambda_1 \leq \Big(\overline{\overline{a}}^{\overline{\overline{x}} \cdot \overline{\overline{b}}^{<\mu}}\Big)^M$, also

$$(1) \qquad \Big(\lambda_1 \leq \overline{\overline{a}}^{\overline{\overline{x}} \cdot \overline{\overline{b}}^{<\mu}}\Big)^M$$

zu zeigen. Hierzu arbeiten wir in M. Wegen $\overline{\overline{P}} \leq (\overline{\overline{a}} \cdot \overline{\overline{b}})^{<\mu}$ (siehe (a)) und $\overline{\overline{b}}^{<\mu} \geq \mu$ (siehe 11.5) folgt

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &\leq \big((\overline{\overline{a}} \cdot \overline{\overline{b}})^{<\mu}\big)^{\overline{\overline{x}} \cdot \overline{\overline{b}}^{<\mu}} \leq \big((\overline{\overline{a}} \cdot \overline{\overline{b}})^{\mu}\big)^{\overline{\overline{x}} \cdot \overline{\overline{b}}^{<\mu}} = (\overline{\overline{a}} \cdot \overline{\overline{b}})^{\mu \cdot \overline{\overline{x}} \cdot \overline{\overline{b}}^{<\mu}} = (\overline{\overline{a}} \cdot \overline{\overline{b}})^{\overline{\overline{x}} \cdot \overline{\overline{b}}^{<\mu}} \\
&= \overline{\overline{a}}^{\overline{\overline{x}} \cdot \overline{\overline{b}}^{<\mu}} \cdot \overline{\overline{b}}^{\overline{\overline{x}} \cdot \overline{\overline{b}}^{<\mu}} \leq \overline{\overline{a}}^{\overline{\overline{x}} \cdot \overline{\overline{b}}^{<\mu}} \cdot \underbrace{\big(\overline{\overline{x}} \cdot \overline{\overline{b}}^{<\mu}\big)^{\overline{\overline{x}} \cdot \overline{\overline{b}}^{<\mu}}}_{=2^{\overline{\overline{x}} \cdot \overline{\overline{b}}^{<\mu}}} = \overline{\overline{a}}^{\overline{\overline{x}} \cdot \overline{\overline{b}}^{<\mu}}.
\end{aligned}$$

Damit ist (1) bewiesen. Im Spezialfall $\kappa = \aleph_1^M$, also $\big((\overline{\overline{b}}^{<\mu})^+ = \aleph_1\big)^M$, gilt $\big(\overline{\overline{b}}^{<\mu} = \aleph_0\big)^M$, so daß γ die im Satz angegebene Form hat.

Damit ist der Satz bewiesen. QED

31.2 Modelle von ZFC + CH.

31.2 Satz *Sei* $a :\equiv \aleph_1^M$, $b :\equiv \big({}^{\omega}2\big)^M$ *und* $\mu :\equiv \aleph_1^M$. *Sei* $(P, \leq, 1_P) :\equiv \big(\mathrm{Fn}(a, b, \mu)^M, \supset, \emptyset\big)$. *Sei G ein P-generischer Filter über M. Dann gilt* $\exists f \in M[G]\ f \colon \aleph_1^{M[G]} \overset{surj.}{\longrightarrow} \big({}^{\omega}2\big)^{M[G]}$.

Beweis. Sei $f :\equiv \bigcup G$. Es ist $f \in M[G]$ wegen $(\bigcup\textbf{-Ax})^{M[G]}$.

$$(1) \qquad f \colon \aleph_1^M \to \big({}^{\omega}2\big)^M.$$

Beweis. Da die Elemente von G paarweise kompatible partielle Funktionen $p \colon \aleph_1^M \supset\!\!\to \big({}^{\omega}2\big)^M$ sind, folgt $f \colon \aleph_1^M \supset\!\!\to \big({}^{\omega}2\big)^M$. Um $\mathrm{dom}(f) = \aleph_1^M$ zu verifizieren, fixiere $\alpha < \aleph_1^M$ beliebig; es ist $\alpha \in \mathrm{dom}(f)$ zu zeigen. Setze hierzu

$$D :\equiv \big\{p \in P \bigm| \alpha \in \mathrm{dom}(p)\big\}.$$

Wegen $D = \big\{p \in P \bigm| (\alpha \in \mathrm{dom}(p))^M\big\}$ ist $D \in M$ nach $(\mathbf{Aus})^M$. D ist dicht in P. Um dies zu sehen, fixiere $p \in P$. Ist $\alpha \in \mathrm{dom}(p)$, so ist $p \in D$ und wir sind fertig. Ist $\alpha \notin \mathrm{dom}(p)$, so setze $q :\equiv p \cup \big\{(\alpha, 0)\big\}$. Offenbar ist $q \in P$ und $q \leq p$; ferner gilt $q \in D$. Also ist D Element von M und dicht in P. Da G generisch über M ist, existiert $p \in G \cap D$. Dann ist $p \subset f$ und es gilt $\alpha \in \mathrm{dom}(p) \subset \mathrm{dom}(f)$. Dies war zu zeigen. qed(1)

$$(2) \qquad \mathrm{ran}(f) = \big({}^{\omega}2\big)^M.$$

Beweis. Sei $g \in \big({}^{\omega}2\big)^M = {}^{\omega}2 \cap M$. Es ist $g \in \mathrm{ran}(f)$ zu zeigen. Die Menge

$$D :\equiv \big\{p \in P \bigm| g \in \mathrm{ran}(p)\big\}$$

ist ein Element von M. Um zu sehen, daß D dicht in P ist, fixiere $p \in P$ beliebig. Wegen $\overline{\overline{p}}^M < \aleph_1^M$ kann p nicht jedem $\alpha < \aleph_1^M$ einen Wert zuweisen. Also existiert $\alpha < \aleph_1^M$ mit $\alpha \notin \mathrm{dom}(p)$. Sei $q :\equiv p \cup \big\{(\alpha, g)\big\}$. Dann gilt $q \colon \aleph_1^M \supset\!\!\to \big({}^{\omega}2\big)^M$, $\overline{\overline{q}}^M < \aleph_1^M$ und $q \leq p$. Ferner ist $q \in D$. Also ist D in der Tat dicht in P. Da G

ein P-generischer Filter über M ist, existiert $p \in G \cap D$. Dann ist $p \subset f$ und es gilt $g \in \operatorname{ran}(p) \subset \operatorname{ran}(f)$. Dies war zu zeigen. qed(2)

Aus (1) und (2) folgt $f\colon \aleph_1^M \overset{surj.}{\longrightarrow} \left({}^{\omega}2\right)^M$. Da $\aleph_1^M \leq \mu$ $(= \operatorname{cf}(\mu)^M)$ gilt, ist $\aleph_1^M = \aleph_1^{M[G]}$ nach 31.1. Ferner gilt:

(3) $\quad \left({}^{\omega}2\right)^M = \left({}^{\omega}2\right)^{M[G]}$.

Beweis. Sei $\alpha :\equiv \omega$. Dann gilt $\alpha = \aleph_0^M = \aleph_0^{M[G]}$ und $\alpha < \mu$ $(= \operatorname{cf}(\mu)^M)$, und es folgt

$$\left({}^{\omega}2\right)^M \overset{22.39(b)}{=} \left({}^{\alpha}2\right)^M \overset{31.1(h)}{=} \left({}^{\alpha}2\right)^{M[G]} \overset{22.39(b)}{=} \left({}^{\omega}2\right)^{M[G]}$$

Dies war zu zeigen. qed(3)

f ist also wie gewünscht. QED

31.3 Corollar (Gödel) Kon(**ZF**) $\longrightarrow$ Kon(**ZFC** + **CH**).

Beweis. Da wir in 24.10 bereits Kon(**ZF**) $\longrightarrow$ Kon(**ZFC**) nachgewiesen haben, genügt es,

Kon(**ZFC**) $\longrightarrow$ Kon(**ZFC** + **CH**)

zu beweisen. Seien hierzu $(P, \leq, 1_P)$ und G wie in 31.2. Dann gilt

(1) $\quad \left(\exists f\, f\colon \aleph_1 \overset{surj.}{\longrightarrow} {}^{\omega}2\right)^{M[G]}$.

Unter **ZFC** gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{CH} &\iff \aleph_1 = 2^{\aleph_0} \\ &\iff \aleph_1 \geq 2^{\aleph_0} \quad (\text{da } 2^{\aleph_0} > \aleph_0) \\ &\iff \exists f\, f\colon \aleph_1 \overset{surj.}{\longrightarrow} 2^{\aleph_0} \\ &\iff \exists f\, f\colon \aleph_1 \overset{surj.}{\longrightarrow} {}^{\omega}2 \quad (\text{wegen } 2^{\aleph_0} = \overline{\overline{{}^{\omega}2}}), \end{aligned}$$

so daß wir **ZFC** $\vdash$ **CH** $\longleftrightarrow \exists f\, f\colon \aleph_1 \overset{surj.}{\longrightarrow} {}^{\omega}2$ nachgewiesen haben. (1) bedeutet wegen $\mathbf{ZFC}^{M[G]}$ also $\mathbf{CH}^{M[G]}$. Wir haben also unter der Annahme, daß M ein abzählbares, transitives Modell von **ZFC** ist, ein Modell von **ZFC** + **CH** gefunden. Nach 23.15 impliziert dies die Aussage des Corollares. QED

Wir können das o.a. Forcing leicht so verallgemeinern, daß wir „die Kontinuumshypothese auch an überabzählbaren Kardinalzahlen erhalten". Wir zeigen hierzu

31.4 Satz *Sei $\kappa \in \mathrm{Card}^M$, $a :\equiv \left(\kappa^+\right)^M$, $b :\equiv \left({}^{\kappa}2\right)^M$, $\mu :\equiv (\kappa^+)^M$, $(P, \leq, 1_P) :\equiv \left(\mathrm{Fn}(a, b, \mu)^M, \supset, \emptyset\right)$. Sei G ein P-generischer Filter über M. Dann gilt $\exists f \in M[G]\ f\colon (\kappa^+)^{M[G]} \overset{surj.}{\longrightarrow} \left({}^{\kappa}2\right)^{M[G]}$.*

Beweis. Wir skizzieren den Beweis, der völlig analog zum ausführlich bewiesenen Spezialfall $\kappa = \omega$ verläuft. Sei $f :\equiv \bigcup G$. Es ist $f \in M[G]$ wegen $(\bigcup\text{-}\mathbf{Ax})^{M[G]}$. Mit Hilfe eines Dichtheitsargumentes zeigt man

(1) $\quad f\colon \left(\kappa^+\right)^M \to \left({}^{\kappa}2\right)^M$

und

(2) $\quad \operatorname{ran}(f) = \left({}^{\omega}2\right)^M$.

Aus (1) und (2) folgt $f\colon \left(\kappa^+\right)^M \overset{surj.}{\longrightarrow} \left({}^{\kappa}2\right)^M$. Wegen $\operatorname{cf}(\mu)^M = \mu$ impliziert $\kappa < \mu$ nach 31.1

(3) $\quad \left({}^{\kappa}2\right)^M = \left({}^{\kappa}2\right)^{M[G]}$ und $\left(\kappa^+\right)^M = \left(\kappa^+\right)^{M[G]}$.

f ist also wie gewünscht. QED

31.4 impliziert u.a. folgende Konsistenzresultate:

31.5 Corollar *Sei n eine metasprachliche natürliche Zahl. Dann gilt:*
(a) $\mathrm{Kon}(\mathbf{ZF}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_1 + \cdots + 2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1})$;
(b) $\mathrm{Kon}(\mathbf{ZF}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+1})$;
(c) $\mathrm{Kon}(\mathbf{ZF}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_1 + \cdots + 2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1} + 2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+1})$.

Beweis. Da wir bereits $\mathrm{Kon}(\mathbf{ZF}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC})$ bewiesen haben, genügt es,
(a') $\mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_1 + \cdots + 2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1})$;
(b') $\mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+1})$;
(c') $\mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_1 + \cdots + 2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1} + 2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+1})$;
zu beweisen.
zu (a'). Wir führen eine (metasprachliche) Induktion nach n durch.
$n = 0$. In diesem Fall wird die Aussage zu $\mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + \mathbf{CH})$, was nach 31.3 erfüllt ist.
$n = m + 1$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_1 + \cdots + 2^{\aleph_m} = \aleph_{m+1}),$$

so daß es genügt,

$$\mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_1 + \cdots + 2^{\aleph_m} = \aleph_{m+1}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_1 + \cdots + 2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1})$$

zu zeigen. Sei also M abzählbar und transitiv mit $\left(\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_1 + \cdots + 2^{\aleph_m} = \aleph_{m+1}\right)^M$. Nach 23.15 ist zu zeigen, daß es ein M' gibt mit $\left(\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_1 + \cdots + 2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}\right)^{M'}$. Sei $\kappa :\equiv \aleph_n^M$ und seien μ, P und G zu κ wie in 31.4. Dann gilt

(1) $\quad \exists f \in M[G]\ f\colon \left(\kappa^+\right)^{M[G]} \overset{surj.}{\longrightarrow} \left({}^{\kappa}2\right)^{M[G]}$.

Weiter folgt

(2) (a) Für $i < n + 1$ ist $\aleph_i^M = \aleph_i^{M[G]}$ und $\left({}^{\aleph_i}2\right)^M = \left({}^{\aleph_i}2\right)^{M[G]}$.
(b) $\left(\kappa^+\right)^{M[G]} = \aleph_{n+1}^{M[G]}$.

Beweis. zu (a). Sei $i \leq n$ fixiert. Es ist $\aleph_i^M < \mu = \mathrm{cf}(\mu)^M$ wegen $\aleph_i^M \leq \aleph_n^M < \aleph_{n+1}^M = \left(\kappa^+\right)^M = \mu$. Nach 31.1 gilt also $\aleph_i^M = \aleph_i^{M[G]} \equiv: \alpha$. Es folgt weiter

$$\left({}^{\aleph_i}2\right)^M \overset{22.39(b)}{=} \left({}^{\alpha}2\right)^M \overset{31.1(h)}{=} \left({}^{\alpha}2\right)^{M[G]} \overset{22.39(b)}{=} \left({}^{\aleph_i}2\right)^{M[G]}$$

Damit ist (a) bewiesen.
zu (b). Dies folgt sofort aus $\kappa = \aleph_n^M = \aleph_n^{M[G]}$ und 22.37(f). qed(2)

(3) Für $i < n + 1$ gilt $\left(2^{\aleph_i} = \aleph_{i+1}\right)^{M[G]}$.

Beweis. Sei zunächst $i < n$. Dann gilt $\left(2^{\aleph_i} = \aleph_{i+1}\right)^M$ nach Wahl von M. Wegen

(3.1) $\quad \mathbf{ZFC} \vdash 2^{\aleph_i} = \aleph_{i+1} \longleftrightarrow \exists g\, g\colon \aleph_{i+1} \overset{surj.}{\longrightarrow} {}^{\aleph_i}2$

bedeutet dies

(3.2) $\quad \exists g \in M\ g\colon \aleph_{i+1}^M \overset{surj.}{\longrightarrow} \left({}^{\aleph_i}2\right)^M$.

Nach (2) gilt $\aleph_{i+1}^M = \aleph_{i+1}^{M[G]}$ und $\left({}^{\aleph_i}2\right)^M = \left({}^{\aleph_i}2\right)^{M[G]}$. Wegen $M \subset M[G]$ folgt also aus (3.2)

$$\exists g \in M[G] \;\; g\colon \aleph_{i+1}^{M[G]} \overset{surj.}{\longrightarrow} \left({}^{\aleph_i}2\right)^{M[G]},$$

d.h., $\left(\exists g\, g\colon \aleph_{i+1} \overset{surj.}{\longrightarrow} {}^{\aleph_i}2\right)^{M[G]}$. Nach (3.1) impliziert dies $\left(2^{\aleph_i} = \aleph_{i+1}\right)^{M[G]}$.

Sei nun $i = n$. Aus (1) folgt in Verbindung mit (2) $\exists f \in M[G] \;\; f\colon \aleph_{n+1}^{M[G]} \overset{surj.}{\longrightarrow} \left({}^{\aleph_n}2\right)^{M[G]}$; beachte hierbei, daß wegen $\kappa = \aleph_n^M = \aleph_n^{M[G]}$ gilt $\left({}^{\kappa}2\right)^{M[G]} = \left({}^{\aleph_n}2\right)^{M[G]}$. Wie im Fall $i < n$ erhalten wir hieraus $\left(2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}\right)^{M[G]}$. Damit ist (3) gezeigt. qed(3)

Somit gilt $\left(\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_1 + \cdots + 2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}\right)^{M[G]}$, und dies war zu zeigen.

zu (b'). Dies folgt sofort aus (c').

zu (c'). Nach (a) gilt Kon($\mathbf{ZFC}$) $\longrightarrow$ Kon($\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_1 + \cdots + 2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$), so daß es genügt

$$\mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_1 + \cdots + 2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_1 + \cdots + 2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1} + 2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+1})$$

zu zeigen. Sei M abzählbar und transitiv mit $\left(\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_1 + \cdots + 2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}\right)^M$. Es ist zu zeigen, daß es ein M' gibt mit

$$\left(\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_1 + \cdots + 2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1} + 2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+1}\right)^{M'}.$$

Sei $\kappa :\equiv \aleph_\omega^M$ und seien P und G zu κ wie in 31.4. Dann gilt

(4) $\quad \exists f \in M[G] \;\; f\colon \left(\kappa^+\right)^{M[G]} \overset{surj.}{\longrightarrow} \left({}^{\kappa}2\right)^{M[G]}$.

Analog zu (2) beweist man:

(5) (a) Für $i < n+1$ ist $\aleph_i^M = \aleph_i^{M[G]}$ und $\left({}^{\aleph_i}2\right)^M = \left({}^{\aleph_i}2\right)^{M[G]}$. Ferner ist $\aleph_\omega^M = \aleph_\omega^{M[G]}$.

(b) $\left(\kappa^+\right)^{M[G]} = \aleph_{\omega+1}^{M[G]}$.

Analog zu (3), Fall „$i < n$“ beweist man:

(6) Für $i < n+1$ gilt $\left(2^{\aleph_i} = \aleph_{i+1}\right)^{M[G]}$.

Analog zu (3), Fall „$i = n$“ zeigt man:

(7) $\quad \left(2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+1}\right)^{M[G]}$.

Aus (6) und (7) folgt $\left(\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_1 + \cdots + 2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1} + 2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+1}\right)^{M[G]}$, und dies war zu zeigen. QED

31.6 Bemerkung Mit dem hier präsentierten Forcing lassen sich analog zu 31.5 weitere relative Konsistenzresultate gewinnen. Ist etwa κ ein „geeigneter“ Klassenterm, so erhält man

$$\mathrm{Kon}(\mathbf{ZF}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + 2^\kappa = \kappa^+).$$

(Der Leser überlege sich zur Übung, welche Eigenschaften der Term κ erfüllen muß, um „geeignet“ zu sein.) Mit einem Produkt verschiedener Bedingungsmengen kann man für „geeignete“ Kardinalzahlterme χ

$$\mathrm{Kon}(\mathbf{ZF}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + \forall i < \chi \; 2^{\aleph_i} = \aleph_{i+1})$$

beweisen. Das hier präsentierte Forcing versagt jedoch beim Versuch,

$$\mathrm{Kon}(\mathbf{ZF}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + \mathbf{GCH})$$

zu verifizieren, da hierbei **alle** Ordinalzahlen berücksichtigt werden müssen. Hierzu ist ein **Klassenforcing** notwendig: man verwendet eine Klasse P von Bedingungen; der generische Filter schneidet jede definierbare, dichte Teilklasse dieser Bedingungsklasse. Der auf GÖDEL zurückgehende Beweis der relativen Konsistenz von **GCH** arbeitet ohne Forcingkonstruktion m.H. des inneren Modells L der konstruktiblen Mengen.

31.3 Modelle von ZFC + ¬ CH.

Wir konstruieren Modelle von **ZFC** + ¬ **CH**. Dabei gehen wir folgender Strategie nach : ausgehend von einem Grundmodell M fixieren wir eine Kardinalzahl $\kappa \geq \aleph_2^M$; für jedes $\alpha < \kappa$ fügen wir zu M eine neue $\{0,1\}$-Folge $c_\alpha = \big(\nu_n \bigm| n < \omega\big)$ hinzu und gelangen zu $M[G]$. Eine solche Folge wird auch als **Cohen-Real** bezeichnet. Hierbei bezieht sich die Bezeichnung „real" auf die Tatsache, daß eine $\{0,1\}$-Folge abzählbarer Länge als Dualdarstellung einer reellen Zahl interpretiert werden kann. COHEN-Reals können also aufgefaßt werden als zu M neu hinzugefügte reelle Zahlen. Dann ist in $M[G]$ $2^{\aleph_0} = \overline{\overline{{}^{\omega}2}} \geq \kappa$. Können wir $\kappa \geq \aleph_2^{M[G]}$ erreichen, haben wir $\big(\neg\,\mathbf{CH}\big)^{M[G]}$.

31.7 Satz *Sei $\kappa \in \mathrm{Card}^M$. Sei $a :\equiv \big(\kappa \times \omega\big)^M$ $(= \kappa \times \omega)$,[227] $b :\equiv 2$ und $\mu :\equiv \omega$. Sei*

$$(P, \leq, 1_P) :\equiv \big(\mathrm{Fn}(a,b,\mu)^M, \supset, \emptyset\big).$$

Sei G ein P-generischer Filter über M. Dann gilt $\big(2^{\aleph_0} \geq \kappa\big)^{M[G]}$. Ist $\kappa = \aleph_n^M$, wobei n eine konkret gegebene metasprachliche natürliche Zahl ist, so gilt $\big(2^{\aleph_0} \geq \aleph_n\big)^{M[G]}$.

BEWEIS. Wegen $\Big(\big(\overline{\overline{2}}^{<\omega}\big)^+\Big)^M = \aleph_1^M$ gilt $\big(P \text{ hat ccc}\big)^M$ und bewahrt P nach 31.1 alle Kardinalitäten. Insbesondere gilt

$(*)$ $\quad \kappa \in \mathrm{Card}^{M[G]}$ und $\aleph_n^M = \aleph_n^{M[G]}$.

Wir arbeiten nun in $M[G]$. Sei $f :\equiv \bigcup G$. Für $\alpha < \kappa$ soll $c_\alpha :\equiv f(\alpha,.) = \big(f(\alpha,n) \bigm| n < \omega\big)$ gesetzt werden. Diese Definition ist sinnvoll:

(1) $\quad f\colon \kappa \times \omega \to 2$.

BEWEIS. Da die Elemente von G paarweise kompatible partielle Funktionen $p\colon \kappa \times \omega \supset\!\!\to 2$ sind, folgt $f\colon \kappa \times \omega \supset\!\!\to 2$. Um $\mathrm{dom}(f) = \kappa \times \omega$ zu verifizieren, fixiere $(\alpha,n) \in \kappa \times \omega$ beliebig. Wir arbeiten in V, um $(\alpha,n) \in \mathrm{dom}(f)$ zu beweisen. Die Menge

$$D :\equiv \big\{p \in P \bigm| (\alpha,n) \in \mathrm{dom}(p)\big\}$$

ist wegen $(\alpha,n) \in \mathrm{dom}(p) \iff \big((\alpha,n) \in \mathrm{dom}(p)\big)^M$ nach $(\mathbf{Aus})^M$ ein Element von M. D ist dicht in P. Um dies zu sehen, sei $p \in P$ beliebig. Ist $(\alpha,n) \in \mathrm{dom}(p)$, so sind wir fertig. Ist $(\alpha,n) \notin \mathrm{dom}(p)$, so setzte $q :\equiv p \cup \big\{\big((\alpha,n),0\big)\big\}$. Dann gilt $q \in P$ und $q \leq p$. Ferner ist $q \in D$. Also ist D dicht in P. Sei $p \in G \cap D$. Dann ist $p \subset f$ und es folgt $(\alpha,n) \in \mathrm{dom}(p) \subset \mathrm{dom}(f)$. Wegen der Absolutheit der Formel $(\alpha,n) \in \mathrm{dom}(f)$ folgt $\big((\alpha,n) \in \mathrm{dom}(f)\big)^{M[G]}$; dies war zu zeigen. qed(1)

Wie bereits angedeutet, setzen wir für $\alpha < \kappa$

$$c_\alpha :\equiv \big(f(\alpha,n) \bigm| n < \omega\big).$$

Nach (1) ist $c_\alpha \in {}^{\omega}2$. Diese COHEN-Reals sind paarweise verschieden:

(2) $\quad \forall \alpha < \beta < \kappa\ \exists n < \omega\ c_\alpha(n) \neq c_\beta(n)$.

BEWEIS. Es ist die Existenz eines $n < \omega$ zu zeigen, so daß $f(\alpha,n) \neq f(\beta,n)$ ist. Hierzu arbeiten wir in V. Sei

$$D :\equiv \Big\{p \in P \Bigm| \exists n < \omega\ \big((\alpha,n) \in \mathrm{dom}(p) \wedge (\beta,n) \in \mathrm{dom}(p) \wedge p(\alpha,n) \neq p(\beta,n)\big)\Big\}.$$

[227] vgl. 22.24.

Man sieht leicht, daß die definierende Formel von D ohne Veränderung der Aussage auf M relativiert werden kann; z.B. gilt im Fall (α,n), $(\beta,n)\in\mathrm{dom}(p)$:

$$\begin{aligned}\big(p(\alpha,n)\neq p(\beta,n)\big)^M &\overset{22.22}{\Longleftrightarrow} \big(p(\alpha,n)\big)^M\neq\big(p(\beta,n)\big)^M \overset{22.25}{\Longleftrightarrow} p^M(\alpha,n)\neq p^M(\beta,n)\\ &\Longleftrightarrow p(\alpha,n)\neq p(\beta,n).\end{aligned}$$

Nach $(\mathbf{Aus})^M$ gilt also $D\in M$. D ist dicht in P. Um dies zu sehen, fixiere $p\in P$ beliebig. Wegen $\big(\overline{\overline{p}}<\aleph_0\big)^M$ und $\big(\overline{\overline{\kappa\times\omega}}=\overline{\overline{\kappa}}\cdot\aleph_0\geq\aleph_0\big)^M$ existiert ein $n<\omega$ mit $(\alpha,n)\notin\mathrm{dom}(p)$ und $(\beta,n)\notin\mathrm{dom}(p)$. Sei

$$q:\equiv p\cup\big\{((\alpha,n),0),((\beta,n),1)\big\}.$$

Dann ist q eine partielle Funktion von $\kappa\times\omega$ nach 2, ferner $q\in M$ und $\overline{\overline{q}}^M<\aleph_0$. Es gilt $q\leq p$ und $q\in D$. Also ist D in der Tat dicht in P. Sei nun $p\in G\cap D$. Dann gilt $p\subset f$. Wähle $n<\omega$ mit $(\alpha,n),(\beta,n)\in\mathrm{dom}(p)$ und $p(\alpha,n)\neq p(\beta,n)$. Dann gilt

$$f(\alpha,n)=p(\alpha,n)\neq p(\beta,n)=f(\beta,n).$$

Hieraus folgt $\big(f(\alpha,n)\neq f(\beta,n)\big)^{M[G]}$; dies war zu zeigen. qed(2)

Nun folgt

$$2^{\aleph_0}=\overline{\overline{{}^{\omega}2}}\geq\overline{\overline{\{c_\alpha\mid\alpha<\kappa\}}}\overset{(2)}{=}\overline{\overline{\kappa}}\overset{(*)}{=}\kappa.$$

Somit gilt in V: $\big(2^{\aleph_0}\geq\kappa\big)^{M[G]}$, wie behauptet. Da dies nach dem Relativierungslemma 22.22 mit $\kappa\leq\big(2^{\aleph_0}\big)^{M[G]}$ äquivalent ist, gilt im Fall $\kappa=\aleph_n^M$ in V

$$\aleph_n^{M[G]}\overset{(*)}{=}\kappa\leq\big(2^{\aleph_0}\big)^{M[G]},$$

was nach dem Relativierungslemma mit $\big(2^{\aleph_0}\geq\aleph_n\big)^{M[G]}$ gleichwertig ist. Damit ist alles bewiesen. QED

31.8 Corollar (Cohen) Kon(**ZF**) $\longrightarrow$ Kon(**ZFC** + ¬ **CH**).

Beweis. Es genügt, Kon(**ZFC**) $\longrightarrow$ Kon(**ZFC**+¬ **CH**) zu beweisen. Wir wenden hierzu 31.7 mit $n:\equiv 2$ an und erhalten $\big(2^{\aleph_0}\geq\aleph_2\big)^{M[G]}$. Wegen **ZFC** $\vdash\neg$ **CH** $\longleftrightarrow 2^{\aleph_0}\geq\aleph_2$ folgt hieraus $\big(\neg\,\mathbf{CH}\big)^{M[G]}$. QED

Welche Werte κ können für $2^{\aleph_0}$ erzwungen werden? Wenn $\kappa=2^{\aleph_0}$ gilt, so ist $\kappa^{\aleph_0}=\kappa$. In der Tat ist diese Bedingung auch hinreichend dafür, $\kappa=2^{\aleph_0}$ erzwingen zu können:

31.9 Satz *Sei $\kappa\in\mathrm{Card}^M$ und es gelte $\big(\kappa^{\aleph_0}=\kappa\big)^M$. Seien $(P,\leq,1_P)$ und G wie in 31.7. Dann gilt $\big(2^{\aleph_0}=\kappa\big)^{M[G]}$.*

Beweis. Nach 31.2 gilt „$\geq$“. Um „$\leq$“ zu erhalten, genügt es wegen **ZFC** $\vdash 2^{\aleph_0}=\overline{\overline{\mathrm{Pot}(\omega)}}$ zu beweisen, daß $\big(\overline{\overline{\mathrm{Pot}(\omega)}}\leq\kappa\big)^{M[G]}$ gilt. Sei hierzu x die durch den Term ω definierte Menge. Dann ist $x\in M$, und da der Term ω M-$M[G]$-absolut ist, gilt $\overline{\overline{\mathrm{Pot}(\check{x}^G)}}^{M[G]}=\overline{\overline{\mathrm{Pot}(\omega)}}^{M[G]}$. Nach 31.1 gilt $1_P\Vdash\overline{\overline{\mathrm{Pot}(\check{x})}}\leq\check{\gamma}$, also

$$\big(\overline{\overline{\mathrm{Pot}(\check{x}^G)}}\leq\gamma\big)^{M[G]},$$

wobei $\gamma=\big(\overline{\overline{a}}^{\overline{\overline{x}}\cdot\overline{\overline{b}}\cdot\aleph_0}\big)^M$ ist. Es ist also $\gamma=\kappa$ zu zeigen. Hierzu arbeiten wir in M. Wegen $\kappa^{\aleph_0}=\kappa$ gilt

$$\gamma=\overline{\overline{a}}^{\overline{\overline{x}}\cdot\overline{\overline{b}}\cdot\aleph_0}=\overline{\overline{\kappa\times\omega}}^{\aleph_0\cdot2\cdot\aleph_0}=(\kappa\cdot\aleph_0)^{\aleph_0}=\kappa^{\aleph_0}=\kappa,$$

wie benötigt. QED

Wir erhalten das folgende Konsistenzresultat.

31.10 Corollar *Sei $n \geq 1$ eine konkret gegebene, metasprachliche natürliche Zahl.*
(a) $\mathrm{Kon}(\mathbf{ZF}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_n)$.
(b) $\mathrm{Kon}(\mathbf{ZF}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega+n})$.

Beweis. Wir beweisen (a) und überlassen (b) dem Leser zur Übung. Es genügt,

$$\mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_n)$$

zu zeigen. Hierzu führen wir eine (metasprachliche) Induktion nach $n \geq 1$ durch.
Im Fall $n = 1$ ist dies nichts anderes als die relative Konsistenz von **CH**.
Sei nun $n > 1$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_{n-1})$. Es genügt also zu zeigen

$$\mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_{n-1}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_n).$$

Sei also M abzählbar und transitiv mit $\left(\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_{n-1}\right)^M$. Wir halten zunächst fest

(1) $\left(\aleph_n^{\aleph_0} = \aleph_n\right)^M$.

Beweis. Arbeite in M. Nach der Hausdorffschen Rekursionsformel 10.32 gilt $\aleph_n^{\aleph_0} = \aleph_n \cdot \aleph_{n-1}^{\aleph_0}$. Da $\aleph_{n-1}^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_{n-1}$ gilt, folgt hieraus $\aleph_n^{\aleph_0} = \aleph_n$. qed(1)

Wende nun 31.7 an mit $\kappa :\equiv \aleph_n^M$. Dann folgt $\left(2^{\aleph_0} = \kappa\right)^{M[G]}$, also $\left(2^{\aleph_0}\right)^{M[G]} = \kappa$. Da P Kardinalitäten bewahrt, gilt $\kappa = \aleph_n^M = \aleph_n^{M[G]}$, so daß wir $\left(2^{\aleph_0}\right)^{M[G]} = \aleph_n^{M[G]}$, also $\left(2^{\aleph_0} = \aleph_n\right)^{M[G]}$ bewiesen haben. QED

31.11 Bemerkung Das letzte Resultat ist eine metasprachliche Aussage und **nicht** als Satz in der Sprache der Mengenlehre der Art

$$\forall n < \omega \ \mathrm{Kon}(\mathbf{ZF}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_n)$$

schreibbar, da das in 31.10 vorkommende n ein metasprachliches Objekt ist.
Es lassen sich weiter Aussagen der Art

$$\mathrm{Kon}(\mathbf{ZF}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \tau)$$

zeigen, wobei τ ein „geeigneter“ Kardinalzahlterm ist. Es ist nicht möglich, dieses „geeignet“ syntaktisch zu erfassen; u.a. die Unlösbarkeit des Halteproblems und die Undefinierbarkeit der Wahrheit begrenzen hier unsere Möglichkeiten. Beachten Sie, daß wir z.B. $\tau \equiv \left(2^{\aleph_0}\right)^+$ nicht zulassen können, da $\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^+$ inkonsistent ist. Es bleibt nur die Möglichkeit, Beispiele von relativen Konsistenzaussagen anzugeben, wie wir es in 31.10 getan haben; die Gesamtheit aller möglichen Konsistenzen kann nicht aufgelistet werden.

31.4 Unerreichbare Kardinalzahlen und die Kontinuumshypothese.

Bei der Einführung der unerreichbaren Kardinalzahlen haben wir erwähnt, daß Große Kardinalzahlen auch in der Hoffnung studiert wurden, mit ihrer Hilfe die Kontinuumshypothese zu entscheiden. Wir haben außerdem darauf hingewiesen, daß die Kontinuumshypothese von unerreichbaren Kardinalzahlen nicht entschieden wird. Wir sind jetzt in der Lage, dies zu verifizieren. Wir benötigen das folgende Lemma.

31.12 Lemma *Sei M ein Grundmodell und $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung für M. Sei $\kappa \in \mathrm{Card}^M$ und es gelte $(\kappa$ ist unerreichbar$)^M$ sowie $\left(\overline{\overline{P}} < \kappa\right)^M$. Sei G ein P-generischer Filter über M. Dann gilt $(\kappa$ ist unerreichbar$)^{M[G]}$.*

Beweis. Da $\big(\overline{\overline{P}} < \kappa\big)^M$ gilt, gilt trivialerweise $\big(\forall A\ \big(A \text{ Antikette in } P \longrightarrow \overline{\overline{A}} < \kappa\big)\big)^M$, d.h.,

$$\big(P \text{ hat } \kappa\text{-cc}\big)^M.$$

Da unerreichbare Kardinalzahlen regulär sind, gilt außerdem $\big(\kappa \text{ ist regulär}\big)^M$. Also bewahrt P Konfinalitäten und Kardinalitäten $\geq \kappa$, siehe 30.9. Insbesondere folgt wegen $\mathrm{cf}(\kappa)^M = \kappa$: $\mathrm{cf}(\kappa)^{M[G]} = \mathrm{cf}(\kappa)^M = \kappa$, so daß κ in $M[G]$ regulär ist. Es bleibt zu zeigen, daß κ unter der Operation $\lambda \mapsto 2^\lambda$ abgeschlossen ist, d.h.,

$$\big(\forall \lambda \in \mathrm{Card}\ \big(\lambda < \kappa \longrightarrow 2^\lambda < \kappa\big)\big)^{M[G]}.$$

Sei also $\lambda \in \mathrm{Card}^{M[G]}$, $\lambda < \kappa$. Nach 30.20 gilt $\big(\overline{\overline{\mathrm{Pot}(\lambda)}} \leq \lambda_0\big)^{M[G]}$ mit $\lambda_0 = \big(2^{\overline{\overline{\lambda}} \cdot \overline{\overline{P}}}\big)^M$. Es ist $\lambda_0 < \kappa$ zu zeigen. Hierzu arbeiten wir in M. Es ist $\overline{\overline{\lambda}} \cdot \overline{\overline{P}} = \lambda \cdot \overline{\overline{P}} < \kappa$. Da κ unerreichbar ist, folgt hieraus $\lambda_0 = 2^{\lambda \cdot \overline{\overline{P}}} < \kappa$, wie benötigt. QED

31.13 Satz *Die Kontinuumshypothese ist unabhängig von der Existenz unerreichbarer Kardinalzahlen. D.h., es gilt*

$$\mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + \mathbf{I}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + \mathbf{I} + \mathbf{CH})$$
$$\mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + \mathbf{I}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + \mathbf{I} + \neg\,\mathbf{CH}).$$

Hierbei ist $\mathbf{I} :\equiv \exists \kappa\ \kappa$ *unerreichbar.*

Beweis. Sei M ein Grundmodell mit $\mathbf{I}^M$. Sei $\kappa \in \mathrm{Card}^M$ mit $\big(\kappa \text{ ist unerreichbar}\big)^M$. Führe mit M zum einen die Forcingkonstruktion, die $\mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + \mathbf{CH})$ beweist (31.2), zum anderen (mit $\kappa :\equiv \aleph_2^M$) die Forcingkonstruktion, die $\mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + \neg\,\mathbf{CH})$ (31.7) verifiziert, durch. Dann gilt

$$\big(\mathbf{ZFC} + \mathbf{CH}\big)^{M[G]} \quad \text{bzw.} \quad \big(\mathbf{ZFC} + \neg\,\mathbf{CH}\big)^{M[G]}.$$

Nach 31.1 gilt

$$\Big(\overline{\overline{\mathrm{Fn}(\aleph_2 \times \omega, 2, \aleph_0)}} \leq (\overline{\overline{\aleph_2 \times \omega}} \cdot 2)^{<\aleph_0} = \aleph_2 \leq 2^{\aleph_1}\Big)^M$$

und

$$\Big(\overline{\overline{\mathrm{Fn}(\aleph_1, {}^{\omega}2, \aleph_1)}} \leq (\overline{\overline{\aleph_1}} \cdot \overline{\overline{{}^{\omega}2}})^{<\aleph_1} = (\aleph_1 \cdot 2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_1}\Big)^M.$$

Da κ in M unerreichbar ist, gilt trivialerweise $\big(2^{\aleph_1} < \kappa\big)^M$, so daß jede der beiden verwendeten Forcing-Halbordnungen in M von kleinerer Kardinalität als κ ist. Nach 31.12 gilt also in beiden Fällen

$$\big(\kappa \text{ ist unerreichbar}\big)^{M[G]},$$

also $\mathbf{I}^{M[G]}$, so daß wir

$$\big(\mathbf{ZFC} + \mathbf{I} + \mathbf{CH}\big)^{M[G]} \quad \text{bzw.} \quad \big(\mathbf{ZFC} + \mathbf{I} + \neg\,\mathbf{CH}\big)^{M[G]}$$

haben. Hieraus folgen die Aussagen des Satzes. QED

Wir können nun auch klären, ob die Begriffe „schwach unerreichbar“ und „(stark) unerreichbar“ unter **ZFC** äquivalent sind.[228] Ist $\mathbf{ZFC} + \exists \kappa\,(\kappa \text{ ist schwach unerreichbar})$ inkonsistent, so gilt

$$\mathbf{ZFC} \vdash \neg\,\exists \kappa\,\kappa \text{ ist schwach unerreichbar}$$

[228] Zur Erinnerung: eine Kardinalzahl heißt schwach unerreichbar, falls sie eine reguläre Limeskardinalzahl ist. Jede unerreichbare Kardinalzahl ist schwach unerreichbar.

und somit auch

$$\mathbf{ZFC} \vdash \neg \exists \kappa\, \kappa \text{ ist unerreichbar.}$$

Trivialerweise sind die beiden Begriffe in diesem Fall also äquivalent. Im anderen Fall ist dies nicht so:

31.14 Satz
Kon($\mathbf{ZFC} + \exists\kappa\, \kappa$ *ist schwach unerreichbar*)
$\longrightarrow$ Kon($\mathbf{ZFC} + \exists\kappa\, (\kappa$ *ist schwach unerreichbar* $\wedge \neg (\kappa$ *ist unerreichbar*))).

Beweis. Sei M ein Grundmodell mit $\big(\exists\kappa\, \kappa \text{ ist schwach unerreichbar}\big)^M$. Sei $\kappa \in \mathrm{Card}^M$ mit

$$\big(\kappa \text{ ist schwach unerreichbar}\big)^M.$$

Führe die Forcingkonstruktion 31.7 mit κ aus. Sei G ein P-generischer Filter über M. Nach 31.7 gilt $\big(2^{\aleph_0} \geq \kappa\big)^{M[G]}$, so daß κ in $M[G]$ nicht unerreichbar ist. Da andererseits $\big(\kappa \text{ ist Limeskardinalzahl}\big)^M$ gilt und P Kardinalitäten bewahrt, gilt $\big(\kappa \text{ ist Limeskardinalzahl}\big)^{M[G]}$. Da P Konfinalitäten bewahrt und $\big(\kappa \text{ ist regulär}\big)^M$ gilt, folgt $\kappa = \mathrm{cf}(\kappa)^M = \mathrm{cf}(\kappa)^{M[G]}$. Es folgt, daß κ in $M[G]$ eine reguläre Limeskardinalzahl ist, d.h., κ ist in $M[G]$ schwach unerreichbar. Dies war zu zeigen. QED

31.5 Reelle Zahlen im Cohen-Modell für $\neg$ CH.

Sei M ein Grundmodell und $\kappa \in \mathrm{Card}^M$ mit $\kappa > \aleph_0$. Sei G ein P-generischer Filter über M mit $P :\equiv \mathrm{Fn}(\kappa \times \omega, 2, \aleph_0)$. Wie in 31.7 gesehen, erreichen wir $\big(2^{\aleph_0} \geq \kappa\big)^{M[G]}$, indem wir zu M κ-viele neue Elemente c_α $(\alpha < \kappa)$ von ${}^{\omega}2$ hinzufügen, die sogenannten Cohen Reals

$$c_\alpha :\equiv \big(f(\alpha, n) \mid n < \omega\big),$$

mit $f = \bigcup G$. Die Bezeichnung „Real“ ist dadurch gerechtfertigt, daß wir jede reelle Zahl über ihre Dualdarstellung mit einem Element von ${}^{\omega}2$ identifizieren können. Für den Rest dieses Kapitels wollen wir annehmen, daß $\mathbb{R}$ und ${}^{\omega}2$ übereinstimmen, d.h., wir redefinieren $\mathbb{R} :\equiv {}^{\omega}2$.

Auf $\mathbb{R}$ haben wir dann eine kanonische Topologie, indem wir $2 = \{0, 1\}$ mit der diskreten Topologie ausstatten (d.h., alle Teilmengen von 2 sind offen) und auf $\mathbb{R} = \times_{n<\omega} 2$ die Produkttopologie wählen: eine Teilmenge O von $\mathbb{R}$ ist genau dann offen, wenn sie von der Form $O = \times_{n<\omega} O_n$ ist, wobei $O_n = 2$ für fast alle $n < \omega$ ist und überdies für jedes $n < \omega$ O_n eine offene (also hier: beliebige) Teilmenge von 2 ist.

Für $s \in \mathrm{Fn}(\omega, 2, \omega)$ definieren wir das **durch s bestimmte Intervall** I_s durch

$$I_s :\equiv \big\{f \in \mathbb{R} \mid s \subset f\big\}.$$

I_s kann interpretiert werden als diejenige Menge reeller Zahlen, deren Dualdarstellung an von s festgelegten Stellen mit den durch s bestimmten Werten übereinstimmen. Wir ordnen jedem Intervall ein **Maß** μ zu durch

$$\mu(I_s) :\equiv \frac{1}{2^{\overline{\overline{s}}}}.$$

Dann ist $\mu(\mathbb{R}) = \mu(I_\emptyset) = 1$. Die Definition läßt sich wie folgt motivieren: ist $s\colon \omega \supset\!\!\!\rightarrow 2$ vorgelegt und $n \in \omega \setminus \mathrm{dom}(s)$, so ist I_s disjunkte Vereinigung der „gleich großen“ Intervalle $I_{s\cup\{(n,0)\}}$ und $I_{s\cup\{(n,1)\}}$; jedes dieser Intervalle sollte also jeweils die Hälfte der Masse von I_s tragen. Zusammen mit der Festlegung $\mu(\mathbb{R}) \overset{!}{=} 1$ ergibt sich hieraus, daß den I_s die o.a. Maße zuzuordnen sind.

Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}$ nennen wir **Nullmenge**, wenn gilt

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists(I_{s_n} | n < \omega)\ \Big(X \subset \bigcup_{n<\omega} I_{s_n} \wedge \sum_{n<\omega} \mu\big(I_{s_n}\big) < \varepsilon\Big).$$

(Hierbei sind die I_{s_n} gewisse Intervalle in $\mathbb{R}$. Wir verstehen ε und die oben stehende unendliche Reihe als Werte im kanonischen Körper der reellen Zahlen.) Man kann zeigen, daß aus **ZFC** folgt, daß $\mathbb{R}$ keine Nullmenge ist. Ferner gilt

31.15 Lemma *$\mathcal{N} :\equiv \{X \subset \mathbb{R} \mid X$ ist Nullmenge$\}$ ist ein $\aleph_1$-vollständig Ideal auf $\mathbb{R}$. D.h.,*

(i) $\emptyset \in \mathcal{N}$;

(ii) $\forall A \in \mathcal{N}\ \forall B\ (B \subset A \longrightarrow B \in \mathcal{N})$;

(iii) $\forall Z \subset \mathcal{N}\ (\overline{\overline{Z}} < \aleph_1 \longrightarrow \bigcup Z \in \mathcal{N})$.

Beweis. (i) und (ii) sind offensichtlich. Für (iii) sei $\{A_i \mid i < \omega\} \subset \mathcal{N}$. Zu $\varepsilon > 0$ seien $(I_{s_{i,n}}|n < \omega)$ Intervalle mit $A_i \subset \bigcup_{n<\omega} I_{s_{i,n}}$ und $\sum_{n<\omega} \mu(I_{s_{i,n}}) < \frac{\varepsilon}{2^{i+2}}$. Dann gilt

$$\bigcup_{i<\omega} A_i \subset \bigcup_{(i,n)\in\omega\times\omega} I_{s_{i,n}}$$

und

$$\sum_{(i,n)\in\omega\times\omega} \mu(I_{s_{i,n}}) = \sum_{i<\omega} \underbrace{\sum_{n<\omega} \mu(I_{s_{i,n}})}_{<\frac{\varepsilon}{2^{i+2}}} < \varepsilon.$$

Die Folge $(I_{s_{i,n}}|(i,n) \in \omega \times \omega)$ ist wie benötigt; beachte $\omega \times \omega \sim \omega$. QED

Wir zeigen nun, daß $\mathbb{R}$ durch den Übergang von M zu $M[G]$, also durch die Hinzufügung der Cohen-Reals wesentlich vergrößert wird. Beachten sie im folgenden, daß

$$\mathbb{R}^M = ({}^\omega 2)^M = {}^\omega 2 \cap M = \mathbb{R} \cap M$$

ist und $(\mu(\mathbb{R}) = 1)^{M[G]}$ (wegen $\mathbf{ZFC} \vdash \mu(\mathbb{R}) = 1$) gilt.

31.16 Satz *$(\mathbb{R} \cap M$ ist eine Nullmenge$)^{M[G]}$.*

Beweis. Wir benutzen die Cohen-Reals, um eine kleine Überdeckung von $\mathbb{R} \cap M$ in $M[G]$ zu finden. Fixiere zunächst $N < \omega$ beliebig; wir wollen zeigen, daß es in $M[G]$ eine Überdeckung von $\mathbb{R} \cap M$ vom Gesamtmaß $\leq \frac{1}{2^N}$ gibt.

(1) $\exists (A_n|n < \omega) \in M\ \forall m, n < \omega\ (A_n \subset \omega\ \wedge\ (m \neq n \to A_m \cap A_n = \emptyset)\ \wedge\ \overline{\overline{A_n}} = N + n + 2)$.

Beweis. Man sieht mit Hilfe der üblichen Absolutheitsargumente leicht, daß die zu zeigende Behauptung gleichwertig ist mit

$$(*) \qquad \Big(\exists (A_n|n < \omega)\ \forall m, n < \omega\ (A_n \subset \omega\ \wedge\ (m \neq m \to A_m \cap A_n = \emptyset)\ \wedge\ \overline{\overline{A_n}} = N + n + 2)\Big)^M.$$

Um $(*)$ zu beweisen, arbeiten wir in M. Definiere eine Folge $(k_n|n < \omega)$ rekursiv durch $k_0 :\equiv 0$ und $k_{n+1} :\equiv k_n + N + n + 2$. Definiere $A{:}\, \omega \to \mathrm{Pot}(\omega)$ durch $A_n :\equiv [k_n, k_{n+1}[$. Man sieht leicht, daß $A = (A_n|n < \omega)$ das Gewünschte leistet. qed(1)

Fixiere nun $\alpha < \kappa$ beliebig und setze $s_n :\equiv c_\alpha \restriction A_n$. Dann ist $s_n \in M[G]$. Wir zeigen

(2) (a) $(\mathbb{R} \cap M \subset \bigcup_{n<\omega} I_{s_n})^{M[G]}$;

(b) $(\sum_{n<\omega} \mu(I_{s_n}) < \frac{1}{2^N})^{M[G]}$.

Beweis. zu (a). Wegen $\big(\mathbb{R}\cap M\big)^{M[G]} = \mathbb{R}\cap M$, $\big(\bigcup_{n<\omega} I_{s_n}\big)^{M[G]} = \bigcup_{n<\omega}\big(I_{s_n}\big)^{M[G]}$ und

$$\big(I_{s_n}\big)^{M[G]} = \big\{f\in M[G] \;\big|\; f\in \underbrace{\mathbb{R}^{M[G]}}_{=\mathbb{R}\cap M[G]}\ \underbrace{(s_n\subset f)^{M[G]}}_{\iff s_n\subset f}\big\} = I_{s_n}\cap M[G]$$

ist (a) gleichwertig mit

$(*)\qquad \mathbb{R}\cap M \subset \bigcup_{n<\omega} I_{s_n}\cap M[G]$.

Zum Nachweis der Gültigkeit von $(*)$ sei $x\in\mathbb{R}\cap M$. Sei

$$D :\equiv \big\{p\in P \;\big|\; \exists n<\omega\ \forall k\in A_n\ (A_n\subset \mathrm{dom}(p(\alpha,.))\ \wedge\ p(\alpha,k)=x(k))\big\}.$$

Es ist mit den üblichen Argumenten leicht zu sehen, daß die D definierende Formel ohne Veränderung der Aussage auf M relativiert werden kann, so daß $(\mathbf{Aus})^M$ wegen $P\in M$, $A\in M$ und $x\in M$ impliziert $D\in M$. Um zu sehen, daß D dicht in P ist, fixiere $q\in P$ beliebig. Wegen $\lim_{n\to\omega}\overline{\overline{A_n}}^M=\infty$ und $\overline{\overline{q}}^M<\aleph_0$ existiert ein $n<\omega$ mit $\big(\{\alpha\}\times A_n\big)\cap\mathrm{dom}(q)=\emptyset$. Dann ist durch

$$p :\equiv q\cup\big\{\big((\alpha,k),x(k)\big)\;\big|\;k\in A_n\big\}$$

eine partielle Funktion von $\kappa\times\omega$ nach 2 definiert. Wegen $x\in M$ und $A\in M$ ist $p\in M$. Ferner gilt $\overline{\overline{p}}^M\le\overline{\overline{p}}^M+\overline{\overline{A_n}}^M<\aleph_0$. Es ist $p\le q$ und $p\in D$. Also ist D dicht in P, so daß ein $p\in D\cap G$ existiert. Wähle zu p ein $n<\omega$ mit $p(\alpha,k)=x(k)$ für alle $k\in A_n$. Wegen $p\in G$ ist $p(\alpha,.)\subset c_\alpha$ nach Definition der Cohen-Real c_α, so daß für $k\in A_n\subset\mathrm{dom}(p)$ folgt

$$x(k)\overset{p\in D}{=}p(\alpha,k)=c_\alpha(k)=s_n(k),$$

beachte $s_n=c_\alpha\restriction A_n$. Also gilt $s_n\subset x$, d.h., $x\in I_{s_n}\cap M[G]$. Dies war zu zeigen.

zu (b). Wir arbeiten in $M[G]$. Wegen $N+n+2\le\overline{\overline{A_n}}$ gilt

$$\frac{1}{2^{\overline{\overline{A_n}}}}\le\frac{1}{2^N}\cdot\frac{1}{2^{n+2}}$$

also

$$\sum_{n<\omega}\frac{1}{2^{\overline{\overline{A_n}}}}\le\frac{1}{2^N}\sum_{n<\omega}\frac{1}{2^{n+2}}\le\frac{1}{2^N}\cdot\frac{1}{2}<\frac{1}{2^N}.$$

Dies war zu zeigen. qed(2)

Wir haben somit gezeigt:

$$\Big(\forall N<\omega\ \exists(I_{s_n}|n<\omega)\ \big(\mathbb{R}\cap M\subset\bigcup_{n<\omega}I_{s_n}\ \wedge\ \sum_{n<\omega}\mu\big(I_{s_n}\big)<\frac{1}{2^N})\big)\Big)^{M[G]}.$$

Dies impliziert $\big(\mathbb{R}\cap M$ ist Nullmenge$\big)^{M[G]}$. QED

Wir wollen nun zeigen, daß in $M[G]$ jede Teilmenge „kleiner“ Kardinalität von $\mathbb{R}$ eine Nullmenge ist, wobei „kleine“ Kardinalitäten diejenigen sind, die unterhalb von κ liegt. Zu diesem Zweck splitten wir die Erweiterung $M\subset M[G]$ durch einen Zwischenschritt in $M\subset M[G_0]\subset M[G_0][G_1]=M[G]$ geeignet auf und nutzen aus, daß nach dem soeben bewiesenen Satz gilt

$$\big(\mathbb{R}\cap M[G_0]\text{ ist Nullmenge}\big)^{M[G_0][G_1]}.$$

Wir wählen dann für fixiertes $x\in M[G]$, $x\subset\mathbb{R}\cap M[G]$ die Filter G_0 und G_1 derart, daß $x\subset M[G_0]$ und somit $x\subset\mathbb{R}\cap M[G_0]$ gilt. Bevor wir dies detailliert durchführen können, müssen wir die benötigten

Begriffe und Techniken entwickeln. Fixiere beliebige $A_0, A_1 \in M$ mit $\kappa = A_0 \cup A_1$, $A_0 \neq \emptyset$, $A_1 \neq \emptyset$ und $A_0 \cap A_1 = \emptyset$. Sei

$$P_0 :\equiv \mathrm{Fn}(A_0 \times \omega, 2, \aleph_0)^M \quad \text{und} \quad P_1 :\equiv \mathrm{Fn}(A_1 \times \omega, 2, \aleph_0)^M.$$

Sei $G_0 :\equiv G \cap P_0$ und $G_1 :\equiv G \cap P_1$.

31.17 Lemma *(a) P_0 ist mit der kanonischen Ordnung eine Forcing-Halbordnung für M.*
(b) P_1 ist mit der kanonischen Ordnung eine Forcing-Halbordnung für $M[G_0]$.
(c) G_0 ist M-generisch über P_0.
(d) G_1 ist $M[G_0]$-generisch über P_1.
(e) $M[G] = M[G_0][G_1]$.

Beweis. zu (a), (b). Dies folgt leicht aus den Definitionen und 31.1.
zu (c).

(1) G_0 ist ein Filter auf P_0.

Beweis. G_0 ist nach oben abgeschlossen. Um dies zu sehen fixiere $p \in G_0$ und $q \in P_0$ mit $q \geq p$. Dann ist $p \in G$, $q \in P$ und $q \geq p$ in P, so daß $q \in G$ folgt. Also ist $q \in G_0$.
Um die paarweise Kompatibilität der Elemente von G_0 zu verifizieren, fixiere $p, q \in G_0$. Dann sind $p, q \in G$, so daß ein $r \in G$ existiert mit $r \leq p, q$. Sei $r_0 :\equiv r \restriction A_0 \times \omega$. Dann ist $r_0 \in P$ und $r_0 \geq r$, so daß $r_0 \in G$ folgt. Wegen $r_0 \in P_0$ folgt $r_0 \in G_0$. Da schließlich $r_0 \leq p, q$ in P_0 ist, ist r_0 wie benötigt. qed(1)

(c) ist bewiesen, wenn wir folgendes gezeigt haben:

(2) Sei $D_0 \in M$ und D_0 sei dicht in P_0. Dann ist $G_0 \cap D_0 \neq \emptyset$.

Beweis. Sei $D :\equiv \{p \in P \mid p \restriction A_0 \times \omega \in D_0\}$. Da die definierende Formel von D ohne Veränderung der Aussage auf M relativiert werden kann und $P, A_0, D_0 \in M$ gilt, folgt $D \in M$ nach $(\mathbf{Aus})^M$. D ist dicht in P. Um dies zu sehen, fixiere $q \in P$. Sei $q_0 :\equiv q \restriction A_0 \times \omega$. Dann ist $q_0 \in P_0$, so daß die Dichtheit von D_0 die Existenz eines $r_0 \in P_0$ mit $r_0 \leq q_0$ impliziert. Dann ist $r :\equiv r_0 \cup q$ funktional, denn wegen $\mathrm{dom}(r_0) \subset A_0 \times \omega$ und $q \restriction A_0 \times \omega = q_0 \subset r_0$ stimmen die beiden vereinigten Funktionen auf dem Teil ihres Definitionsbereiches überein, den sie gemeinsam haben. Schließlich ist $r \in D$ wegen $r \restriction A_0 \times \omega = r_0 \in D_0$; ferner ist $r \leq q$. Also ist D dicht in P und $D \in M$, so daß ein $p \in G \cap D$ existiert. Sei $p_0 :\equiv p \restriction A_0 \times \omega$. Wegen $p \in D$ ist $p_0 \in D_0$. Wegen $p_0 \geq p \in G$ ist $p_0 \in G$. Wegen $D_0 \subset P_0$ folgt dann $p_0 \in D_0 \cap G = D_0 \cap P_0 \cap G = D_0 \cap G_0$. Dies war zu zeigen. qed(2)

Damit ist (c) gezeigt.
zu (d). Analog zu (1) beweist man

(3) G_1 ist ein Filter auf P_1.

Wegen (a) ist $M[G_0]$ wohldefiniert und erneut ein Grundmodell. In Hinblick auf (3) haben wir für den Nachweis von (d) noch zu zeigen:

(4) Sei $D_1 \in M[G_0]$ und D_1 sei dicht in P_1. Dann ist $G_1 \cap D_1 \neq \emptyset$.

Beweis. Sei $\dot{D}_1 \in M$ mit $D_1 = \dot{D}_1^{G_0}$. Da D_1 dicht in P_1 und die Eigenschaft „x ist dicht in P_1“ $M[G_1]$-V-absolut ist, gilt $\left(\dot{D}_1^{G_0} \text{ ist dicht in } \check{P}_1^{G_0}\right)^{M[G_0]}$. Nach dem Forcing-Theorem existiert dann ein $p_0 \in G_0$ mit

(4.1) $p_0 \Vdash_{P_0} \dot{D}_1$ ist dicht in $\check{P}_1$.

Sei $D :\equiv \{p \in P \mid p \restriction A_0 \times \omega \Vdash_{P_0} p \restriction \check{A_1 \times \omega} \in \dot{D}_1\}$. Nach $(\mathbf{Aus})^M$ ist $D \in M$, denn die definierende Formel ist nach dem Forcing-Theorem zu einer auf M relativierten Formel gleichwertig und die beteiligten Parameter sind Elemente von M. Wir zeigen, daß D dicht in P unter p_0 ist. Sei hierzu $q \in P$, $q \leq p_0$. Sei $q_0 :\equiv q \restriction A_0 \times \omega$. Wegen $\mathrm{dom}(p_0) \subset A_0 \times \omega$ und $q \supset p_0$ folgt $q_0 \leq p_0$. (4.1) impliziert also

$$q_0 \Vdash_{P_0} \dot{D}_1 \text{ ist dicht in } \check{P}_1.$$

Setzen wir $q_1 :\equiv q \restriction A_1 \times \omega$, so gilt $q_1 \in P_1$ und damit trivialerweise $q_0 \Vdash \check{q}_1 \in \check{P}_1$, so daß wir insgesamt $q_0 \Vdash_{P_0} \check{q}_1 \in \check{P}_1 \wedge \dot{D}_1$ ist dicht in $\check{P}_1$ haben, was $q_0 \Vdash_{P_0} \exists r_1\,(r_1 \in \check{P}_1 \wedge r_1 \check{\leq} \check{q}_1 \wedge r_1 \in \dot{D}_1)$ impliziert. Nach 28.25 existiert dann ein $r_0 \in P_0$ mit $r_0 \leq q_0$ und ein $r_1 \in \mathrm{dom}(\check{P}_1) = P_1$ mit

(4.2) $\quad r_0 \Vdash_{P_0} \check{r}_1 \check{\leq} \check{q}_1 \wedge \check{r}_1 \in \dot{D}_1.$

Dann gilt insbesondere $r_1 \leq q_1$: wähle nämlich einen P_0-generischen Filter H über M mit $r_0 \in H$; dann folgt aus (4.2) $\big(r_1 \leq q_1\big)^{M[H]}$, also aus Absolutheitsgründen $r_1 \leq q_1$. Sei $r :\equiv r_0 \cup r_1$. Wegen $r_0 \in P_0$ und $r_1 \in P_1$ ist die Vereinigung disjunkt, r eine Funktion, $r \in P$ und $r \restriction A_0 \times \omega = r_0$ sowie $r \restriction A_1 \times \omega = r_1$. (4.2) impliziert also

$$r \restriction A_0 \times \omega \Vdash_{P_0} r \restriction \check{A_1 \times \omega} \in \dot{D}_1,$$

so daß $r \in D$ gilt. Wegen $r_0 \leq q_0$ und $r_1 \leq q_1$ ist ferner $r \leq q$. Damit ist gezeigt, daß D dicht in P unter p_0 ist. Wegen $p_0 \in G$ und weil G P-generisch über M ist, existiert dann ein $p \in G \cap D$. Es gilt

(4.3) $\quad p \restriction A_0 \times \omega \Vdash_{P_0} p \restriction \check{A_1 \times \omega} \in \dot{D}_1$

nach Definition von D. Da $p \restriction A_0 \times \omega \geq p \geq p_0 \in G$ gilt, folgt $p \restriction A_0 \times \omega \in G$, so daß wir $p \restriction A_0 \times \omega \in G \cap P_0 = g_0$ haben. (4.3) impliziert also $p \restriction A_1 \times \omega \in \dot{D}_1^{G_0} = D_1$. Dasselbe Argument, das auf $p \restriction A_0 \times \omega \in G_0$ geführt hat, führt auch auf $p \restriction A_1 \times \omega \in G_1$. Wir haben damit $p \restriction A_1 \times \omega \in G_1 \cap D_1$ nachgewiesen, was (4) beweist. qed(4)

Damit ist (d) gezeigt.

zu (e). „$\subset$“. Wir zeigen

(5) $\quad G = \{p \in P \mid p \restriction A_0 \times \omega \in G_0 \wedge p \restriction A_1 \times \omega \in G_1\}.$

Beweis. „$\subset$“. Sei $p \in G$. Dann sind wegen $p \leq p \restriction A_0 \times \omega, p \restriction A_1 \times \omega$ auch $p \restriction A_0 \times \omega \in G$ und $p \restriction A_1 \times \omega \in G$, was sofort $p \restriction A_0 \times \omega \in G_0$ und $p \restriction A_1 \times \omega \in G_1$ impliziert.

„$\supset$“. Sei $p \in P$ mit $p \restriction A_0 \times \omega \in G_0$ und $p \restriction A_1 \times \omega \in G_1$. Dann gilt insbesondere $p \restriction A_0 \times \omega \in G$ und $p \restriction A_1 \times \omega \in G$. Sei $q \in G$ eine gemeinsame Verstärkung von $p \restriction A_0 \times \omega$ und $p \restriction A_1 \times \omega$. Dann gilt $q \supset p \restriction A_0 \times \omega \cup p \restriction A_1 \times \omega = p$; beachte, daß $\kappa = A_0 \cup A_1$ gilt. Somit $q \leq p$, was wegen $q \in G$ auf $p \in G$ führt. Dies war zu zeigen. qed(5)

Da man, wie man leicht sieht, die definierende Formel des Klassentermes in (5) ohne Veränderung der Aussage auf $M[G_0][G_1]$ relativieren kann und die beteiligten Parameter in $M[G_0][G_1]$ liegen (beachte $P, A_0, A_1 \in M \subset M[G_0] \subset M[G_0][G_1]$, $G_0 \in M[G_0] \subset M[G_0]M[G_1]$ und $G_1 \in M[G_0][G_1]$), folgt $G \in M[G_0][G_1]$ aus $(\mathbf{Aus})^{M[G_0][G_1]}$. Ferner $M \subset M[G_0] \subset M[G_0][G_1]$. Da $M[G]$ das kleinste Grundmodell ist, daß M umfaßt und G als Element enthält, muß $M[G] \subset M[G_0][G_1]$ sein.

„$\supset$“ Aus $P_0, P_1, G \in M[G]$ folgt $G_0 = G \cap P_0 \in M[G]$ und $G_1 = G \cap P_1 \in M[G]$. Die erste Aussage impliziert $M[G_0] \subset M[G]$ wegen $M \subset M[G]$ und der Minimalität von $M[G_0]$. Da $M[G_0][G_1]$ das kleinste **ZFC**-Modell N mit $G_1 \in N$ und $M[G_0] \subset N$ ist, folgt hieraus in Verbindung mit der zweiten Aussage die Gültigkeit von $M[G_0][G_1] \subset M[G]$.

Damit ist der Satz bewiesen. QED

31.18 Beispiel Sei $\alpha < \kappa$. Setze $A_0 :\equiv \kappa \setminus \{\alpha\}$, $A_1 :\equiv \{\alpha\}$. Wenn man die Erweiterung $M[G] = M[G_0][G_1]$ betrachtet, so wird man intuitiv vermuten, daß der $M[G_0]$-Teil „sehr groß“ sein muß, da A_0 „fast“ mit κ übereinstimmt, also P_0 „fast“ ganz P ausfüllt. Wenden wir jedoch 31.16 mit $M[G_1]$ statt M an, so folgt, daß $\mathbb{R} \cap M[G_0]$ eine Nullmenge, also „sehr klein“ in $M[G]$ ist.

Das nächste Resultat besagt, daß jede reelle Zahl der generischen Erweiterung bereits durch einen abzählbaren Bereich festgelegt werden kann. (Beachten Sie, daß wir reelle Zahlen mit abzählbaren $\{0,1\}$-Folgen, also (interpretiert als charakteristische Funktion) als Teilmenge von ω auffassen können.)

31.19 Satz *Sei $\dot{x}$ ein M-Name. Dann existiert ein $A_0 \in M$ mit $A_0 \subset \kappa$, $A_0 \neq \emptyset$, $\overline{\overline{A_0}}^M \leq \aleph_0$ und $1_P \Vdash_P (\dot{x} \subset \omega \longrightarrow \dot{x} \in M[\dot{G} \cap \check{P}_0])$. Hierbei ist $\dot{G}$ der kanonische Name für Filter, siehe 27.18.*

Beweis. Nach 30.17 gibt es zu $\dot{x}$ einen kanonischen Namen $\tilde{x} \in M$ der Art

$$\tilde{x} = \{(\check{n}, p) \mid n < \omega \wedge p \in A_n \wedge p \Vdash_P \check{n} \in \dot{x}\},$$

so daß

(1) $\quad 1_P \Vdash_P (\dot{x} \subset \check{\omega} \longrightarrow \dot{x} = \tilde{x})$

gilt. Hierbei ist für $n < \omega$ $A_n \in M$ und eine Antikette in P. Arbeite nun in M. Da P eine ccc-Forcing-Halbordnung ist, gilt $\overline{\overline{A_n}} \leq \aleph_0$. Also ist $B :\equiv \bigcup_{n<\omega} A_n$ höchstens abzählbar und $B \subset \mathrm{Fn}(\kappa \times \omega, 2, \aleph_0)$. Also existiert ein abzählbares $A_0 \subset \kappa$ mit $B \subset \mathrm{Fn}(A_0 \times \omega, 2, \aleph_0)$. Wir können o.E. $A_0 \neq \emptyset$ annehmen. Wir zeigen, daß A_0 das im Satz verlangte leistet. Hierzu arbeiten wir wieder in V. Sei also H ein P-generischer Filter über M mit $\dot{x}^H \subset \omega$. Dann gilt $\dot{x}^H = \tilde{x}^H$ nach (1). Wegen $(\check{n}, p) \in \tilde{x} \Longrightarrow p \in A_n$ folgt andererseits

$$\begin{aligned}
\tilde{x}^H &= \{n < \omega \mid \exists p \in H\ (\check{n}, p) \in \tilde{x}\} \\
&= \{n < \omega \mid \exists p \in H \cap A_n\ (\check{n}, p) \in \tilde{x}\} \\
&= \{n < \omega \mid \exists p \in H \cap B\ (\check{n}, p) \in \tilde{x}\} \\
&= \{n < \omega \mid \exists p \in H \cap P_0\ (\check{n}, p) \in \tilde{x}\} \\
&= \tilde{x}^{H \cap P_0} \in M[H \cap P_0],
\end{aligned}$$

so daß wir $\dot{x}^H \in M[\dot{G}^H \cap \check{P}_0^H]$ nachgewiesen haben. Dies war zu zeigen. QED

31.20 Corollar *Sei $\nu \in \mathrm{Cd}^M$ und $(\dot{x}_\alpha | \alpha < \nu) \in M$. Dann existiert $(A_\alpha | \alpha < \nu) \in M$ mit*

$$\forall \alpha < \nu \left(A_\alpha \subset \kappa \wedge A_\alpha \neq \emptyset \wedge \overline{\overline{A_\alpha}}^M \leq \aleph_0 \wedge 1_P \Vdash (\dot{x}_\alpha \subset \omega \longrightarrow \dot{x}_\alpha \in M[\dot{G} \cap \check{P}_\alpha])\right),$$

wobei $P_\alpha :\equiv \mathrm{Fn}(A_\alpha \times \omega, 2, \aleph_0)^M$.

Beweis. Die zu zeigende Behauptung ist äquivalent mit

$$\Big(\exists A \big(\mathrm{Fun}(A) \wedge \mathrm{dom}(A) = \nu \wedge$$
$$\forall \alpha < \nu\ (A(\alpha) \subset \kappa \wedge A(\alpha) \neq \emptyset \wedge \overline{\overline{A(\alpha)}} \leq \aleph_0 \wedge 1_P \Vdash^* (\dot{x}_\alpha \subset \omega \longrightarrow \dot{x}_\alpha \in M[\dot{G} \cap \check{P}_\alpha])))\big)\Big)^M.$$

Wir können also in M arbeiten. Definiere $F\colon \nu \to \mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(\nu))$ durch

$$F(\alpha) :\equiv \{B \mid B \subset \kappa \wedge \overline{\overline{B}} \leq \aleph_0 \wedge 1_P \Vdash^* (\dot{x}_\alpha \subset \omega \longrightarrow \dot{x}_\alpha \in M[\dot{G} \cap \check{P}_\alpha])\}.$$

(1) $\quad F(\alpha) \neq \emptyset$.

Beweis. Arbeite in V. Es ist

$$\{B \mid B \subset \kappa \wedge B \neq \emptyset \wedge \overline{\overline{B}} \leq \aleph_0 \wedge 1_P \Vdash^* (\dot{x}_\alpha \subset \omega \longrightarrow \dot{x}_\alpha \in M[\dot{G} \cap \check{P}_\alpha])\}^M \neq \emptyset,$$

also

$$\{B \in M \mid B \subset \kappa \wedge B \neq \emptyset \wedge \overline{\overline{B}}^M \leq \aleph_0 \wedge 1_P \Vdash (\dot{x}_\alpha \subset \omega \longrightarrow \dot{x}_\alpha \in M[\dot{G} \cap \check{P}_\alpha])\} \neq \emptyset$$

zu zeigen. Dies ist nach 31.19 erfüllt. qed(1)

Aus 3.20 folgt also die Existenz eines $A \in \times_{\alpha<\nu} F(\alpha)$. Man sieht unmittelbar, daß A wie gewünscht ist. QED

Wir können jetzt das angestrebte Resultat beweisen.

31.21 Satz $\Big(\forall x\, \big((x \subset \mathbb{R} \wedge \overline{\overline{x}} < \kappa) \longrightarrow x \textit{ ist Nullmenge}\big)\Big)^{M[G]}$.

Beweis. Sei $x \in M[G]$ mit $\big(x \subset \mathbb{R} \wedge \overline{\overline{x}} < \kappa\big)^{M[G]}$. Sei $\dot{x} \in M$ mit $x = \dot{x}^G$. Es existiert ein $\nu \in \mathrm{Card}^{M[G]}$, $\nu < \kappa$, und ein $f \in M[G]$ mit $\big(f\colon \nu \overset{surj.}{\longrightarrow} x\big)^{M[G]}$. (Wähle $\nu :\equiv \max\{\aleph_0, \overline{\overline{x}}^{M[G]}\}$ und beachte, daß $\kappa > \aleph_0$ ist.) Sei $\dot{f} \in M$ mit $f = \dot{f}^G$. Nach dem Forcing-Theorem existiert $p \in G$ mit $p \Vdash (\dot{x} \subset \mathbb{R} \wedge \dot{f}\colon \check{\nu} \overset{surj.}{\longrightarrow} \dot{x})$.

(1) $\exists(\dot{x}_\alpha|\alpha < \nu) \in M\ \forall \alpha < \nu\ p \Vdash \big(\dot{x}_\alpha \subset \omega \wedge \underbrace{\dot{f}(\check{\alpha}) = \{(n,0)\,|\,n \in \omega \setminus \dot{x}_\alpha\} \cup \{(n,1)\,|\,n \in \dot{x}_\alpha\}}_{\text{d.h., } \dot{f}(\check{\alpha}) \text{ ist die charakteristische Funktion von } \dot{x}_\alpha}\big)$.

Beweis. Es ist

$$\Big(\exists(\dot{x}_\alpha|\alpha < \nu)\,\forall \alpha < \nu\ p \Vdash^* \big(\dot{x}_\alpha \subset \omega \wedge \dot{f}(\check{\alpha}) = \{(n,0)\,|\,n \in \omega \setminus \dot{x}_\alpha\} \cup \{(n,1)\,|\,n \in \dot{x}_\alpha\}\big)\Big)^M$$

zu zeigen. Hierzu arbeiten wir in M. Fixiere $\alpha < \nu$. Dann gilt

(1.1) $\Big\{\dot{y}\ \Big|\ p \Vdash^* \big(\dot{y} \subset \omega \wedge \dot{f}(\check{\alpha}) = \{(n,0)\,|\,n \in \omega \setminus \dot{y}\} \cup \{(n,1)\,|\,n \in \dot{y}\}\big)\Big\} \neq \emptyset$.

Beweis. Wir arbeiten in V. Hier ist zu zeigen

$$\Big\{\dot{y} \in M\ \Big|\ p \Vdash \big(\dot{y} \subset \omega \wedge \dot{f}(\check{\alpha}) = \{(n,0)\,|\,n \in \omega \setminus \dot{y}\} \cup \{(n,1)\,|\,n \in \dot{y}\}\big)\Big\} \neq \emptyset.$$

Ist H ein P-generischer Filter über M mit $p \in H$, so gilt $\dot{f}^H\colon \nu \to \dot{x}^H$ und $\dot{x}^H \subset \mathbb{R}^{M[H]} = \big({}^{\omega}2\big)^{M[H]}$. Jedes $z \in \dot{x}^H$ ist also charakteristische Funktion eines $y \in M[H]$ mit $y \subset \omega$. Insbesondere gilt dies für $\dot{f}^H(\alpha)$, d.h.,

$$p \Vdash \exists y\, \big(y \subset \omega \wedge \dot{f}(\check{\alpha}) = \{(n,0)\,|\,n \in \omega \setminus y\} \cup \{(n,1)\,|\,n \in y\}\big).$$

Nach dem Maximalitätsprinzip 28.26 existiert ein $\dot{y} \in M$ mit

$$p \Vdash \big(\dot{y} \subset \omega \wedge \dot{f}(\check{\alpha}) = \{(n,0)\,|\,n \in \omega \setminus \dot{y}\} \cup \{(n,1)\,|\,n \in \dot{y}\}\big).$$

Dies war zu zeigen. qed(1.1)

Mit Hilfe von Scott's Trick wähle eine nicht-leere Teilmenge $F(\alpha)$ von

$$\Big\{\dot{y}\ |\ p \Vdash^* (\dot{y} \subset \omega \wedge \dot{f}(\check{\alpha}) = \{(n,0)\,|\,n \in \omega \setminus \dot{y}\} \cup \{(n,1)\,|\,n \in \dot{y}\})\Big\}.$$

Betrachte die durch $\alpha \mapsto F(\alpha)$ gegebene Funktion. Nach **(AC)** existiert

$$(\dot{x}_\alpha|\alpha < \nu) \in \underset{\alpha<\nu}{\times} F(\alpha).$$

Diese Sequenz ist wie benötigt. qed(1)

Gemäß 31.20 existiert zu $(\dot{x}_\alpha|\alpha < \nu)$ eine Sequenz $(A_\alpha|\alpha < \nu) \in M$ mit

$$\forall \alpha < \nu\ \Big(A_\alpha \subset \kappa \wedge A_\alpha \neq \emptyset \wedge \overline{\overline{A_\alpha}}^M \leq \aleph_0 \wedge 1_P \Vdash \big(\dot{x}_\alpha \subset \omega \longrightarrow \dot{x}_\alpha \in M[\dot{G} \cap \check{P}_\alpha]\big)\Big),$$

wobei $P_\alpha :\equiv \mathrm{Fn}(A_\alpha \times \omega, 2, \aleph_0)^M$. Dann gilt

(2) $\big(\forall \alpha < \nu\ f(\alpha) \in M[G \cap P_\alpha]\big)^{M[G]}$.

Beweis. Wegen $1_P \in G$ gilt

$$\big(\dot{x}_\alpha^G \subset \omega \longrightarrow \dot{x}_\alpha^G \in M[G \cap P_\alpha]\big)^{M[G]}.$$

Wegen $p \Vdash \big(\dot{x}_\alpha \subset \omega \,\wedge\, \dot{f}(\check{\alpha}) = \{(n,0) \,|\, n \in \omega \setminus \dot{x}_\alpha\} \cup \{(n,1) \,|\, n \in \dot{x}_\alpha\}\big)$ und $p \in G$ gilt

$$\big(\dot{x}_\alpha^G \subset \omega \,\wedge\, f(\alpha) = \{(n,0) \,|\, n \in \omega \setminus \dot{x}_\alpha^G\} \cup \{(n,1) \,|\, n \in \dot{x}_\alpha^G\}\big)^{M[G]}.$$

Somit folgt $\big(\dot{x}_\alpha^G \in M[G \cap P_\alpha]\big)^{M[G]}$, so daß

$$\big(f(\alpha) = \{(n,0) \,|\, n \in \omega \setminus \dot{x}_\alpha^G\} \cup \{(n,1) \,|\, n \in \dot{x}_\alpha^G\} \in M[G \cap P_\alpha]\big)^{M[G]}$$

gilt wegen $(\mathbf{Ers})^{M[G \cap P_\alpha]}$. qed(2)

Sei $A :\equiv \bigcup_{\alpha<\nu} A_\alpha$. Es ist $A \in M$ und $B :\equiv \kappa \setminus A \in M$. Ferner ist $A \neq \emptyset$ und da in M

$$\overline{\overline{A}} \leq \sum_{\alpha<\nu} \overline{\overline{A_\alpha}} \leq \nu \cdot \aleph_0 = \nu < \kappa$$

gilt, ist $B \neq \emptyset$. Aus (2) und $\big(x = f[\nu]\big)^{M[G]}$ folgt

(3) $\quad \big(x \subset \mathbb{R} \cap \bigcup_{\alpha<\nu} M[G \cap P_\alpha] \subset \mathbb{R} \cap M[G \cap \mathrm{Fn}(A \times \omega, 2, \aleph_0)^M]\big)^{M[G]}.$

Sei $G_A :\equiv G \cap \mathrm{Fn}(A \times \omega, 2, \aleph_0)^M$ und $G_B :\equiv G \cap \mathrm{Fn}(B \times \omega, 2, \aleph_0)^M$. Nach 31.17 gilt $M[G] = M[G_A][G_B]$ und nach 31.16 gilt $\big(\mathbb{R}^{M[G_A]}$ ist Nullmenge$\big)^{M[G_A][G_B]}$, so daß

(4) $\quad \big(\mathbb{R}^{M[G_A]}$ ist Nullmenge$\big)^{M[G]}$

folgt. Da nach (3) $\big(x \subset \mathbb{R} \cap M[G_A]\big)^{M[G]}$ gilt und Teilmengen von Nullmengen wiederum Nullmengen sind, ergibt sich hieraus die Behauptung des Satzes. QED

Wählen wir im letzten Satz $\kappa \geq \aleph_2^M$ ($= \aleph_2^{M[G]}$), so folgt, daß in $M[G]$ jede Teilmenge von $\mathbb{R}$, deren Kardinalität $\leq \aleph_2^{M[G]}$ ist, eine Nullmenge darstellt. Es ist verblüffend, daß in $M[G]$ das Ideal $\mathcal{N}$ der Nullmengen aber nicht unter der Vereinigung von $\aleph_1^{M[G]}$-vielen Elementen abgeschlossen ist:

31.22 Satz $\big(\neg\mathcal{N}$ *ist* $\aleph_2$*-vollständig*$\big)^{M[G]}$. *Mehr noch: Es gibt eine Sequenz* $\big(N_i \mid i < \aleph_1^{M[G]}\big) \in M[G]$ *mit* $\big(\forall i < \aleph_1^{M[G]}\ N_i$ *ist Nullmenge*$\big)^{M[G]}$ *und* $\mathbb{R} \cap M[G] = \bigcup\{N_i \mid i < \aleph_1^{M[G]}\}$.

Beweis. Für $i < \aleph_1^{M[G]}$ sei $B_i :\equiv \kappa \setminus \{i\}$. Sei $N_i :\equiv \mathbb{R} \cap M[G \cap P_i]$, wobei $P_i :\equiv \mathrm{Fn}(B_i \times \omega, 2, \aleph_0)^M$. Dann gilt $\big(N_i$ ist eine Nullmenge$\big)^{M[G]}$, vgl. die Argumentation für (4) im Beweis des letzten Satzes. Wir zeigen

(1) $\quad \mathbb{R} \cap M[G] = \bigcup\{N_i \mid i < \aleph_1^{M[G]}\}$.

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R} \cap M[G]$. Indem wir x analog zur Vorgehensweise im Beweis des letzten Satzes mit derjenigen Teilmenge von ω identifizieren, deren charakteristische Funktion x ist, erhalten wir ein $A_0 \subset \kappa$, $A_0 \in M$, $A_0 \neq \emptyset$ mit $\overline{\overline{A_0}}^M \leq \aleph_0$ und $x \in M[G \cap P_{A_0}]$, wobei $P_{A_0} :\equiv \mathrm{Fn}(A_0 \times \omega, 2, \aleph_0)^M$ gesetzt ist. Wegen $\aleph_1^{M[G]} > \aleph_0 \geq \overline{\overline{A_0}}^M$ existiert $i \in \aleph_1^{M[G]} \setminus A_0$. Dann ist $A_0 \subset B_i$ und somit $x \in M[G \cap P_{A_0}] \subset M[G \cap P_i]$, also $x \in N_i$. qed(1)

Wegen $\big(\neg\,\mathbb{R}$ ist Nullmenge$\big)^{M[G]}$ ist also $\bigcup\{N_i \mid i < \aleph_1^{M[G]}\}$ keine Nullmenge in $M[G]$. QED

32 Die relative Konsistenz von $\neg$ (AC).

Um Kon(**ZFC**) $\longrightarrow$ Kon(**ZF** + $\neg$ (**AC**)) zu beweisen, haben wir nach 23.14 **ZFC** und die Existenz eines Grundmodells M vorauszusetzen und die Existenz eines Termes M' zu verifizieren, so daß $\big(\mathbf{ZF} + \neg(\mathbf{AC})\big)^{M'}$ gilt. Bisher war stets M' eine gewisse generische Erweiterung von M. Dies ist in dem nun zu behandelnden Fall nicht möglich, da in jeder generischen Erweiterung von M das Auswahlaxiom gilt. Wir wählen für M' eine geeignete Teilklasse einer geeigneten generischen Erweiterung von M.

Beim Nachweis der relativen Konsistenz von (**AC**) haben wir das innere Modell HOD der erblich ordinalzahldefinierbaren Mengen betrachtet, siehe 24.6. Wir verallgemeinern diese Konstruktion wie folgt. Sei A ein Term mit $A \in V$. Sei

$$\mathrm{OD}(A) :\equiv \Big\{x \,\Big|\, \exists\,\theta \in \mathrm{On}\,\exists\chi \in \mathrm{Fml}_4(\dot{\in})\,\exists\alpha < \theta\,\exists z \in {}^{<\,\omega}A$$
$$\big(\, x \in V_\theta \,\wedge\, z \in V_\theta \,\wedge\, A \in V_\theta \,\wedge\, \forall y \in V_\theta\;(y = x \leftrightarrow (V_\theta, \in) \models \chi[y,\alpha,z,A])\big)\Big\}$$

die **Klasse der über** A **ordinalzahldefinierbaren Mengen** und

$$\mathrm{HOD}(A) :\equiv \big\{x \,\big|\, \mathrm{TC}(\{x\}) \in \mathrm{OD}(A)\big\}$$

die **Klasse der über** A **erblich-ordinalzahldefinierbaren Mengen**. Entsprechend 24.8 zeigt man, daß HOD(A) ein inneres Modell der Mengenlehre ist, d.h., wir haben

32.1 Satz *Es gilt* **ZFC** $\vdash$ (HOD(A) *ist transitiv*). *Ist ferner* φ *ein* **ZF** *-Axiom oder eine Instanz eines* **ZF** *-Schemas, so gilt* **ZFC** $\vdash \varphi^{\mathrm{HOD}(A)}$.

Außerdem folgt

32.2 Lemma $A \in \mathrm{HOD}(A)$.

Beweis. Wegen $A \in V$ existiert ein $\theta \in \mathrm{On}$ mit $\mathrm{TC}(\{A\}) \in V_\theta$. Wir können $\theta \geq \omega$ annehmen. Sei

$$\chi(y,u,v,w) :\equiv \ulcorner\forall x\,\big(x \in y \longleftrightarrow x \in \mathrm{TC}(\{w\})\big)\urcorner.$$

Dann gilt, mit $z :\equiv \emptyset$, $\alpha :\equiv 1$,

$$\mathrm{TC}(\{A\}) \in V_\theta \,\wedge\, z \in V_\theta \,\wedge\, A \in V_\theta \,\wedge\, \forall y \in V_\theta\;\big(y = \mathrm{TC}(\{A\}) \longleftrightarrow (V_\theta, \in) \models \chi[y,\alpha,z,A]\big),$$

also $\mathrm{TC}(\{A\}) \in \mathrm{OD}(A)$. Dies bedeutet $A \in \mathrm{HOD}(A)$. QED

Sei nun M ein Grundmodell und $P :\equiv \mathrm{Fn}(\omega \times \omega, 2, \aleph_0)^M$. Sei G ein P-generischer Filter über M. Wie im letzten Kapitel gesehen, adjungiert P $\aleph_0$-viele Cohen-Reals $(c_i | i < \omega)$ zu M hinzu; es ist $c_i = f(i,.)$ mit $f = \bigcup G$. Wir interpretieren $c_i \in {}^{\omega}2$ als charakteristische Funktion einer Teilmenge a_i von ω; d.h., für $i < \omega$ setzen wir

$$a_i :\equiv \big\{n < \omega \,\big|\, c_i(n) = 1\big\}.$$

Man sieht sofort $a_i \in M[G]$ und

$$A :\equiv \big\{a_i \,\big|\, i < \omega\big\} \in M[G].$$

Sei $M' :\equiv \big(\mathrm{HOD}(A)\big)^{M[G]}$.

32.3 Satz M' *ist transitiv und es gilt* $\mathbf{ZF}^{M'}$.

Beweis. Wegen $\mathbf{ZFC} \vdash \forall u \forall v\, \big((u \in v \wedge v \in \mathrm{HOD}(A)) \longrightarrow u \in \mathrm{HOD}(A)\big)$ folgt

$$\Big(\forall u \forall v\, \big((u \in v \wedge v \in \mathrm{HOD}(A)) \longrightarrow u \in \mathrm{HOD}(A)\big)\Big)^{M[G]},$$

also

$$\forall u \in M[G]\, \forall v \in M[G]\, \big((u \in v \wedge v \in \mathrm{HOD}(A)^{M[G]}) \longrightarrow u \in \mathrm{HOD}(A)^{M[G]}\big).$$

Da $M[G]$ transitiv und $\mathrm{HOD}(A)^{M[G]} \subset M[G]$ gilt, kann man hier die Beschränkung der Laufvariablen auf $M[G]$ ohne Veränderung der Aussage eliminieren. Die entstehende $\in$-Formel besagt gerade, daß M' transitiv ist.

Sei nun φ ein **ZF**-Axiom oder eine Instanz eines **ZF**-Schemas. Es ist $\varphi^{M'}$ zu zeigen. Nach 32.1 gilt $\mathbf{ZFC} \vdash \varphi^{\mathrm{HOD}(A)}$. Nach dem Modell-Lemma 22.6 folgt hieraus $\left(\varphi^{\mathrm{HOD}(A)}\right)^{M[G]}$ wegen $\mathbf{ZFC}^{M[G]}$. Es genügt also, folgendes zu zeigen:

(1) Sei φ eine $\in$-Formel. Dann gilt: $\varphi^{M'} \longleftrightarrow \left(\varphi^{\mathrm{HOD}(A)}\right)^{M[G]}$.

Beweis. Wir machen eine Induktion über den Aufbau der $\in$-Formeln. Der einzige nicht-triviale Fall ist der Fall $\varphi \equiv \exists x\, \psi(x, \vec{y})$. Hier folgt

$$\begin{aligned}
\varphi^{M'} &\iff \exists x \left(x \in M' \wedge \psi^{M'}(x, \vec{y})\right) \\
&\iff \exists x \left(x \in M' \wedge \left(\psi(x,\vec{y})^{\mathrm{HOD}(A)}\right)^{M[G]}\right) \quad \text{(nach Ind.Vor.)} \\
&\iff \exists x \left(x \in \big(\mathrm{HOD}(A)\big)^{M[G]} \wedge \left(\psi(x,\vec{y})^{\mathrm{HOD}(A)}\right)^{M[G]}\right) \\
&\iff \exists x \in M[G] \left(x \in \big(\mathrm{HOD}(A)\big)^{M[G]} \wedge \left(\psi(x,\vec{y})^{\mathrm{HOD}(A)}\right)^{M[G]}\right) \\
&\qquad \left(\text{wegen } \big(\mathrm{HOD}(A)\big)^{M[G]} \subset M[G]\right) \\
&\iff \exists x \in M[G] \left(x \in \mathrm{HOD}(A) \wedge \psi(x,\vec{y})^{\mathrm{HOD}(A)}\right)^{M[G]} \\
&\iff \left(\exists x \left(x \in \mathrm{HOD}(A) \wedge \psi(x,\vec{y})^{\mathrm{HOD}(A)}\right)\right)^{M[G]} \\
&\iff \left(\varphi^{\mathrm{HOD}(A)}\right)^{M[G]}.
\end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. qed(1)

Damit ist der Satz bewiesen. QED

Wir zeigen nun

32.4 Satz *A hat keine Wohlordnung in M'. Insbesondere gilt also $\left(\neg\,(\mathbf{AC})\right)^{M'}$.*

Beweis. Angenommen, dies ist nicht der Fall, d.h., es gilt $\left(A \text{ hat eine Wohlordnung}\right)^{M'}$. Da nach 8.1 die Existenz einer Wohlordnung einer Menge unter **ZF** gleichwertig ist zur Existenz einer Bijektion von einer Ordinalzahl auf diese Menge, folgt hieraus $\left(\exists f\, \exists \eta\, (\eta \in \mathrm{On} \wedge f\colon \eta \xrightarrow{bij.} A)\right)^{M'}$. Durch Hineinziehen der Relativierung und Ausnutzen der üblichen Absolutheitsargumente erhält man als äquivalente Aussage die Existenz eines $f \in M'$ und eines $\eta \in \mathrm{On} \cap M'$ mit $f\colon \eta \xrightarrow{bij.} A$.

(1) Es gibt eine $\in$-Formel $\chi(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4)$, ein $\alpha \in \mathrm{On} \cap M[G]$ und ein $z \in {}^{<\omega}A$, so daß folgendes gilt: ist $i < \omega$, so existiert ein $\beta < \eta$ mit $\left(a_i = \iota x.\, \chi(x, \alpha, \beta, z, A)\right)^{M[G]}$. Hierbei ist

$$\iota x.\, \psi(x, \vec{y}) :\equiv \Big\{z \;\Big|\; \forall x \left(\left(\psi(x,\vec{y}) \wedge \forall x' \left(\psi(x',\vec{y}) \rightarrow x = x'\right)\right) \longrightarrow z \in x\right)\Big\}$$

dasjenige eindeutig bestimmte x mit $\psi(x,\vec{y})$, falls ein solches existiert (und $= V$ sonst).

Beweis. Wir arbeiten in $M[G]$. Sei $i \mapsto \varphi_i$ eine definierbare Bijektion zwischen ω und $\mathrm{Fml}_4(\dot{\in})$, vgl. 24.4. Sei

$$\varphi(v,\theta,i,\gamma,v_3,v_4) :\equiv \big(v \in V_\theta \wedge v_3 \in V_\theta \wedge v_4 \in V_\theta \wedge \forall v_5 \in V_\theta\ (v_5 = v \leftrightarrow (V_\theta,\in) \models \varphi_i[v_5,\alpha,v_3,v_4])\big).$$

Wegen $f \in \mathrm{HOD}(A)$, also $\mathrm{TC}(\{f\}) \subset \mathrm{OD}(A)$, und $f \in \mathrm{TC}(\{f\})$ ist $f \in \mathrm{OD}(A)$. Also existieren $\theta \in \mathrm{On}$, $i < \omega$, $\gamma < \theta$ und $z \in {}^{<\omega}A$ mit $\varphi(f,\theta,i,\gamma,z,A)$. Man sieht leicht, daß

(1.1) $\forall v\,\big(\varphi(v,\theta,i,\gamma,z,A) \longleftrightarrow v = f\big)$

gilt. Wir fassen die Parameter θ, i, γ zu einem Ordinalzahlparameter zusammen. Hierzu statten wir $\mathrm{On}\times\mathrm{On}\times\mathrm{On}$ mit der lexikographischen Wohlordnung $\prec$ aus: für $(\zeta_0,\zeta_1,\zeta_2),(\xi_0,\xi_1,\xi_2) \in \mathrm{On}\times\mathrm{On}\times\mathrm{On}$ ist gesetzt

$$(\zeta_0,\zeta_1,\zeta_2) \prec (\xi_0,\xi_1,\xi_2) :\equiv \big(\zeta_0 < \xi_0 \vee (\zeta_0 = \xi_0 \wedge \zeta_1 < \xi_1) \vee (\zeta_0 = \xi_0 \wedge \zeta_1 = \xi_1 \wedge \zeta_2 < \xi_2)\big).$$

Sei h der Mostowski-Isomorphismus von $\prec$; dann ist $h\big[\mathrm{On}\times\mathrm{On}\times\mathrm{On}\big] = \mathrm{On}$. Sei

$$\psi(v,v_1,v_3,v_4) :\equiv \exists u_0,u_1,u_2\,\big((u_0,u_1,u_2) = h^{-1}\big[\{v_1\}\big] \wedge \varphi(v,u_0,u_1,u_2,v_3,v_4)\big)$$ [229]

und $\alpha :\equiv h((\theta,i,\gamma))$. Dann gilt $\varphi(v,\theta,i,\gamma,v_3,v_4) \longleftrightarrow \psi(v,\alpha,v_3,v_4)$, so daß aus (1.1)

(1.2) $\forall v\,\big(\psi(v,\alpha,z,A) \longleftrightarrow v = f\big)$

folgt. Da f eine Bijektion zwischen η und A ist, existiert ein $\beta < \eta$ mit $a_i = f(\beta)$. Sei

$$\chi(v_0,v_1,v_2,v_3,v_4) :\equiv \exists v\,\big(\psi(v,v_1,v_3,v_4) \wedge (v_2,v_0) \in v\big).$$

Aus (1.2) und $(\beta,a_i) \in f$ folgt

$$\forall v_0\,\big(\chi(v_0,\alpha,\beta,z,A) \longleftrightarrow v_0 = a_i\big),$$

d.h., $a_i = \iota x.\,\chi(x,\alpha,\beta,z,A)$. Dies war zu zeigen. qed(1)

Wir konstruieren nun spezielle Namen für die an unseren Untersuchungen involvierten Elemente von $M[G]$.

(2) Für $i < \omega$ ist $\dot{a}_i :\equiv \big\{(\check{n},p) \bigm| n < \omega \wedge p \in P \wedge p(i,n) = 1\big\}$ ein M-Name von a_i. Für $i,j < \omega$, $i \neq j$, gilt $1_P \Vdash \dot{a}_i \neq \dot{a}_j$.

Beweis. Fixiere $i < \omega$. Aus $P \in M$ folgt leicht $\dot{a}_i \in M$. Ferner gilt

$$\dot{a}_i^G = \big\{n < \omega \bigm| \exists p \in G\ p(i,n) = 1\big\}.$$

Wegen $c_i(n) = 1 \iff \big(\bigcup G\big)(i,n) = 1 \iff \exists p \in G\ p(i,n) = 1$ folgt hieraus und aus der Definition von a_i, daß $\dot{a}_i^G = a_i$ ist, wie behauptet.

Seien nun $i,j < \omega$ mit $i \neq j$. Sei H ein beliebiger P-generischer Filter über M. Wie im Beweis von 31.7 gesehen, ist

$$D :\equiv \big\{p \in P \bigm| \exists n < \omega\ ((i,n) \in \mathrm{dom}(p) \wedge (j,n) \in \mathrm{dom}(p) \wedge p(i,n) \neq p(j,n))\big\}$$

ein Element von M und dicht in P. Sei $p \in D \cap H$. Wähle $n < \omega$ mit $p(i,n) \neq p(j,n)$. Wir können o.E. $p(i,n) = 1$ und $p(j,n) = 0$ annehmen. Dann ist $(\check{n},p) \in \dot{a}_i$, so daß $n \in \dot{a}_i^H$ folgt. Andererseits kann es kein $q \in H$ geben mit $(\check{n},q) \in \dot{a}_j$. In diesem Fall wäre nämlich $q(j,n) = 1 \neq p(j,n)$, als Elemente des Filters H müssen p und q aber kompatibel sein. Es folgt $n \notin \dot{a}_j^H$, so daß wir $\dot{a}_i^H \neq \dot{a}_j^H$ nachgewiesen haben. Damit ist alles gezeigt. qed(2)

Aus (2) und der Definition von A folgt sofort

[229] Beachte, daß h definierbar ist, d.h., eine $\in$-Formel μ existiert, so daß für alle x, y gilt: $y = h(x) \iff \mu(x,y)$; vgl. die Definition des Mostowski-Isomorphismus' in 6.6.

(3) $\dot{A} :\equiv \{(\dot{a}_i, 1_P) \mid i < \omega\}$ ist ein M-Name für A.

Für $i < \omega$ und $m < \omega$ sei

$$(m, \dot{a}_i)^0 :\equiv \Big\{\Big(\big\{(\check{m}, 1_P)\big\}, 1_P\Big), \Big(\big\{(\check{m}, 1_P), (\dot{a}_i, 1_P)\big\}, 1_P\Big)\Big\}.$$

Ferner sei $\bar{m} :\equiv |z|$, und $l\colon \bar{m} \to \omega$ definiert durch $z = \big(a_{l(m)} \mid m < \bar{m}\big)$.

(4) $\dot{z} :\equiv \Big\{\big((m, \dot{a}_i)^0, 1_P\big) \;\Big|\; m < \bar{m} \wedge i < \omega \wedge i = l(m)\Big\}$ ist ein M-Name für z.

Beweis. Es ist leicht zu sehen, daß $(m, \dot{a}_i)^0 \in M$ ist für $m, i < \omega$. Wegen $\bar{m} < \omega$ ist $\bar{m} \in M$. Da P in M $\aleph_0$-abgeschlossen ist (vgl. 31.1), folgt aus $\bar{m} \in M$, $\overline{\overline{\bar{m}}} < \aleph_0$, $\omega \in M$, daß $l \in M[G]$ schon in M existiert. Nun ergibt sich sofort $\dot{z} \in M$. Ferner folgt

$$\begin{aligned}
\dot{z}^G &= \Big\{\big((m, \dot{a}_i)^0\big)^G \;\Big|\; m < \bar{m} \wedge i < \omega \wedge i = l(m)\Big\}\\
&= \Big\{\big\{\{(\check{m}, 1_P)\}^G, \{(\check{m}, 1_P), (\dot{a}_i, 1_P)\}^G\big\} \;\Big|\; m < \bar{m} \wedge i < \omega \wedge i = l(m)\Big\}\\
&= \Big\{\underbrace{\big\{\{m\}, \{m, \dot{a}_i^G\}\big\}}_{=(m, \dot{a}_i^G)} \;\Big|\; m < \bar{m} \wedge i < \omega \wedge i = l(m)\Big\}\\
&\overset{(2)}{=} \Big\{\big(m, a_{l(m)}\big) \;\Big|\; m < \bar{m}\Big\}\\
&= z.
\end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. qed(4)

Wir fixieren nun $i < \omega$ mit $a_i \notin \operatorname{ran}(z)$. Ein solches i existiert, da z endlich und die a_i paarweise verschieden sind. Wegen $\big(\dot{a}_i^G = \iota x.\, \chi(x, \alpha, \beta, \dot{z}^G, \dot{A}^G)\big)^{M[G]}$ existiert nach dem Forcing-Theorem ein $p_0 \in G$ mit

(5) $p_0 \Vdash \dot{a}_i = \iota x.\, \chi(x, \check{\alpha}, \check{\beta}, \dot{z}, \dot{A})$.

Wähle ein $j < \omega$, $j \neq i$ mit $a_j \notin \operatorname{ran}(z)$. Da p endlich ist, können wir $(\{j\} \times \omega) \cap \operatorname{dom}(p_0) = \emptyset$ erreichen. Sei $\pi\colon \omega \xrightarrow{bij.} \omega$ diejenige Permutation, die i und j vertauscht und alle anderen Elemente nicht bewegt. Offenbar gilt $\pi \in M$. Wir setzen π zu einer wiederum mit π bezeichneten Abbildung mit Definitionsbereich P fort durch

$$\pi(p) :\equiv \Big\{\big((\pi(k), n), y\big) \;\Big|\; (k, n) \in \omega \times \omega \wedge y \in 2 \wedge \big((k, n), y\big) \in p\Big\}.$$

$\pi(p)$ weist also allen Argumenten $(k, n) \in \operatorname{dom}(\pi(p))$ mit $k \notin \{i, j\}$ denselben Funktionswert wie p zu; jedem Argument $(i, n) \in \operatorname{dom}(\pi(p))$ wird der Wert $p(j, n)$ zugewiesen; jedem Argument $(j, n) \in \operatorname{dom}(\pi(p))$ wird der Wert $p(i, n)$ zugewiesen. Man verifiziert leicht:

(6) π ist eine ordnungstreue Bijektion von P und es gilt $\pi \in M$.

Die Bedeutung von π liegt in

(7) $p_0 \parallel \pi(p_0)$.

Beweis. Es ist zu zeigen, daß p_0 und $\pi(p_0)$ denjenigen Argumenten, die im Definitionsbereich beider Funktionen liegen, dieselben Werte zuweisen. Wegen $(\{j\} \times \omega) \cap \operatorname{dom}(p_0) = \emptyset$ ist $(\{i\} \times \omega) \cap \operatorname{dom}(\pi(p_0)) = \emptyset$ und somit

$$\operatorname{dom}(p_0) \cap \operatorname{dom}(\pi(p_0)) \subset \big(\omega \setminus \{i, j\}\big) \times \omega.$$

Nach Definition von π stimmen p_0 und $\pi(p_0)$ auf der rechts stehenden Menge überein. qed(7)

Wir zeigen unten:

(8) $\quad \pi(p_0) \Vdash \dot{a}_j = \iota x.\, \chi(x, \check{\alpha}, \check{\beta}, \dot{z}, \dot{A})$.

Ist dann q eine gemeinsame Verstärkung von $p_0, \pi(p_0)$, so gilt

$$q \Vdash \dot{a}_i = \iota x.\, \chi(x, \check{\alpha}, \check{\beta}, \dot{z}, \dot{A})$$

wegen (5) und $q \leq p_0$, sowie

$$q \Vdash \dot{a}_j = \iota x.\, \chi(x, \check{\alpha}, \check{\beta}, \dot{z}, \dot{A})$$

wegen (8) und $q \leq \pi(p_0)$, so daß sich $q \Vdash \dot{a}_i = \dot{a}_j$ ergibt. Andererseits gilt nach (2) $q \Vdash \dot{a}_i \neq \dot{a}_j$ wegen $i \neq j$ und $q \leq 1_P$. Beides zusammen ist nicht möglich. Der Widerspruch zeigt, daß unsere Annahme einer Wohlordnung von A in M' falsch sein muß, was den Satz beweist. Es verbleibt, (8) zu verifizieren.

Beweis von (8). Sei H ein P-generischer Filter über M mit $\pi(p_0) \in H$. Sei $H' :\equiv \pi[H]$. Man sieht leicht, daß H' ein P-generischer Filter über M ist. Wegen $\pi \in M$ ist $H' = \pi[H] \in M[H]$ und $H = \pi^{-1}[H'] \in M[H']$, so daß

(8.1) $\quad M[H] = M[H']$

gilt. Wir berechnen die Interpretationen unserer oben definierten speziellen Namen bzgl. H und H'.
Ist $k \notin \{i, j\}$ so gilt

(8.2) $\quad \dot{a}_k^H = \big\{n < \omega \;\big|\; \exists p \in H \;\; \underbrace{p(k,n)}_{=\pi(p)(k,n)} = 1\big\} = \big\{n < \omega \;\big|\; \exists p' \in \pi[H]\; p'(k,n) = 1\big\} = \dot{a}_k^{H'}$.

Im Fall $k = i$ folgt

(8.3) $\quad \dot{a}_i^H = \big\{n < \omega \;\big|\; \exists p \in H \;\; \underbrace{p(i,n)}_{=\pi(p)(j,n)} = 1\big\} = \big\{n < \omega \;\big|\; \exists p' \in \pi[H]\; p'(j,n) = 1\big\} = \dot{a}_j^{H'}$.

Aus Symmetriegründen folgt hieraus noch

(8.4) $\quad \dot{a}_j^H = \dot{a}_i^{H'}$.

Ferner ergibt sich aus (8.2)–(8.4)

(8.5) $\quad \dot{A}^H = \{\dot{a}_k^H \mid k < \omega\} = \{\dot{a}_k^{H'} \mid k < \omega\} = \dot{A}^{H'}$.

Für $k \notin \{i, j\}$ berechnen wir mit (8.2) elementar

(8.6) $\quad \big((m, \dot{a}_k)^0\big)^H = (m, \dot{a}_k^H) = (m, \dot{a}_k^{H'}) = \big((m, \dot{a}_k)^0\big)^{H'}$.

Da a_i und a_j in $\operatorname{ran}(z)$ nicht vorkommen, ist $l(m) \notin \{i, j\}$ für $m < \bar{m}$, so daß aus (8.6) folgt

(8.7) $\quad \dot{z}^H = \Big\{\big((m, \dot{a}_k)^0\big)^H \;\Big|\; m < \bar{m} \wedge k = l(m)\Big\} = \Big\{\big((m, \dot{a}_k)^0\big)^{H'} \;\Big|\; m < \bar{m} \wedge k = l(m)\Big\} = \dot{z}^{H'}$.

Wegen $\pi(p_0) \in H$ gilt $p_0 = \pi(\pi(p_0)) \in \pi[H] = H'$. Aus (5) folgt also

$$\big(\dot{a}_i^{H'} = \chi(x, \alpha, \beta, \dot{z}^{H'}, \dot{A}^{H'})\big)^{M[H']}.$$

Wegen (8.3), (8.5) und (8.7) bedeutet dies

$$\big(\dot{a}_j^H = \chi(x, \alpha, \beta, \dot{z}^H, \dot{A}^H)\big)^{M[H']},$$

nach (8.1) also $\big(\dot{a}_j^H = \chi(x, \alpha, \beta, \dot{z}^H, \dot{A}^H)\big)^{M[H]}$; dies war zu zeigen. qed(8)

Damit ist der Satz bewiesen. QED

32.5 Bemerkung Die Grundidee des obigen Beweises, die Arbeit mit einem **Permutationsmodell**, geht auf Fraenkel zurück.

Nach 23.14 folgt aus 32.4:

32.6 Corollar Kon(**ZFC**) $\longrightarrow$ Kon(**ZF** + ¬ (**AC**)).

Da wir in 24.10 Kon(**ZF**) $\longrightarrow$ Kon(**ZFC**) bewiesen haben, erhalten wir:

32.7 Corollar Kon(**ZF**) $\longrightarrow$ Kon(**ZF** + ¬ (**AC**)).

24.10 und 32.7 können wir so zusammenfassen:

32.8 Satz *Das Auswahlaxiom ist unabhängig von* **ZF**.

33 Iteriertes Forcing.

33.1 Warum „iteriertes Forcing"?

Es sei φ eine $\in$-Formel, die die Form $\forall\vec{x}\,\exists\vec{y}\,\psi(\vec{x},\vec{y})$, wobei ψ eine Σ_0-Formel ist. Von dieser Form ist etwa **MA**(μ). Wir wollen ein Modell M' der Mengenlehre konstruieren, in dem φ gilt. In der Modelltheorie haben wir gesehen, daß Formeln dieser Struktur eng mit Ketten von Modellen zusammenhängen.[230] Ein naiver Ansatz für die Konstruktion von M' ist also der folgende: wir starten mit einem Grundmodell M und setzen $M_0 :\equiv M$; ist M_n konstruiert, so wählen wir m.H. einer Forcingkonstruktion ein abzählbares, transitives **ZFC**-Modell $M_{n+1} \supset M_n$ derart, daß für jede Wahl von $\vec{x} \in M_n$ ein Zeuge $\vec{y}$ in M_{n+1} für $\exists\vec{y}\,\psi(\vec{x},\vec{y})$ existiert, daß also

$$(*) \qquad \forall\vec{x} \in M_n\; \exists\vec{y} \in M_{n+1}\; \psi(\vec{x},\vec{y})$$

gilt. (Wir wollen annehmen, daß ein solches Modell existiert.) Wir setzen dann $M' :\equiv \bigcup_{n<\omega} M_n$. Aus $(*)$ folgt in Verbindung mit der Tatsache, daß ψ absolut zwischen transitiven Strukturen ist, unmittelbar, daß $\varphi^{M'}$ gilt. Unglücklicherweise ist M' im allgemeinen **kein** Modell von **ZFC**, so daß unser naiver Ansatz nicht zum Ziel führt, z.B.:

33.1 Lemma *Sei M ein Grundmodell und $(P,\leq,1_P)$ eine Forcing-Halbordnung für M. P sei verzweigt, siehe 27.6. Setze $M_0 :\equiv M$. Ist $M_n \supset M$ bereits definiert, so sei G_n ein P-generischer Filter über M_n und $M_{n+1} :\equiv M_n[G_n]$. Dann erfüllt $M' :\equiv \bigcup_{n<\omega} M_n$* ***nicht*** *das Potenzmengenaxiom.*

Beweis. Aus der Absolutheit der Eigenschaft „$(P,\leq,1_P)$ ist eine Forcing-Halbordnung" folgt durch Induktion nach n leicht:

(1) Für $n < \omega$ gilt: $(P,\leq,1_P)$ ist eine Forcing-Halbordnung für M_n und es gilt $M \subset M_n \subset M_{n+1}$.

Die in der Formulierung des Lemmas angegebenen Strukturen $(M_n|n < \omega)$ sind also wohldefinierte transitive Modelle von **ZFC**. Angenommen nun, M' erfüllt (**Pot**). D.h., $\forall a \in M'\; \mathrm{Pot}(a) \cap M' \in M'$. Speziell gilt dann $\mathrm{Pot}(P) \cap M' \in M'$. Nach Definition von M' existiert dann ein $n < \omega$ mit $\mathrm{Pot}(P) \cap M' \in M_n$. Da M_n transitiv ist, ist $\mathrm{Pot}(P) \cap M' \subset M_n$. Betrachte die Erweiterung $M_n \subset M_{n+1} = M_n[G_n]$. Da P verzweigt, gilt $G_n \in M_n[G_n] \setminus M_n$. Andererseits ist $G_n \in \mathrm{Pot}(P) \cap M' \subset M_n$. Der Widerspruch zeigt, daß $(\mathbf{Pot})^{M'}$ nicht gelten kann. QED

Wir modifizieren deshalb unseren naiven Ansatz wie folgt:

(1) Wir wählen ein hinreichend großes $\kappa \in \mathrm{On} \cap M$ und konstruieren eine $\subset$-Kette $(M_\alpha|\alpha \leq \kappa)$ von Grundmodellen.

[230] siehe 18.9 und 18.10. Wir hatten dort Formeln der Art $\forall\vec{x}\;\exists\vec{y}\;\psi$ mit quantorenfreiem ψ betrachtet. Wir können im Rahmen der Mengenlehre ψ als Σ_0-Formel wählen, da derartige Formeln zwischen „vernünftigen" Strukturen von vornherein absolut sind. Im Rahmen der Modelltheorie gilt dies nur für quantorenfreie Formeln.

(2) An jeder Nachfolgerstelle $\alpha + 1 \leq \kappa$ gilt: $M_{\alpha+1}$ ist eine generische Erweiterung von M_α mit einer geeigneten Forcing-Halbordnung für M_α.
(3) An jeder Limesstelle $\delta \leq \kappa$ ist M_δ eine generische Erweiterung von M mit einer geeigneten Forcing-Halbordnung für M.

Um dies zu organisieren fixieren wir eine Familie $\big((\dot{Q}_k, \dot{\leq}_k, \dot{1}_k) \mid k < \kappa\big) \in M$ von M-Namen. Dann konstruieren wir eine Folge $\big((P_i, \leq_i, 1_i) \mid k \leq \kappa\big)$ von Forcinghalbordnungen für M. Für $k \leq \kappa$ besteht P_k aus gewissen k-Folgen. Im Fall $k = l + 1$ verlangen wir (u.a.) $p \restriction l \in P_l$ und

$$1_l \Vdash_{P_l} (\dot{Q}_l, \dot{\leq}_l, \dot{1}_l) \text{ ist eine Forcing-Halbordnung.}$$

Im Fall $\mathrm{Lim}(k)$ wählen wir für P_k den direkten Limes der Folge $\big((P_l, \leq_l, 1_l) \mid l < k\big)$, d.h., wir nehmen in P_k diejenigen $p\colon k \to M$ auf, die (u.a.) $\forall l < k\ p \restriction l \in P_l$ und $\exists m < k\ \forall l < k\ \big(m < l \longrightarrow p(l) = \dot{1}_l\big)$ erfüllen. Wir betrachten dann $(P_\kappa, \leq_\kappa, 1_\kappa)$ und wählen einen P_κ-generischen Filter G_κ auf M. Für $k \leq \kappa$ setzen wir $G_k :\equiv G_\kappa \restriction k :\equiv \{p \restriction k \,|\, p \in G_\kappa\}$. Wir werden sehen, daß G_k ein P_k-generischer Filter über M ist, so daß wir $M_k :\equiv M[G_k]$ bilden können. Es zeigt sich, daß $(M_k | k \leq \kappa)$ eine aufsteigende $\subset$-Kette von **ZFC**-Modellen ist. Abschließend rechtfertigen wir „im nachhinein“, daß jedes Modell an einer Nachfolgerstelle eine generische Erweiterung des Modelles an der jeweiligen Vorgängerstelle ist, daß also $M_{l+1} = M_l[H^l]$ ist. Hierzu ist es erforderlich, eine geeignete Forcing-Halbordnung für M_l zu finden. Wegen $1_l \Vdash_{P_l} (\dot{Q}_l, \dot{\leq}_l, \dot{1}_l)$ ist eine Forcing-Halbordnung, ist $(Q^l, \leq^l, 1^l) :\equiv \big(\dot{Q}_l^{G_l}, \dot{\leq}^{G_l}, \dot{1}_l^{G_l}\big)$ eine Forcing-Halbordnung für M_l. Wir werden sehen, daß $H^l :\equiv \big\{p(l)^{G_l} \mid p \in G_\kappa\big\}$ ein $(Q^l, \leq^l, 1^l)$-generischer Filter über M_l ist, der $M_{l+1} = M_l[H^l]$ erfüllt. Eine derartige Konstruktion führt also auf die gewünschte Kette von **ZFC**-Modellen. Wir untersuchen nun die Details dieser Konstruktion.

33.2 Die Forcing-Halbordnungen des iterierten Forcings.

Sei M ein Grundmodell, $\kappa \in \mathrm{On} \cap M$ und $\big((\dot{Q}_k, \dot{\leq}_k, \dot{1}_k) \mid k < \kappa\big) \in M$ eine Familie von M-Namen.

33.2 Satz *Es gibt eine Sequenz* $\big((P_i, \leq_i, 1_i) \mid k \leq \kappa\big) \in M$ *mit*
(a) $\forall k \leq \kappa\ (P_k, \leq_k, 1_k)$ *ist eine Forcing-Halbordnung für* M.
(b) $(P_0, \leq_0, 1_0) = (\{\emptyset\}, \{(\emptyset, \emptyset)\}, \emptyset)$.
Ist $k \leq \kappa$ *und gilt* $1_l \Vdash_{P_l} \big((\dot{Q}_l, \dot{\leq}_l, \dot{1}_l) \text{ist eine Forcing-Halbordnung}\big)$ *sowie* $\dot{1}_l \in \mathrm{dom}(\dot{Q}_l)$ *für alle* $l < k$, *so gilt:*
(c) Ist $k = l + 1$, *so gilt*

$$\begin{aligned} P_k &= \big\{p \in M \,\big|\, p\colon k \to M \wedge p \restriction l \in P_l \wedge p(l) \in \mathrm{dom}(\dot{Q}_l) \wedge p \restriction l \Vdash_{P_l} p(l) \in \dot{Q}_l\big\}, \\ 1_k &= 1_l{}^\frown \dot{1}_l, \\ p \leq_k q &\iff p \restriction l \leq_l q \restriction l \wedge p \restriction l \Vdash_{P_l} p(l) \dot{\leq}_k q(l). \end{aligned}$$

(d) Ist k *eine Limesordinalzahl, so gilt*

$$\begin{aligned} P_k &= \big\{p \in M \,\big|\, p\colon k \to M \wedge \forall l < k\ p \restriction l \in P_l \wedge \exists m < k\ \forall l < k\ (m \leq l \longrightarrow p(l) = \dot{1}_l)\big\}, \\ 1_k &= \bigcup_{l<k} 1_l, \\ p \leq_k q &\iff \forall l < k\ p \restriction l \leq_l q \restriction l. \end{aligned}$$

(e) In beiden Fällen gilt $1_k = (\dot{1}_i | i < k)$.

Beweis. Wir arbeiten in M und definieren rekursiv eine Folge $\big((P_k, \leq_k, 1_k) \mid k \leq \kappa\big)$ wie folgt:
Es sei $(P_0, \leq_0, 1_0) :\equiv (\{\emptyset\}, \{(\emptyset, \emptyset)\}, \emptyset)$. $(P_0, \leq_0, 1_0)$ ist offenbar eine Forcing-Halbordnung.
Ist $k \leq \kappa$, $k = l + 1$, so unterscheiden wir zwei Fälle.
Fall 1. $\forall i < k\ \big(1_i \Vdash^*_{P_i} (\dot{Q}_i, \dot{\leq}_i, \dot{1}_i)$ist eine Forcing-Halbordnung $\wedge\ 1_i \in \mathrm{dom}(\dot{Q}_i)\big)$. Wir definieren

$$\begin{aligned} P_k &:\equiv \big\{p \,\big|\, p\colon k \to M \wedge p \restriction l \in P_l \wedge p(l) \in \mathrm{dom}(\dot{Q}_l) \wedge p \restriction l \Vdash^*_{P_l} p(l) \in \dot{Q}_l\big\}, \\ p \leq_k q &:\equiv p \restriction l \leq_l q \restriction l \wedge p \restriction l \Vdash^*_{P_l} p(l) \dot{\leq}_k q(l) \\ 1_k &:\equiv 1_l{}^\frown \dot{1}_l. \end{aligned}$$

Diese Setzungen sind wohldefiniert, da aus der Induktionsvoraussetzung $P_l \subset {}^lM$ folgt. $(P_k, \leq_k, 1_k)$ leistet das gewünschte:

(1) $(P_k, \leq_k, 1_k)$ ist eine Forcing-Halbordnung und $1_k = (\dot{1}_i | i < k)$.

Beweis. Wir arbeiten in V. Es ist $1_k \in P_k$, denn nach Voraussetzung gilt einerseits $\dot{1}_l \in \mathrm{dom}(\dot{Q}_l)$ und andererseits

$$1_l \Vdash_{P_l} \big((\dot{Q}_l, \dot{\leq}_l, \dot{1}_l) \text{ist eine Forcing-Halbordnung}\big);$$

letzteres impliziert insbesondere $1_l \Vdash_{P_l} \dot{1}_l \in \dot{Q}_l$. Da nach Induktionsvoraussetzung $1_l = (\dot{1}_i | i < l)$ ist, ergibt sich sofort (e).

$\leq_k$ ist reflexiv. Um dies zu sehen fixiere $p \in P_k$. Dann ist $p \upharpoonright l \in P_l$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\leq_l$ reflexiv, so daß $p \upharpoonright l \leq_l p \upharpoonright l$ gilt. Es bleibt zu zeigen, daß $p \upharpoonright l \Vdash_{P_l} p(l) \dot{\leq}_l p(l)$ gilt. Sei also H ein P_l-generischer Filter über M mit $p \upharpoonright l \in H$. Es ist zu zeigen:

(1.1) $\big(p(l)^H \dot{\leq}^H p(l)^H\big)^{M[H]}$

Beweis. Aus $p \in P_k$ folgt

(∗) $p \upharpoonright l \Vdash_{P_l} p(l) \in \dot{Q}_l$.

Aus $p \upharpoonright l \leq_l 1_l$ und $1_l \Vdash_{P_l} \big((\dot{Q}_l, \dot{\leq}_l, \dot{1}_l) \text{ ist Forcing-Halbordnung}\big)$ folgt

(∗∗) $p \upharpoonright l \Vdash_{P_l} \big((\dot{Q}_l, \dot{\leq}_l, \dot{1}_l) \text{ ist Forcing-Halbordnung}\big)$.

Aus (∗) und (∗∗) folgt wegen $p \upharpoonright l \in H$:

$$\big(p(l)^H \in \dot{Q}_l^H \wedge (\dot{Q}_l^H, \dot{\leq}_l^H, \dot{1}_l^H) \text{ ist eine Forcinghalbordnung}\big)^{M[H]}.$$

Arbeiten wir in $M[H]$, so gilt also insbesondere $p(l)^H \in \dot{Q}_l^H$ und $\dot{\leq}^H$ ist reflexiv auf $\dot{Q}_l^H$. Dies führt auf $p(l)^H \dot{\leq}^H p(l)^H$. Da diese Argumentation in $M[H]$ stattfand, ist (1.1) bewiesen. qed(1.1)

$\leq_k$ ist transitiv. Um dies zu sehen fixiere $p, q, r \in P_k$ mit $p \leq_k q$ und $q \leq_k r$. Dann gilt $p \upharpoonright l \leq_l q \upharpoonright l \leq r \upharpoonright l$ nach Definition von $\leq_k$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\leq_l$ transitiv, so daß wir

(1.2) $p \upharpoonright l \leq_l r \upharpoonright l$

haben. Nach Definition von $\leq_k$ gilt ferner $p \upharpoonright l \Vdash_{P_l} p(l) \dot{\leq}_l q(l)$ und $q \upharpoonright l \Vdash_{P_l} q(l) \dot{\leq}_l r(l)$. Wegen $p \upharpoonright l \leq_l q \upharpoonright l$ folgt aus letzterem $p \upharpoonright l \Vdash_{P_l} q(l) \dot{\leq}_l r(l)$. Da wegen $1_l \Vdash_{P_l} \big((\dot{Q}_l, \dot{\leq}_l, \dot{1}_l) \text{ ist Forcing-Halbordnung}\big)$ und $p \upharpoonright l \leq_l 1_l$ überdies $p \upharpoonright l \Vdash_{P_l} \big((\dot{Q}_l, \dot{\leq}_l, \dot{1}_l) \text{ ist Forcing-Halbordnung}\big)$ gilt, haben wir insgesamt

$$p \upharpoonright l \Vdash_{P_l} \big(p(l) \dot{\leq}_l q(l) \wedge q(l) \dot{\leq}_l r(l) \wedge (\dot{Q}_l, \dot{\leq}_l, \dot{1}_l) \text{ ist Forcing-Halbordnung}\big).$$

Ist H ein P_l-generischer Filter über M mit $p \upharpoonright l \in H$, folgt hieraus insbesondere

$$\big(p(l)^H \dot{\leq}_l^H q(l)^H \wedge q(l)^H \dot{\leq}_l^H r(l)^H \wedge \dot{\leq}_l^H \text{ ist transitiv}\big)^{M[H]},$$

was $\big(p(l)^H \dot{\leq}_l^H r(l)^H\big)^{M[H]}$ impliziert. Somit gilt $p \upharpoonright l \Vdash_{P_l} p(l) \dot{\leq}_l r(l)$. Zusammen mit (1.2) folgt hieraus $p \leq_k r$. Also ist $\leq_k$ transitiv.

Um zu sehen, daß 1_k größtes Element von P_k ist, fixiere $p \in P_k$. Wegen $p \upharpoonright l \in P_l$ gilt nach Induktionsvoraussetzung

(1.3) $p \upharpoonright l \leq_l 1_l = 1_k \upharpoonright l$, wegen $1_l \Vdash_{P_l} \big((\dot{Q}_l, \dot{\leq}_l, \dot{1}_l)$ ist Forcing-Halbordnung$\big)$ also $p \upharpoonright l \Vdash_{P_l} \big((\dot{Q}_l, \dot{\leq}_l, \dot{1}_l)$ ist Forcing-Halbordnung$\big)$. Da aus $p \in P_k$ folgt $p \upharpoonright l \Vdash_{P_l} p(l) \in \dot{Q}_l$, erhalten wir insgesamt

$$p \upharpoonright l \Vdash_{P_l} (\dot{Q}_l, \dot{\leq}_l, \dot{1}_l) \text{ ist Forcing-Halbordnung} \wedge p(l) \in \dot{Q}_l.$$

Analog zu eben durchgeführten Argumenten folgt hieraus leicht die Gültigkeit von $p \upharpoonright l \Vdash_{P_l} p(l) \dot{\leq}_l \dot{1}_l$, was wegen $\dot{1}_l = 1_k(l)$ zusammen mit (1.3) sofort $p \leq_k 1_k$ impliziert.

Damit ist (1) bewiesen. qed(1)

Fall 2. Fall 1. tritt nicht ein. Dann sei $(P_k, \leq_k, 1_k) :\equiv (\{\emptyset\}, \{(\emptyset, \emptyset)\}, \emptyset)$. $(P_k, \leq_k, 1_k)$ ist dann offenbar eine Forcing-Halbordnung.

Nun sei $k \leq \kappa$ eine Limesordinalzahl. Wir unterscheiden wieder zwei Fälle.

Fall 1. $\forall l < k \ \big(1_l \Vdash^*_{P_l} (\dot{Q}_l, \dot{\leq}_l, \dot{1}_l)$ ist eine Forcing-Halbordnung $\wedge \ \dot{1}_l \in \mathrm{dom}(\dot{Q}_l)\big)$. Wir definieren

$$\begin{aligned} P_k &:\equiv \big\{p \;\big|\; p{:}\, k \to M \ \wedge \forall l < k \; p \upharpoonright l \in P_l \ \wedge \exists m < k \, \forall l < k \, (m \leq l \longrightarrow p(l) = \dot{1}_l)\big\}, \\ p \leq_k q &:\equiv \forall l < k \; p \upharpoonright l \leq_l q \upharpoonright l \\ 1_k &:\equiv \textstyle\bigcup_{l<k} 1_l. \end{aligned}$$

Diese Setzungen sind wohldefiniert, da aus der Induktionsvoraussetzung $P_l \subset {}^lM$ für alle $l < k$ folgt. $(P_k, \leq_k, 1_k)$ leistet das gewünschte:

(2) $(P_k, \leq_k, 1_k)$ ist eine Forcing-Halbordnung und $1_k = (\dot{1}_i | i < k)$.

Beweis. Wir arbeiten in V. Da nach Induktionsvoraussetzung $1_l = (\dot{1}_i | i < l)$ für $l < k$ gilt, ist $1_k \in P_k$ und es gilt (e).

$\leq_k$ ist reflexiv. Ist nämlich $p \in P_k$, so ist $p \upharpoonright l \in P_l$ für $l < k$ und somit $p \upharpoonright l \leq_l p \upharpoonright l$ für diese l wegen der Reflexivität von $\leq_l$. Dies bedeutet $p \leq_k p$.

$\leq_k$ ist transitiv, denn $p \leq_k q \leq_k r$ impliziert $p \upharpoonright l \leq_l q \upharpoonright l \leq_l r \upharpoonright l$ für $l < k$, was wegen der Transitivität von $\leq_l$ auf $p \upharpoonright l \leq_l r \upharpoonright l$ für diese l führt. Letzteres bedeutet $p \leq_k r$.

1_k ist größtes Element von $(P_k, \leq_k)$. Ist nämlich $p \in P_k$, so gilt $p \upharpoonright l \leq_l 1_l = 1_k \upharpoonright l$, da 1_l nach Induktionsvoraussetzung größtes Element von $(P_l, \leq_l)$ ist. Also gilt $p \leq_k 1_k$. qed(2)

Fall 2. Fall 1. tritt nicht ein. Dann sei $(P_k, \leq_k, 1_k) :\equiv (\{\emptyset\}, \{(\emptyset, \emptyset)\}, \emptyset)$. QED

33.3 Bemerkung Die in obigem Beweis jeweils in „Fall 2“ definierten Forcing-Halbordnungen haben nur den Zweck, die Rekursion nicht abbrechen zu lassen. In Anwendungen werden wir sicherstellen, daß die Namenfolge $\big((\dot{Q}_k, \dot{\leq}_k, \dot{1}_k) \;\big|\; k < \kappa\big)$ so beschaffen ist, daß wir uns stets in „Fall 1“ befinden. Formal können wir das so erreichen, daß wir an jeder Stelle i, an der die Voraussetzungen von Fall 1 nicht erfüllt sind vom Namentripel $(\dot{Q}_i, \dot{\leq}_i, \dot{1}_i)$ übergehen zu $(\check{\omega}, \check{\geq}, \check{0})$, wobei $\geq$ die umgekehrte kanonische Ordnung von ω ist und die kanonischen Namen bezüglich P_i gebildet sind. Offenbar gilt $\check{0} \in \mathrm{dom}(\check{\omega})$ und $1_i \Vdash_{P_i} \big((\check{\omega}, \check{\geq}, \check{0})$ ist Forcing-Halbordnung$\big)$. Wir setzen deshalb von nun an o.E. voraus, daß die Folge $\big((P_k, \leq_k, 1_k) \;\big|\; k \leq \kappa\big)$ an jeder Stelle von der in 33.2 (c) – (e) angegebenen Form ist.

Fixiere eine gemäß des Satzes gebildete Folge $\big((P_k, \leq_k, 1_k) \;\big|\; k \leq \kappa\big)$.

33.4 Definition Sei $k \leq \kappa$ und $p \in P_k$. $\mathrm{supp}(p) :\equiv \{l < k \,|\, p(l) \neq \dot{1}_l\}$ ist der **Träger** (engl. **support**) von p.

33.5 Lemma *Ist $k \leq \kappa$ und $p \in P_k$, so ist* $\mathrm{supp}(p)$ *endlich.*

Beweis. Wir führen eine Induktion nach k durch. Die Behauptung ist evident im Fall $k = 0$. Gilt $\mathrm{Lim}(k)$, so existiert ein $m < k$ mit $p(l) = \dot{1}_l$ für $m \leq l < k$. Also ist $\mathrm{supp}(p) = \mathrm{supp}(p \upharpoonright m)$. Da $p \upharpoonright m \in P_m$ nach Definition von P_k gilt, folgt aus der Induktionsvoraussetzung die Endlichkeit von $\mathrm{supp}(p)$. Ist schließlich $k = l + 1$, so folgt $\overline{\overline{\mathrm{supp}(p)}} \leq \overline{\overline{\mathrm{supp}(p \upharpoonright l)}} + 1$, und da nach Induktionsvoraussetzung $\mathrm{supp}(p \upharpoonright l)$ endlich ist, folgt auch hier die Endlichkeit von $\mathrm{supp}(p)$. QED

33.6 Bemerkung In Hinblick auf 33.5 bezeichnet man das hier vorgestellte iterierte Forcing auch als **Iteration mit endlichen Trägern** bzw. **finite support iteration**. Man kann die Kardinalität der Träger auch durch andere Kardinalzahlen nach oben beschränken und erhält z.B. Iterationen mit abzählbaren Trägern. Auch völlige Freiheit in der Kardinalität der Träger kann man zulassen. Jedes dieser iterierten Forcings zeichnet sich durch andere Eigenschaften aus. In 34.1 werden wir sehen, daß finite support iteration in Zusammenhang mit der ccc steht in dem Sinn, daß die Forcing-Halbordnungen der Folge $\big((P_k, \leq_k, 1_k) \bigm| k \leq \kappa\big)$ ccc haben, wenn dies in jedem Schritt für die Glieder der Namenfolge $\big((\dot{Q}_k, \dot{\leq}_k, \dot{1}_k) \bigm| k < \kappa\big)$ erzwungen wird.

33.7 Satz *Sei $k \leq \kappa$.*

(a) Für $p, q \in P_k$ gilt: $p \leq_k q \longleftrightarrow \forall l < k\; p \upharpoonright l \Vdash_{P_l} p(l) \dot{\leq}_l q(l)$.

(b) Sei $p \in \times_{l<k} \mathrm{dom}(\dot{Q}_l)$ und p habe endlichen Träger. Dann gilt: $p \in P_k \longleftrightarrow \forall l < k\; p \upharpoonright l \Vdash_{P_l} p(l) \in \dot{Q}_l$.

Beweis. Wir führen eine Induktion nach k durch.

Die Behauptung ist im Fall $k = 0$ wegen $(P_0, \leq_0, 1_0) = (\{\emptyset\}, \{(\emptyset, \emptyset)\}, \emptyset)$ evident.

Ist $k = l + 1$, so folgt (a) aus

$$\begin{aligned} p \leq_k q &\iff p \upharpoonright l \leq_l q \upharpoonright l \wedge p \upharpoonright l \Vdash_{P_l} p(l) \dot{\leq}_l q(l) \\ &\iff \forall i < l\; p \upharpoonright i \Vdash_{P_i} p(i) \dot{\leq}_i q(i)\big) \wedge p \upharpoonright l \Vdash_{P_l} p(l) \dot{\leq}_l q(l) \quad \text{(Ind.Vor.)} \\ &\iff \forall i < k\; p \upharpoonright i \Vdash_{P_i} p(i) \dot{\leq}_i q(i)\big). \end{aligned}$$

(b) folgt, da nach Voraussetzung in (b) $p\colon k \to M$ und $p(l) \in \mathrm{dom}(\dot{Q}_l)$ gilt, aus:

$$\begin{aligned} p \in P_k &\iff p \upharpoonright l \in P_l \wedge p \upharpoonright l \Vdash_{P_l} p(l) \in \dot{Q}_l \\ &\iff \forall i < l\; p \upharpoonright i \Vdash_{P_i} p(i) \in \dot{Q}_i \wedge p \upharpoonright l \Vdash_{P_l} p(l) \in \dot{Q}_l \quad \text{(Ind.Vor.)} \\ &\iff \forall i < k\; p \upharpoonright i \Vdash_{P_i} p(i) \in \dot{Q}_i. \end{aligned}$$

Es gelte nun $\mathrm{Lim}(k)$. Dann folgt (a) aus:

$$\begin{aligned} p \leq_k q &\iff \forall l < k\; p \upharpoonright l \leq_l q \upharpoonright l \\ &\iff \forall l < k\; \big(\forall i < l\; p \upharpoonright i \Vdash_{P_i} p(i) \dot{\leq}_i q(i)\big) \quad \text{(Ind.Vor.)} \\ &\iff \forall l < k\; p \upharpoonright l \Vdash_{P_l} p(l) \dot{\leq}_l q(l)\big). \end{aligned}$$

(b) folgt, da nach Voraussetzung in (b) $\mathrm{supp}(p)$ endlich ist, also ein $m < k$ existiert mit $\mathrm{supp}(p) \subset m$,[231] aus:

$$\begin{aligned} p \in P_k &\iff \forall l < k\; p \upharpoonright l \in P_l \\ &\iff \forall l < k\; \big(\forall i < l\; p \upharpoonright i \Vdash_{P_i} p(i) \in \dot{Q}_i\big) \quad \text{(Ind.Vor.)} \\ &\iff \forall l < k\; p \upharpoonright l \Vdash_{P_l} p(l) \in \dot{Q}_l. \end{aligned}$$

Damit ist das Kriterium bewiesen. QED

33.8 Corollar *Sei $k \leq \kappa$. Dann gilt:*

(a) $p \in P_k \longrightarrow \forall l < k\; p \upharpoonright l \in P_l$.

[231] Dann ist also $p(l) = \dot{1}_l$ für $m \leq l < k$.

(b) Für $p, q \in P_k$ gilt: $p \leq_k q \longrightarrow \forall l < k \; p \restriction l \leq_l q \restriction l$.

Beweis. zu (a). Für $l < k$ gilt:

$$\begin{aligned} p \in P_k &\Longrightarrow \forall i < k \; p \restriction i \Vdash_{P_i} p(i) \in \dot{Q}_i \quad (33.7)\\ &\Longrightarrow \forall i < l \; p \restriction i \Vdash_{P_i} p(i) \in \dot{Q}_i\\ &\Longrightarrow p \restriction l \in P_l \quad (33.7). \end{aligned}$$

zu (b). Seien $p, q \in P_k$ und sei $l < k$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} p \leq_k q &\Longrightarrow \forall i < k \; p \restriction i \Vdash_{P_i} p(i) \dot{\leq}_i q(i) \quad (33.7)\\ &\Longrightarrow \forall i < l \; p \restriction i \Vdash_{P_i} p(i) \dot{\leq}_i q(i)\\ &\Longrightarrow p \restriction l \leq_l q \restriction l \quad (33.7). \end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. QED

Mit Hilfe des Kriteriums und seines Corollares zeigen wir, daß man aus Elementen von P_k neue Elemente „zusammenmischen" kann. Dieses Verfahren wird später von Bedeutung sein, wenn wir zwischen P_l und P_k $(l \leq k \leq \kappa)$ hin und her wechseln müssen.

33.9 Lemma *Seien $l \leq k \leq \kappa$. Sei $p' \in P_k$ und $q \in P_l$ mit $q \leq_l p' \restriction l$. Definiere $q' : k \to M$ durch*

$$q'(i) :\equiv \begin{cases} q(i), & \text{falls } i < k;\\ p'(i), & \text{falls } k \leq i < \kappa; \end{cases}$$

also $q' :\equiv q \cup p' \restriction k \setminus l$. Dann gilt $q' \in P_k$ und $q' \leq_k p'$.

Beweis. Offenbar ist $\mathrm{supp}(q') \subset \mathrm{supp}(q) \cup \mathrm{supp}(p)$, also endlich, und für $i < k$ ist $q'(i) \in \mathrm{dom}(\dot{Q}_i)$. (Beachte, daß die entsprechenden Eigenschaften auf q bzw. p nach Definition der Forcing-Halbordnungen zutreffen.) Die Voraussetzungen von 33.7 sind also erfüllt. In Hinblick auf 33.7 zeigen wir:

(1) $\quad \forall i < k \; \big(q' \restriction i \Vdash_{P_i} q'(i) \dot{\leq}_i p'(i) \wedge q' \restriction i \Vdash_{P_i} q'(i) \in \dot{Q}_i\big)$.

Beweis. Wir führen eine Induktion nach $i < k$ durch. Sei also $i < k$ und für alle $j < i$ sei

$$q' \restriction j \Vdash_{P_j} q'(j) \dot{\leq}_j p'(j) \wedge q' \restriction j \Vdash_{P_j} q'(j) \in \dot{Q}_j$$

gezeigt. Wir unterscheiden zwei Fälle:
Fall 1. $i + 1 \leq l$. Dann gilt

(1.1) $\quad q' \restriction i + 1 = q \restriction i + 1 \, (\in P_{i+1})$.

Aus $q \leq_k p' \restriction k$ folgt nach 33.7 $q \restriction i \Vdash_{P_i} q(i) \dot{\leq}_i p'(i)$, was wegen (1.1) auf $q' \restriction i \Vdash_{P_i} q'(i) \dot{\leq}_i p'(i)$ führt. Aus (1.1) und 33.7 folgt weiter $q' \restriction i \Vdash_{P_i} q'(i) \in \dot{Q}_i$. Damit ist Fall 1 abgeschlossen.
Fall 2. $k \geq i + 1 > l$. In diesem Fall gilt

(1.2) $\quad q'(i) = p'(i)$,

woraus wegen $1_i \Vdash_{P_i} \big((\dot{Q}_i, \dot{\leq}_i, \dot{1}_i) \text{ ist Forcing-Halbordnung}\big)$

(1.3) $\quad 1_i \Vdash_{P_i} q'(i) \dot{\leq}_i p'(i)$

folgt. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\forall j < i \; q' \restriction j \Vdash_{P_j} q'(j) \in \dot{Q}_j$, was nach 33.7 $q' \restriction i \in P_i$ impliziert. Dann ist $q' \restriction i \leq_i 1_i$ und (1.3) impliziert $q' \restriction i \Vdash_{P_i} q'(i) \dot{\leq}_i p'(i)$.
Um $q' \restriction i \Vdash_{P_i} q'(i) \in \mathrm{dom}(\dot{Q}_i)$ zu zeigen, bemerken wir, daß nach Induktionsvoraussetzung

$$\forall j < i \; q' \restriction j \Vdash_{P_j} q'(j) \dot{\leq}_j p'(j)$$

gilt, was nach 33.7 auf

(1.4) $q' \restriction i \leq_i p' \restriction i$

führt. Wegen $p' \in P_k$ gilt $p' \restriction i+1 \in P_{i+1}$, was nach 33.7 $p' \restriction i \Vdash_{P_i} p'(i) \in \mathrm{dom}(\dot{Q}_i)$ impliziert. Wegen (1.2) ist dies mit $p' \restriction i \Vdash_{P_i} q'(i) \in \mathrm{dom}(\dot{Q}_i)$ gleichwertig. Aus (1.4) folgt nun $q' \restriction i \Vdash_{P_i} q'(i) \in \mathrm{dom}(\dot{Q}_i)$. Damit ist Fall 2. abgeschlossen. qed(1)

Nach 33.7 folgt aus (1) sofort die Behauptung des Lemmas. QED

Das System $\big((P_k, \leq_k, 1_k) \bigm| k \leq \kappa\big)$ bildet ein aufsteigendes System von Forcing-Halbordnungen in folgendem Sinn:

33.10 Satz *Sei $l \leq k \leq \kappa$. Dann ist durch $p \mapsto p^\frown(\dot{1}_i | l \leq i < k)$ eine injektive Funktion*

$$\iota_{l,k}: P_l \to P_k$$

definiert, die folgende Eigenschaften hat:

(a) $\iota_{l,k}(1_l) = 1_k$.

(b) $p \leq_l q \longleftrightarrow \iota_{l,k}(p) \leq_k \iota_{l,k}(q)$.

(c) $p \parallel q$ *in* $P_l \longleftrightarrow \iota_{l,k}(p) \parallel \iota_{l,k}(q)$ *in* P_k.

(d) $p \perp q$ *in* $P_l \longleftrightarrow \iota_{l,k}(p) \perp \iota_{l,k}(q)$ *in* P_k.

Beweis. Sei zunächst $p \in P_l$. Offenbar gilt $\iota_{l,k}(p): k \to M$ und $\mathrm{supp}(\iota_{l,k}(p)) = \mathrm{supp}(p)$ endlich. $\iota_{l,k}$ ist injektiv, denn ist $q \in P_l$, $p \neq q$, so existiert ein $i < l$ mit $p(i) \neq q(i)$, und es ist $\iota_{l,k}(p)(i) = p(i) \neq q(i) = \iota_{l,k}(q)(i)$, also $\iota_{l,k}(p) \neq \iota_{l,k}(q)$. Für $i < k$ gilt $\iota_{l,k}(p)(i) \in \mathrm{dom}(\dot{Q}_i)$ wegen $p(i) \in \mathrm{dom}(\dot{Q}_i)$ im Fall $i < l$ und $\dot{1}_i \in \mathrm{dom}(\dot{Q}_i)$ im Fall $l \leq i < k$. Wir können also im folgenden das Kriterium 33.7 anwenden. Um $\iota_{l,k}[P_l] \subset P_k$ zu zeigen, müssen wir dann verifizieren:

(1) $\forall p \in P_l\, \forall i < k\; \iota_{l,k}(p) \restriction i \Vdash_{P_i} \iota_{l,k}(p)(i) \in \dot{Q}_i$.

Beweis. Sei $p \in P_l$ beliebig. Wir zeigen $\iota_{l,k}(p) \restriction i \Vdash_{P_i} \iota_{l,k}(p)(i) \in \dot{Q}_i$ durch Induktion nach i. Sei also $i < k$ und

(1.1) $\iota_{l,k}(p) \restriction j \Vdash_{P_j} \iota_{l,k}(p)(j) \in \dot{Q}_j$

für alle $j < i$ bewiesen. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1. $i + 1 \leq l$. In diesem Fall ist $\iota_{l,k}(p) \restriction i+1 = p \restriction i+1$. Nach 33.8 ist also $\iota_{l,k}(p) \restriction i+1 \in P_{i+1}$, so daß $\iota_{l,k}(p) \restriction i \Vdash_{P_i} \iota_{l,k}(p)(i) \in \dot{Q}_i$ gilt.

Fall 2. $i + 1 > l$. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt nach 33.7 $\iota_{l,k}(p) \restriction i \in P_i$. Dann ist insbesondere $\iota_{l,k}(p) \restriction i \leq_i 1_i$. Da $1_i \Vdash_{P_i} \dot{1}_i \in \dot{Q}_i$ wegen $1_i \Vdash_{P_i} \big((\dot{Q}_i, \dot{\leq}_i, \dot{1}_i)$ ist Forcing-Halbordnung$\big)$ gilt, folgt $\iota_{l,k}(p) \restriction i \Vdash_{P_i} \dot{1}_i \in \dot{Q}_i$. Wegen $\iota_{l,k}(p)(i) = \dot{1}_i$ ergibt sich hieraus die Behauptung. qed(1)

Wir beweisen nun (a)–(d).

zu (a). Dies folgt sofort aus den Definitionen.

zu (b). „$\Rightarrow$“. Seien $p, q \in P_l$ mit $p \leq_l q$. Wegen $q = \iota_{l,k}(q) \restriction l$ gilt dann $p \leq_l \iota_{l,k}(q) \restriction l$. Nach 33.9 ist dann $p \cup \iota_{l,k}(q) \restriction k \setminus l \leq_k \iota_{l,k}(q)$. Wegen $\iota_{l,k}(q) \restriction k \setminus l = (\dot{1}_i | l \leq i < k)$ gilt $p \cup \iota_{l,k}(q) \restriction k \setminus l = \iota_{l,k}(p)$, so daß sich die Behauptung ergibt.

„$\Leftarrow$“. Dies folgt wegen $p = \iota_{l,k}(p) \restriction l$ und $q = \iota_{l,k}(q) \restriction l$ sofort aus 33.8.

zu (c). „$\Rightarrow$“. Ist $r \in P_l$ mit $r \leq_l p, q$ gilt, so gilt nach (b) $\iota_{l,k}(r) \leq_k \iota_{l,k}(p), \iota_{l,k}(q)$, d.h., $\iota_{l,k}(p) \parallel \iota_{l,k}(q)$ ist.

„$\Leftarrow$“. Sei $r' \in P_k$ mit $r' \leq_k \iota_{l,k}(p), \iota_{l,k}(q)$. Sei $r :\equiv r' \restriction l$. Nach 33.8 gilt einerseits $r \in P_l$ und andererseits $r \leq_l \iota_{l,k}(p) \restriction l, \iota_{l,k}(q) \restriction l$. Wegen $\iota_{l,k}(s) \restriction l = s$ für alle $s \in P_l$ folgt hieraus die Behauptung.

zu (d). Dies folgt sofort aus (c). QED

33.11 Corollar *Seien $l \leq k \leq \kappa$. Dann gilt:* $\forall p \in P_k \; p \leq_k \iota_{l,k}(p \upharpoonright l)$.

Beweis. Sei $p \in P_k$. Wir zeigen:

(1) $\quad \forall\, i < k \; p \upharpoonright i \Vdash_{P_i} p(i) \dot{\leq}_i \iota_{l,k}(p \upharpoonright l)(i)$.

Beweis. Wir führen eine Induktion nach $i < k$ durch und unterscheiden hierzu wie üblich zwei Fälle.
Fall 1. $i+1 \leq l$. Dann gilt $p \upharpoonright i+1 = \iota_{l,k}(p \upharpoonright l) \upharpoonright i+1$, so daß insbesondere $p \upharpoonright i+1 \leq_i \iota_{l,k}(p \upharpoonright l) \upharpoonright i+1$ gilt, was nach 33.7 $p \upharpoonright i \Vdash_{P_i} p(i) \dot{\leq}_i \iota_{l,k}(p \upharpoonright l)(i)$ impliziert. Damit ist Fall 1 abgeschlossen.
Fall 2. $k \geq i+1 > l$. Wegen $p \upharpoonright i+1 \in P_{i+1}$ folgt aus 33.7

(1.1) $\quad p \upharpoonright i \Vdash_{P_i} p(i) \in \dot{Q}_i$.

Wegen $1_i \Vdash_{P_i} \big((\dot{Q}_i, \dot{\leq}_i, \dot{1}_i)$ ist Forcing-Halbordnung$\big)$ und $p \upharpoonright i \in P_i$ gilt ferner

(1.2) $\quad p \upharpoonright i \Vdash_{P_i} (\dot{Q}_i, \dot{\leq}_i, \dot{1}_i)$ ist Forcing-Halbordnung.

Aus (1.1) und (1.2) folgt $p \upharpoonright i \Vdash_{P_i} p(i) \dot{\leq}_i \dot{1}_i$. Wegen $\iota_{l,k}(p \upharpoonright l)(i) = \dot{1}_i$ war dies zu zeigen. qed(1)

Aus (1) und 33.7 folgt die Behauptung. QED

33.12 Corollar *Seien $l \leq k \leq \kappa$. Dann gilt:* $\forall p' \in P_k \; \forall q \in P_l \; \big(p' \upharpoonright l \leq_l q \longrightarrow p' \leq_k \iota_{l,k}(q)\big)$.

Beweis. Nach 33.11 und 33.10(b) gilt $p' \leq_k \iota_{l,k}(p' \upharpoonright l) \leq_k \iota_{l,k}(q)$. QED

33.3 Die Kette der Modelle im iterierten Forcing.

Sei G_κ ein P_κ-generischer Filter über M. Für $k \leq \kappa$ sei

$$G_k :\equiv \{p \upharpoonright k \,|\, p \in G_\kappa\}.$$

Dann gilt

33.13 Lemma *G_k ist ein P_k-generischer Filter über M.*

Beweis. Wegen 33.8(a) ist $G_k \subset P_k$.

(1) $\quad G_k$ ist ein Filter auf P_k.

Beweis. G_k ist nach oben abgeschlossen. Um dies zu sehen, fixiere $p \in G_k$ und $q \in P_k$ mit $p \leq_k q$. Wähle $p' \in G_\kappa$ mit $p = p' \upharpoonright k$. Nach 33.12 gilt $p' \leq_\kappa \iota_{k,\kappa}(q)$. Da G_κ als Filter nach oben abgeschlossen ist, folgt hieraus $\iota_{k,\kappa}(q) \in G_\kappa$, so daß $q = \iota_{k,\kappa}(q) \upharpoonright k \in G_k$ ist. Dies war zu zeigen.
Je zwei Elemente von G_k sind kompatibel in G_k. Um dies zu verifizieren, fixieren wir $p, q \in G_k$. Dann existieren $p', q' \in G_k$ mit $p = p' \upharpoonright k$ und $q = q' \upharpoonright k$. Da p', q' als Elemente des Filters G_κ in G_κ kompatibel sind, existiert ein $r' \in G_\kappa$ mit $r' \leq_\kappa p', q'$. Dann ist $r' \upharpoonright k \in G_k$ und nach 33.8 gilt $r' \upharpoonright k \leq_k p' \upharpoonright k = p$ und $r' \upharpoonright k \leq_k q' \upharpoonright k = q$. Dies war zu zeigen. qed(1)

Um zu sehen, daß der Filter P_k-generisch über M ist, fixiere $D \in M$, so daß D dicht in P_k ist. Sei

$$D' :\equiv \{p' \in P_\kappa \,|\, p' \upharpoonright k \in D\}.$$

Offenbar ist $D' \in M$.

(2) $\quad D'$ ist dicht in P_κ.

Beweis. Sei $p' \in P_\kappa$. Dann ist $p' \upharpoonright k \in P_k$, so daß wegen der Dichtheit von D in P_k ein $q \in D$ existiert mit $q \leq_k p' \upharpoonright k$. Sei $q' :\equiv q \cup p' \upharpoonright \kappa \setminus k$. Nach 33.9 gilt $q' \in P_\kappa$ und $q' \leq_\kappa p'$. Es ist $q' \in D'$ wegen $q' \upharpoonright k = q \in D$. q' ist also eine in D' liegende Verstärkung von p' und ist damit wie benötigt. qed(2)

Sei nun $p' \in D' \cap G_\kappa$. Dann gilt $p' \upharpoonright k \in D$ und $p' \upharpoonright k \in G_k$ nach Definition von D' und G_k. Also ist $G_k \cap D \neq \emptyset$. Dies war noch zu zeigen. QED

Für $k \leq \kappa$ setzen wir nun $M_k :\equiv M[G_k]$.

33.14 Lemma *Für $l \leq k \leq \kappa$ gilt $M_l \subset M_k$.*

Beweis. Aus $l \in M_k$ und $G_k \in M_k$ folgt leicht $G_l = \{p \upharpoonright l \,|\, p \in G_\kappa\} = \{p \upharpoonright l \,|\, p \in G_k\} \in M_k$. Da M_l das $\subset$-kleinste Grundmodell N mit $M \subset N$ und $G_l \in N$ ist, folgt hieraus $M_l \subset M_k$. QED

Für $k < \kappa$ setzen wir $(Q^k, \leq^k, 1^k) :\equiv (\dot{Q}_k^{G_k}, \dot{\leq}_k^{G_k}, \dot{1}_k^{G_k})$.

33.15 Lemma $(Q^k, \leq^k, 1^k)$ *ist eine Forcing-Halbordnung für M_k.*

Beweis. Es ist $(Q^k, \leq^k, 1^k) \in M[G_k]$. Wegen $1_k \Vdash_{P_k} \big((\dot{Q}_k, \dot{\leq}_k, \dot{1}_k)$ ist Forcing-Halbordnung$\big)$ gilt ferner $\big((\dot{Q}_k^{G_k}, \dot{\leq}_k^{G_k}, \dot{1}_k^{G_k})$ ist Forcing-Halbordnung$\big)^{M[G_k]}$, also $\big((Q^k, \leq^k, 1^k)$ ist Forcing-Halbordnung$\big)^{M_k}$. QED

33.4 Das Iterationstheorem.

Wir zeigen, daß M_{k+1} eine generische Erweiterung von M_k bzgl. der Forcing-Halbordnung $(Q^k, \leq^k, 1^k)$ ist. Hierzu haben wir einen Q^k-generischen Filter H^k über M_k anzugeben, so daß $M_{k+1} = M_k[H^k]$ ist. Wir setzen

$$H^k :\equiv \big\{p(k)^{G_k} \,\big|\, p \in G_\kappa\big\}.$$

Dann gilt:

33.16 Lemma *H^k ist ein Q^k-generischer Filter über M_k.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß H^k ein Filter auf $(Q^k, \leq^k, 1^k)$ ist.
Um $H^K \subset Q^k$ zu sehen fixiere $p \in G_\kappa$. Dann ist $p \upharpoonright k \in G_k$. Da $p \upharpoonright k \Vdash_{P_k} p(k) \in \dot{Q}_k$ gilt, folgt $\big(p(k)^{G_k} \in Q^k\big)^{M[G_k]}$, was wegen aus Absolutheitsgründen $p(k)^{G_k} \in Q^k$ impliziert.
Weiter gilt:

(1) H^k ist nach oben abgeschlossen.

Beweis. Sei $h \in H^k$ und $q \in Q^k$ mit $h \leq^k q$. Wir zeigen

(1.1) Es gibt ein $\dot{q} \in \mathrm{dom}(\dot{Q}_k)$ und ein $p' \in G_\kappa$ mit $h = p'(k)^{G_k}$, $q = \dot{q}^{G_k}$ und $p' \upharpoonright k \Vdash_{P_k} \big(\dot{q} \in \dot{Q}_k \wedge p'(k) \dot{\leq}_k \dot{q}\big)$.

Beweis. Nach Definition von H^k existiert ein $\tilde{p} \in G_\kappa$ mit $h = \tilde{p}(k)^{G_k}$. Nach Definition von $Q^k = \dot{Q}_k^{G_k}$ existiert ein $\dot{q} \in \mathrm{dom}(\dot{Q}_k)$ mit $q = \dot{q}^{G_k}$. Aus $\dot{q}^{G_k} \in \dot{Q}_k^{G_k} \wedge \tilde{p}(k)^{G_k} \leq^k \dot{q}^{G_k}$, also

$$\big(\dot{q}^{G_k} \in \dot{Q}_k^{G_k} \wedge p(k)^{G_k} \leq^k \dot{q}^{G_k}\big)^{M[G_k]}$$

aus Absolutheitsgründen, folgt nach dem Forcing-Theorem die Existenz eines $r \in G_k$ mit

$$r \Vdash_{P_k} \big(\dot{q} \in \dot{Q}_k \wedge \tilde{p}(k) \dot{\leq}_k \dot{q}\big).$$

Nach Definition von G_k ist $r = r' \upharpoonright k$ für ein $r' \in G_\kappa$. Sei $s' \in G_\kappa$ eine gemeinsame Verstärkung von $\tilde{p}, r'$. Sei $s :\equiv s' \upharpoonright k$. Dann gilt $s \leq_k r$ wegen $s' \leq_\kappa r'$, und somit

$(*)\qquad s \Vdash_{P_k} \big(\dot q \in \dot Q_k \wedge \tilde p(k) \dot\le_k \dot q\big).$

Sei $p' :\equiv s \cup \tilde p \restriction \kappa \setminus k$. Wegen $s \le_k \tilde p \restriction k$ gilt nach 33.9 $p' \in P_\kappa$. Wegen $p' \restriction k = s$ und $p'(k) = \tilde p(k)$ folgt aus $(*)$ $p' \restriction k \Vdash_{P_k} \big(\dot q \in \dot Q_k \wedge p'(k) \dot\le_k \dot q\big)$. Es bleibt, $p' \in G_\kappa$ zu zeigen. Hierzu zeigen wir $s' \le_\kappa p'$, indem wir

$(**)\qquad s' \restriction i \Vdash_{P_i} s'(i) \dot\le_i p'(i).$

für $i < \kappa$ verifizieren und dann 33.7 anwenden. Sei also $i < \kappa$. Ist $i + 1 \le k$, so ist $p'(i) = s'(i)$ und $(**)$ gilt. Ist $i + 1 > k$, so gilt $s' \restriction i \Vdash_{P_i} s'(i) \dot\le_i \tilde p(i)$ wegen $s' \le_\kappa \tilde p$; da $p'(i) = \tilde p(i)$ im Fall $i \ge k$ gilt, führt dies auf $(**)$.

Damit ist $(**)$ bewiesen. Aus $(**)$ folgt nach 33.7 $s' \le_\kappa p'$, also $p' \in G_\kappa$ wegen $s' \in G_\kappa$. qed(1.1)

Sei nun $\tilde q :\equiv (p' \restriction k)^\frown \dot q$. Dann ist $\tilde q \in P_{k+1}$, denn es gilt $\tilde q \restriction k = p' \restriction k \in P_k$ und aus $p' \restriction k \Vdash_{P_k} \dot q \in \dot Q_k$ folgt $\tilde q \restriction k \Vdash_{P_k} \tilde q(k) \in \dot Q_k$. Ferner:

(1.2) $p' \restriction k + 1 \le_{k+1} \tilde q$.

Beweis. Es ist $p' \restriction k = \tilde q \restriction k \le_k \tilde q \restriction k$. Wegen $p' \restriction k \Vdash_{P_k} p'(k) \dot\le_k \dot q$ folgt weiter $p' \restriction k \Vdash_{P_k} p'(k) \dot\le_k \tilde q(k)$. qed(1.2)

Aus (1.2) folgt nach 33.12 $p' \le_\kappa \iota_{k+1,\kappa}(\tilde q)$, so daß $\iota_{k+1,\kappa}(\tilde q) \in G_\kappa$ ist. Wegen

$$q = \dot q^{G_k} = \tilde q(k)^{G_k} = \iota_{k+1,\kappa}(\tilde q)(k)^{G_k}$$

ist also $q \in H^k$. qed(1)

Daß H^k ein Filter ist, folgt nun aus

(2) Je zwei Elemente von H^k haben in H^k eine gemeinsame Verstärkung.

Beweis. Seien $p(k)^{G_k}, q(k)^{G_k} \in H^k$ mit $p, q \in G_\kappa$. Wähle $r \in G_\kappa$ mit $r \le_\kappa p, q$. Dann gilt $r \restriction k \in G_k$ und $r \restriction k \Vdash_{P_k} r(k) \dot\le_k p(k)$ sowie $r \restriction k \Vdash_{P_k} r(k) \dot\le_k q(k)$, so daß sich

$$\big(r(k)^{G_k} \le^k p(k)^{G_k} \wedge r(k)^{G_k} \le^k q(k)^{G_k}\big)^{M[G_k]},$$

also aus Absolutheitsgründen $r(k)^{G_k} \le^k p(k)^{G_k} \wedge r(k)^{G_k} \le^k q(k)^{G_k}$ ergibt. Wegen $r \in G_\kappa$ ist schließlich $r(k)^{G_k} \in H^k$, also wie benötigt. qed(2)

Wir zeigen nun, daß H^k Q^k-generisch über M_k ist.

(3) Sei $D \in M_k$ dicht in Q^k. Dann ist $H^k \cap D \neq \emptyset$.

Beweis. Wegen $M_k = M[G_k]$ existiert ein M-Name $\dot D$ für D: $D = \dot D^{G_k}$. Aus

$$\dot D^{G_k} \text{ ist dicht in } (\dot Q_k^{G_k}, \dot\le_k^{G_k} \dot 1_k^{G_k})$$

folgt aus Absolutheitsgründen $\big(\dot D^{G_k} \text{ ist dicht in } (\dot Q_k^{G_k}, \dot\le_k^{G_k} \dot 1_k^{G_k})\big)^{M[G_k]}$, so daß nach dem Forcing-Theorem (unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die Elemente von G_k von der Form $p' \restriction k$ mit $p' \in G_\kappa$ sind) ein $p' \in G_\kappa$ existiert mit

(3.1) $p' \restriction k \Vdash_{P_k} \dot D$ ist dicht in $(\dot Q_k, \dot\le_k, \dot 1_k)$.

Sei $D' :\equiv \{q' \in P_\kappa \,|\, q' \restriction k \Vdash_{P_k} q'(k) \in \dot D\}$. Dann ist $D' \in M$. Wir zeigen:

(3.2) D' ist dicht in P_κ unter p'.

Beweis. Sei $r' \le_\kappa p'$. Dann gilt $r' \restriction k \le_k p' \restriction k$, so daß (3.1) $r' \restriction k \Vdash_{P_k} \dot D$ ist dicht in $(\dot Q_k, \dot\le_k, \dot 1_k)$ impliziert. Nach Definition von P_κ gilt $r' \restriction k \Vdash_{P_k} r'(k) \in \dot Q_k$, so daß wir insgesamt

$(*)\qquad r' \upharpoonright k \Vdash_{P_k} \dot{D}$ ist dicht in $(\dot{Q}_k, \dot{\leq}_k, \dot{1}_k) \wedge r'(k) \in \dot{Q}_k$

haben. Dies impliziert

$(**)\qquad r' \upharpoonright k \Vdash_{P_k} \exists x \left(x \dot{\leq}_k p'(k) \wedge x \in \dot{D} \wedge x \in \dot{Q}_k\right).$

Beweis. Ist G ein P_k-generischer Filter über M_k mit $r' \upharpoonright k \in G$, so gilt wegen $(*)$ und

$1_k \Vdash_{P_k} (\dot{Q}_i, \dot{\leq}_i, \dot{1}_i)$ ist Forcing-Halbordnung

in $M_k[G]$: $\left(\dot{Q}_k^G, \dot{\leq}_k^G, \dot{1}_k^G\right)$ ist Forcing-Halbordnung $\wedge$ $\dot{D}^G$ ist dicht in $\dot{Q}_k^G \wedge r'(k)^G \in \dot{Q}_k^G$. Dies impliziert die Existenz eines $x \in \dot{Q}_k^G$ mit $x \dot{\leq}_k^G r'(k)^G \wedge x \in \dot{D}^G$. Also gilt $\left(\exists x \left(x \dot{\leq}_k^G r'(k)^G \wedge x \in \dot{D}_k^G \wedge x \in \dot{Q}_k^G\right)\right)^{M[G]}$. Dies war zu zeigen. qed$(**)$

Nach 28.25 folgt aus $(**)$ die Existenz eines $\bar{q} \leq_k r' \upharpoonright k$ und eines $\dot{q} \in \operatorname{dom}(\dot{Q}_k)$, so daß

$\bar{q} \Vdash_{P_k} \dot{q} \dot{\leq}_k r'(k) \wedge \dot{q} \in \dot{D}$

gilt. Sei $\tilde{q} :\equiv \bar{q}^\frown \dot{q}$. Dann gilt $\tilde{q} \upharpoonright k = \bar{q} \leq_k r' \upharpoonright k$ und

$\underbrace{\tilde{q} \upharpoonright k}_{=\bar{q}} \Vdash_{P_k} \underbrace{\tilde{q}(k)}_{\dot{q}} \dot{\leq}_k r'(k),$

so daß sich $\tilde{q} \leq_{k+1} r' \upharpoonright k+1$ ergibt. Sei $q' :\equiv \tilde{q} \cup r' \upharpoonright \kappa \setminus (k+1)$. Nach 33.9 gilt $q' \in P_\kappa$ und $q' \leq_k r'$. Wegen $q' \upharpoonright k = \bar{q} \Vdash_{P_k} q'(k) \in \dot{D}$ (beachte $q'(k) = \dot{q}$) folgt ferner $q' \in D'$. q' ist also wie benötigt. qed(3.2)

Wegen $p' \in G_\kappa$ existiert nach (3.2) ein $q' \in D' \cap G_\kappa$ mit $q' \leq_\kappa p'$. Dann gilt $q' \upharpoonright k \Vdash_{P_k} q'(k) \in \dot{D}$ nach Definition von D', und $q' \upharpoonright k \in G_k$ nach Definition von G_k. Hieraus folgt $\left(q'(k)^{G_k} \in \dot{D}^{G_k}\right)^{M[G_k]}$, also $q'(k)^{G_k} \in \dot{D}^{G_k} = D$. Wegen $q' \in G_\kappa$ ist $q'(k)^{G_k} \in H^k$, so daß $D \cap H^k \neq \emptyset$ nachgewiesen ist. qed(3)

Damit ist das Lemma bewiesen. QED

Wir können nun zeigen, daß M_{k+1} eine generische Erweiterung von M_k ist.

33.17 Satz (Iterationstheorem) *Für* $k < \kappa$ *gilt* $M_{k+1} = M_k[H^k]$.

Beweis. „$\subset$". Wir zeigen

$(1)\qquad G_{k+1} = \left\{p \in P_{k+1} \,\middle|\, p \upharpoonright k \in G_k \wedge p(k)^{G_k} \in H^k\right\}.$

Beweis. „$\subset$". Ist $p \in G_{k+1}$, so ist $p = p' \upharpoonright k+1$ für ein $p' \in G_\kappa$. Dann ist $p \upharpoonright k = p' \upharpoonright k \in G_k$ und $p(k)^{G_k} = p'(k)^{G_k} \in H^k$.

„$\supset$". Sei $p \in P_{k+1}$ mit $p \upharpoonright k \in G_k$ und $p(k)^{G_k} \in H^k$. Dann existieren nach Definition von G_k bzw. H^k $p'_0, p'_1 \in G_\kappa$ mit $p \upharpoonright k = p'_0 \upharpoonright k$ bzw. $p(k)^{G_k} = p'_1(k)^{G_k}$. Aus letzterem folgt nach dem Forcing-Theorem (unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die Elemente von G_k von der Form $p' \upharpoonright k$ mit $p' \in G_\kappa$ sind) die Existenz eines $p'_2 \in G_\kappa$ mit $p'_2 \upharpoonright k \Vdash_{P_k} p(k) = p'_1(k)$. Sei $p' \in G_k$ eine gemeinsame Verstärkung von p'_0, p'_1, p'_2. Wir zeigen

$(1.1)\qquad p' \upharpoonright k+1 \leq_{k+1} p,$

woraus, wie benötigt, $p \in G_{k+1}$ wegen $p' \upharpoonright k+1 \in G_{k+1}$ folgt.

(1.1) erhalten wir wie folgt: wegen $p' \upharpoonright k \leq_k p'_0 \upharpoonright k = p \upharpoonright k$ gilt $p' \upharpoonright k \leq_k p \upharpoonright k$. Des weiteren folgt aus $p' \upharpoonright k \leq_k p'_2 \upharpoonright k$ und $p'_2 \upharpoonright k \Vdash_{P_k} p(k) = p'_1(k)$ zunächst $p' \upharpoonright k \Vdash_{P_k} p(k) = p'_1(k)$. Aus $p' \leq_\kappa p'_1$ folgt nach 33.7 insbesondere $p' \upharpoonright k \Vdash_{P_k} p'(k) \dot{\leq}_k p'_1(k)$. Die letzten beiden Aussagen implizieren $p' \upharpoonright k \Vdash_{P_k} p'(k) \dot{\leq}_k p(k)$. Nach Definition von $\leq_{k+1}$ gilt also (1.1).

Damit ist (1) gezeigt. qed(1)

Da die definierende Formel des Klassentermes in (1) sich ohne Veränderung der Aussage auf $M_k[H^k]$ relativieren läßt und die an der Definition dieses Termes beteiligten Parameter wegen $P_{k+1} \in M \subset M[G_k] = M_k \subset M_k[H^k]$, $G_k \in M[G_k] \subset M_k[H^k]$ und $H^k \in M_k[H^k]$ zu $M_k[H^k]$ gehören, folgt $G_{k+1} \in M_k[H^k]$, also $M_{k+1} = M[G_{k+1}] \subset M_k[H^k]$.

„$\supset$". Aus $G_k = \{p \restriction k \mid p \in G_{k+1}\}$ und $H^k = \{p(k)^{G_k} \mid p \in G_{k+1}\}$ folgt, daß sich G_k und H^k innerhalb von $M_{k+1} = M[G_{k+1}]$ berechnen lassen. Also gilt $G_k, H^k \in M[G_{k+1}] = M_{k+1}$, woraus $M_k[H^k] = M[G_k][H^k] \subset M_{k+1}$ folgt.

Damit ist der Satz bewiesen. QED

Damit ist die Konstruktion des iterierten Forcings der Länge κ zur Namenfolge $\big((\dot{Q}_k, \dot{\leq}_k, \dot{1}_k) \mid k < \kappa\big)$ abgeschlossen.

34 finite support iteration mit ccc-Forcing-Halbordnungen.

Wir fixieren ein Grundmodell M, $\kappa \in \mathrm{On} \cap M$ und eine Folge $\big((\dot{Q}_i, \dot{\leq}_i, \dot{1}_i) \mid i < \kappa\big) \in M$. Die Folge $\big((P_k, \leq_k, 1_k) \mid k \leq \kappa\big) \in M$ sei die zu diesen Parametern gemäß 33.2 konstruierte finite support iteration der Länge κ. Wir nehmen o.E. an, daß die Namenfolge so beschaffen ist, daß für alle $i < \kappa$ $\dot{1}_i \in \mathrm{dom}(\dot{Q}_i)$ und $1_i \Vdash_{P_i} (\dot{Q}_i, \dot{\leq}_i, \dot{1}_i)$ ist Forcing-Halbordnung gilt. Wir haben dann:

34.1 Satz *Für $i < \kappa$ gelte $1_i \Vdash_{P_i} (\dot{Q}_i, \dot{\leq}_i, \dot{1}_i)$ hat* ccc*. Dann gilt $\big((P_\kappa, \leq_\kappa, 1_\kappa)$ hat* ccc$\big)^M$.

Beweis. Wir zeigen durch Induktion nach $k \leq \kappa$, daß $\big((P_k, \leq_k, 1_k)$ hat ccc$\big)^M$ gilt.

$k = 0$. In diesem Fall ist die Behauptung evident.

$k = l + 1$. Nach Induktionsvoraussetzung hat $(P_l, \leq_l, 1_l)$ ccc. Sei $(p_\xi | \xi < \aleph_1^M) \in M$ eine Sequenz von Elementen von P_k.

(1) Es gibt einen P_l-generischen Filter G über M, so daß $z :\equiv \{\xi < \aleph_1^M \mid p_\xi \restriction l \in G\}$ unbeschränkt in $\aleph_1^M$ ist.

Beweis. Angenommen, dies gilt nicht. Mit $\mu :\equiv \aleph_1^M$ und $\dot{z} :\equiv \{(\check{\xi}, p_\xi \restriction l) \mid \xi < \mu\}$ gilt dann für jeden P_l-generischen Filter G über M $\dot{z}^G$ ist beschränkt in μ, also $\big(\dot{z}^G$ ist beschränkt in $\check{\mu}^G\big)^{M[G]}$, da die Eigenschaft „$x$ ist beschränkt in μ" absolut zwischen transitiven **ZFC**-Modellen ist, vgl. 22.20. Dies ist gleichwertig mit $1_l \Vdash_{P_l} \dot{z}$ ist beschränkt in $\check{\mu}$. Sei

$$D :\equiv \{q \in P_l \mid \exists \gamma < \mu \; q \Vdash_{P_l} \check{\gamma} = \sup(\dot{z})\}.$$

Es gilt $D \in M$ und:

(1.1) D ist dicht in P_l.

Beweis. Zu $p \in P_l$ wähle einen P_l-generischen Filter G über M mit $p \in G$. Da $\dot{z}^G$ beschränkt in μ ist, ist $\gamma :\equiv \sup(\dot{z}^G) < \mu$. Aus Absolutheitsgründen gilt dann auch $\big(\check{\gamma}^G = \sup(\dot{z}^G)\big)^{M[G]}$, so daß nach dem Forcing-Theorem ein $r \in G$ existiert mit $r \Vdash_{P_l} \check{\gamma} = \sup(\dot{z})$. Sei q eine gemeinsame Verstärkung von p, r. (Beachte $p, r \in G$.) Dann gilt $q \leq_l p$ und $q \Vdash_{P_l} \check{\gamma} = \sup(\dot{z})$. Also ist $q \in D$, wie benötigt. qed(1.1)

Unter Ausnutzung der ccc von P_l zeigen wir:

(1.2) Es gibt ein $\delta < \mu$ mit $q \Vdash_{P_l} \dot{z} \subset \check{\delta}$ für alle $q \in D$.

Beweis. Wir arbeiten in M. Definiere $f: D \to P_l$ durch $f(q) :\equiv \{\gamma < \mu \mid q \Vdash^*_{P_l} \check{\gamma} = \sup(\dot{z})\}$. Nach Definition von D ist $f(q) \neq \emptyset$ für $q \in D$. (Beachte, daß D *in* M die Definition

$$D = \{q \in P_l \mid \exists \gamma < \mu \; q \Vdash^*_{P_l} \check{\gamma} = \sup(\dot{z})\}$$

hat, und wir in M arbeiten.) Nach **(AC)** existiert eine Sequenz $(\gamma_q | q \in D) \in \times_{q \in D} f(q)$. Sei $S :\equiv \{\gamma_q \mid q \in D\}$. Dann gilt

(∗) $\overline{\overline{S}} \leq \aleph_0$.

Beweis. Seien $q, q' \in D$ mit $\gamma_q \neq \gamma_{q'}$. Dann sind q und q' inkompatibel: um dies zu sehen, arbeite in V; gäbe es $p \in P_l$ mit $p \leq_l q, q'$, so würde $p \Vdash_{P_l} \check{\gamma}_q = \sup(\dot{z})$ und $p \Vdash_{P_l} \check{\gamma}_{q'} = \sup(\dot{z})$ gelten. Ist dann G ein P_l-generischer Filter über M mit $p \in G$, so gilt $\gamma_q = \sup(\dot{z}^G) = \gamma_{q'}$ im Widerspruch zur Voraussetzung über $\gamma_q, \gamma_{q'}$.
[Wir arbeiten nun wieder in M.] Nach dem soeben bewiesenen kann jedem Element von S ein Element von P_l zugeordnet werden, so daß diese paarweise inkompatibel sind. S induziert also eine Antikette von der gleichen Kardinalität wie S. Da P_l ccc hat, ist diese Antikette höchstens abzählbar, so daß $\overline{\overline{S}} \leq \aleph_0$ gilt. Dies war zu zeigen. qed(∗)

Sei nun $\delta :\equiv \sup(S)$. Da $\aleph_1$ regulär und $\overline{\overline{S}} \leq \aleph_0$ ist, ist $\delta < \aleph_1$ $(= \mu)$. Ist $q \in D$, so ist $\gamma_q \in S$ und somit $\gamma_q \leq \delta$. Trivialerweise gilt dann auch $q \Vdash^*_{P_l} \check{\gamma}_q \leq \check{\delta}$. Nach Definition von γ_q gilt ferner $q \Vdash^*_{P_l} \sup(\dot{z}) = \check{\gamma}_q$, was natürlich $q \Vdash^*_{P_l} \dot{z} \subset \check{\gamma}_q$ impliziert. Hieraus und aus $q \Vdash^*_{P_l} \check{\gamma}_q \leq \check{\delta}$ folgt offenbar $q \Vdash^*_{P_l} \dot{z} \subset \check{\delta}$. Da wir in M gearbeitet haben, haben wir *in* V $\left(q \Vdash^*_{P_l} \dot{z} \subset \check{\delta}\right)^M$ nachgewiesen, also nach dem Forcing-Theorem $q \Vdash_{P_l} \dot{z} \subset \check{\delta}$. qed(1.2)

Sei nun G ein P_l-generischer Filter über M mit $p_\delta \upharpoonright l \in G$. Dann gilt

(1.3) $\delta \in \dot{z}^G$.

Wegen (1.1) existiert andererseits ein $q \in G \cap D$. Da nach (1.2) $q \Vdash_{P_l} \dot{z} \subset \check{\delta}$ gilt, folgt $\left(\dot{z}^G \subset \delta\right)^{M[G]}$, also

(1.4) $\dot{z}^G \subset \delta$.

Aus (1.3) und (1.4) ergibt sich $\delta \in \delta$. Der Widerspruch zeigt, daß unsere Widerspruchsannahme falsch sein muß, d.h., (1) ist gezeigt. qed(1)

Fixiere nun G und z wie in (1). Sei $(Q, \leq, 1_Q) :\equiv (\dot{Q}_l^G, \dot{\leq}_l^G, \dot{1}_l^G)$. Dann gilt

(2) $(Q, \leq, 1_Q)$ ist eine Forcing-Halbordnung und es gilt $\big((Q, \leq, 1_Q) \text{ hat ccc}\big)^{M[G]}$. Außerdem ergibt sich: $\forall \xi \in z\; p_\xi(l)^G \in Q$.

Beweis. Aus $1_l \Vdash_{P_l} \big((\dot{Q}_l, \dot{\leq}_l, \dot{1}_l) \text{ ist Forcing-Halbordnung}\big)$ und $1_l \Vdash_{P_l} \big((\dot{Q}_l, \dot{\leq}_l, \dot{1}_l) \text{ hat ccc}\big)$ folgen

$$\big((Q, \leq, 1_Q) \text{ ist Forcing-Halbordnung}\big)^{M[G]} \quad \text{und} \quad \big((Q, \leq, 1_Q) \text{ hat ccc}\big)^{M[G]}.$$

Hieraus ergeben sich die beiden ersten Aussagen von (2). Sei nun $\xi \in z$. Nach Definition von z ist dann $p_\xi \upharpoonright l \in G$. Aus $p_\xi \in P_k$ folgt $p_\xi \upharpoonright l \Vdash_{P_l} p_\xi(l) \in \dot{Q}_l$. Beides zusammen impliziert $\left(p_\xi(l)^G \in Q\right)^{M[G]}$, woraus aus Absolutheitsgründen $p_\xi(l)^G \in Q$ folgt. qed(2)

Man sieht nun leicht, daß $\left(p_\xi(l)^G \;\middle|\; \xi \in z\right) \in M[G]$ gilt. Die ccc von P_l in M und die ccc von Q in $M[G]$ ausnutzend zeigen wir

(3) $\exists \xi, \xi' \in z \left(\xi \neq \xi' \wedge (p_\xi(l)^G \parallel p_{\xi'}(l)^G)^{M[G]}\right)$.

Beweis. Da P_l in M ccc hat, ist $\aleph_1^M = \aleph_1^{M[G]}$. Somit ist z unbeschränkt in $\aleph_1^{M[G]}$, d.h., es gilt

(3.1) $\left(z \text{ ist unbeschränkt in } \aleph_1\right)^{M[G]}$.

Arbeite nun in $M[G]$. Da $\aleph_1$ regulär ist, folgt aus (3.1) $\overline{\overline{z}} = \aleph_1$. Da Q ccc hat, kann somit $\left(p_\xi(l)^G \;\middle|\; \xi \in z\right)$ keine Antikette sein. Also existieren $\xi < \xi'$ mit $p_\xi(l)^G \parallel p_{\xi'}(l)^G$. Da wir in $M[G]$ gearbeitet haben, stimmt dies mit der Behauptung überein. qed(3)

Fixiere ξ, ξ' wie in (3). Aus (3) folgt die Existenz eines $\dot{r} \in M$ mit

$$\big(\dot{r}^G \in Q \wedge \dot{r}^G \leq_l p_\xi(l)^G \wedge \dot{r}^G \leq_l p_{\xi'}(l)^G\big)^{M[G]}.$$

Wegen $Q = \dot{Q}_l^G = \{\dot{s}^G \mid \exists p \in G\ (\dot{s}, p) \in \dot{Q}_l\}$ können wir $\dot{r} \in \operatorname{dom}(\dot{Q}_l)$ annehmen. Nach dem Forcing-Theorem existiert ein $p \in G$ mit $p \Vdash_{P_l} \big(\dot{r} \in \dot{Q}_l \wedge \dot{r} \dot{\leq}_l p_\xi(l) \wedge \dot{r} \dot{\leq}_l p_{\xi'}(l)\big)$. Nach Definition von z gilt $p_\xi \restriction l, p_{\xi'} \restriction l \in G$, so daß eine gemeinsame Verstärkung $q \in G$ von $p, p_\xi \restriction l, p_{\xi'} \restriction l$ existiert. Aus $q \leq_l p$ folgt insbesondere

(4) $\quad q \Vdash_{P_l} \dot{r} \in \dot{Q}_l \wedge \dot{r} \dot{\leq}_l p_\xi(l) \wedge \dot{r} \dot{\leq}_l p_{\xi'}(l)\big)$.

Sei $\tilde{q} :\equiv q^\frown \dot{r}$.

(5) $\quad \tilde{q} \in P_k$ und $\tilde{q} \leq_k p_\xi, p_{\xi'}$.

Beweis. Es ist $\tilde{q} \restriction l = q \in P_l$. Ferner gilt $\tilde{q} \restriction l \Vdash_{P_l} \tilde{q}(l) \in \dot{Q}_l$ wegen $q \Vdash_{P_l} \dot{r} \in \dot{Q}_l$. Da überdies $\tilde{q}(l) = \dot{r} \in \operatorname{dom}(\dot{Q}_l)$ gilt, haben wir $\tilde{q} \in P_k$. Wir zeigen nun $\tilde{q} \leq_k p_\xi$; $\tilde{q} \leq_k p_{\xi'}$ beweist man analog. Zunächst gilt $\tilde{q} \restriction l = q \leq_l p_\xi \restriction l$ nach Definition von q. Wegen (4) und $\tilde{q} \restriction l = q$ sowie $\tilde{q}(l) = \dot{r}$ gilt $\tilde{q} \restriction l \Vdash_{P_l} \tilde{q}(l) \dot{\leq}_l p_\xi(l)$. Nach Definition von $\leq_k$ gilt also $\tilde{q} \leq_k p_\xi$. qed(5)

Aus (5) folgt nun, daß $(p_\xi | \xi \in z)$ keine Antikette in P_k ist, so daß erst recht $(p_\xi | \xi < \aleph_1^M)$ keine Antikette in P_k sein kann. Dies war zu zeigen.

Lim(k). Sei für $l < k$ $\big(P_l$ hat ccc$\big)^M$ gezeigt. Sei $(p_\xi | \xi < \aleph_1^M) \in M$ eine Folge mit Werten in P_k. Es ist zu zeigen, daß diese keine Antikette in P_k ist. Mit Hilfe des Δ-System-Satzes 11.20 zeigen wir, daß es eine $\aleph_1^M$-lange Teilfolge gibt, so daß die Folge der supports ihrer Glieder in k beschränkt ist und eine gemeinsame Wurzel hat:

(6) $\quad \exists l < k\, \exists z \in M\, \exists d \in M\, \big(\overline{\overline{z}}^M = \aleph_1^M \wedge d \subset l \wedge \forall \xi, \xi' \in z\, (\xi \neq \xi' \longrightarrow \operatorname{supp}(p_\xi) \cap \operatorname{supp}(p_{\xi'}) = d)\big)$.

Beweis. Wir arbeiten in M. Wegen $\overline{\overline{\operatorname{supp}(p_\xi)}} < \aleph_0 < \aleph_1$ können wir den Δ-System-Satz auf das System $\big(\operatorname{supp}(p_\xi) \mid \xi < \aleph_1\big)$ anwenden und erhalten ein $z \subset \aleph_1$ mit $\overline{\overline{z}} = \aleph_1$ und ein $d \subset k$ mit $\operatorname{supp}(p_\xi) \cap \operatorname{supp}(p_{\xi'}) = d$ für alle $\xi, \xi' < \aleph_1$ mit $\xi \neq \xi'$. Dann ist d endlich, so daß wegen Lim(k) ein $l < k$ existiert mit $d \subset l$. Dies war zu zeigen. qed(6)

Wähle l, d und z wie in (6). Dann ist $(p_\xi \restriction l | \xi \in z) \in M$ eine Sequenz mit Werten in P_l. Da nach Induktionsvoraussetzung $\big(P_l$ hat ccc$\big)^M$ und nach (6) $\overline{\overline{z}}^M = \aleph_1^M$ gilt, ist $(p_\xi \restriction l | \xi \in z)$ keine Antikette. Also existieren $\xi, \xi' \in z$ mit $\xi < \xi'$ und $p_\xi \restriction l \parallel p_{\xi'} \restriction l$. Sei $q \in P_l$ mit $q \leq_l p_\xi \restriction l, p_{\xi'} \restriction l$. Definiere $\tilde{q} = \big(\tilde{q}(i) \mid i < k\big)$ durch $\tilde{q} \restriction l :\equiv q$ und

$$\tilde{q}(i) :\equiv \begin{cases} p_\xi(i), & \text{falls } i \in \operatorname{supp}(p_\xi); \\ p_{\xi'}(i), & \text{falls } i \notin \operatorname{supp}(p_\xi); \end{cases}$$

im Fall $l \leq i < k$. Dann gilt

(7) $\quad \tilde{q} \in P_k$ und $\tilde{q} \leq_k p_\xi, p_{\xi'}$.

Beweis. Wir wenden 33.7 an. Es ist zu zeigen:

$$\forall i < k\, \big(\tilde{q} \restriction i \Vdash_{P_i} \tilde{q}(i) \in \dot{Q}_i \wedge \tilde{q} \restriction i \Vdash_{P_i} \tilde{q}(i) \dot{\leq}_i p_\xi(i) \wedge \tilde{q} \restriction i \Vdash_{P_i} \tilde{q}(i) \dot{\leq}_i p_{\xi'}(i)\big).$$

Hierzu führen wir eine Induktion nach i durch. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1. $i + 1 \leq l$. Hier folgt die Behauptung sofort aus $q \in P_l$ sowie $q \leq_l p_\xi \restriction l$ und $q \leq_l p_{\xi'} \restriction l$.

Fall 2. $k \geq i + 1 > l$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\forall j < i\, \big(\tilde{q} \restriction j \Vdash_{P_j} \tilde{q}(j) \in \dot{Q}_j \wedge \tilde{q} \restriction j \Vdash_{P_j} \tilde{q}(j) \dot{\leq}_j p_\xi(j) \wedge \tilde{q} \restriction j \Vdash_{P_j} \tilde{q}(j) \dot{\leq}_j p_{\xi'}(j)\big),$$

was nach 33.7 auf

(7.1) $\tilde{q} \restriction i \in P_i \wedge \tilde{q} \restriction i \leq_i p_\xi \restriction i \wedge \tilde{q} \restriction i \leq_i p_{\xi'} \restriction i$

führt. Aus $p_\xi \restriction i+1 \in P_{i+1}$ bzw. $p_{\xi'} \restriction i+1 \in P_{i+1}$ erhält man nach 33.7: $p_\xi \restriction i \Vdash_{P_i} p_\xi(i) \in \dot{Q}_i$ und $p_{\xi'} \restriction i \Vdash_{P_i} p_{\xi'}(i) \in \dot{Q}_i$. Da $\tilde{q} \restriction i$ nach (7.1) stärker ist als jede der hier erzwingenden Bedingungen ergibt sich $\tilde{q} \restriction i \Vdash_{P_i} p_\xi(i) \in \dot{Q}_i$ und $\tilde{q} \restriction i \Vdash_{P_i} p_{\xi'}(i) \in \dot{Q}_i$. Wegen $\tilde{q}(i) \in \{p_\xi(i), p_{\xi'}(i)\}$ folgt hieraus

(7.2) $\tilde{q} \restriction i \Vdash_{P_i} \tilde{q}(i) \in \dot{Q}_i$.

Um den Rest zu zeigen, unterscheiden wir drei Fälle.

Fall 2.1. $i \in \operatorname{supp}(p_\xi)$. Dann gilt $i \notin \operatorname{supp}(p_{\xi'})$ wegen $\operatorname{supp}(p_\xi) \cap \operatorname{supp}(p_{\xi'}) = d \subset l \subset i$. Also ist $p_{\xi'}(i) = \dot{1}_i$. Da $\tilde{q} \restriction i \in P_i$ ist und $1_i \Vdash_{P_i} \big((\dot{Q}_i, \dot{\leq}_i, \dot{1}_i)$ ist Forcing-Halbordnung$\big)$ gilt, folgt insbesondere $\tilde{q} \restriction i \Vdash_{P_i} \big(\forall x \in \dot{Q}_i\, x \dot{\leq}_i \dot{1}_i\big)$. Mit (7.2) folgt dann $\tilde{q} \restriction i \Vdash_{P_i} \big(\tilde{q}(i) \dot{\leq}_i \dot{1}_i\big)$. Wegen $\dot{1}_i = p_{\xi'}(i)$ folgt hieraus $\tilde{q} \restriction i \Vdash_{P_i} \big(\tilde{q}(i) \dot{\leq}_i p_{\xi'}(i)\big)$. Aus $1_i \Vdash_{P_i} \big((\dot{Q}_i, \dot{\leq}_i, \dot{1}_i)$ ist Forcing-Halbordnung$\big)$ und $p_\xi \restriction i \in P_i$ folgt des weiteren $p_\xi \restriction i \Vdash_{P_i} \forall x \in \dot{Q}_i\, x \dot{\leq}_i x$. Wegen $p_\xi \restriction i+1 \in P_{i+1}$ gilt nach 33.7 $p_\xi \restriction i \Vdash_{P_i} p_\xi(i) \in \dot{Q}_i$. Somit gilt $p_\xi \restriction i \Vdash_{P_i} p_\xi(i) \dot{\leq}_i p_\xi(i)$. Wegen $\tilde{q}(i) = p_\xi(i)$ und $\tilde{q} \restriction i \leq_i p_\xi \restriction i$ folgt hieraus $\tilde{q} \restriction i \Vdash_{P_i} \tilde{q}(i) \dot{\leq}_i p_\xi(i)$ und der Fall 2.1. ist abgeschlossen.

Fall 2.2. $i \in \operatorname{supp}(p_{\xi'})$. Diesen Fall behandelt man dual zu Fall 2.1. Beachte, daß in diesem Fall $\tilde{q}(i) = p_{\xi'}(i)$ gilt.

Fall 2.3. $i \notin \operatorname{supp}(p_\xi) \cup \operatorname{supp}(p_{\xi'})$. Wende das in Fall 2.1. für $p_{\xi'}$ benutzte Argument auf p_ξ und $p_{\xi'}$ an.

Damit ist (7) bewiesen. qed(7)

Aus (7) folgt, daß $(p_\xi | \xi < \aleph_1^M)$ keine Antikette in P_k ist.

Damit ist der Satz bewiesen. QED

34.2 Corollar *Unter den Voraussetzungen des Satzes gilt* $\mathrm{Card}^{M_k} = \mathrm{Card}^M$ *für alle* $k \leq \kappa$. *Insbesondere ist* $\aleph_n^{M_k} = \aleph_n^M$ *für jede metasprachliche natürliche Zahl.*

Beweis. Sei $k \leq \kappa$. Im Beweis von 34.1 haben wir $\big((P_k, \leq_k, 1_k) \text{ hat ccc}\big)^M$ gezeigt. Die Behauptung folgt dann aus 30.10 in Verbindung mit 30.3 und 30.6. QED

Für eine Anwendung im nächsten Kapitel halten wir hier folgendes fest.

34.3 Lemma *Sei* $\kappa \in \mathrm{Card}^M$ *mit* $\mathrm{cf}(\kappa)^M > \aleph_1^M$. *Ferner gelte* $\big((P_\kappa, \leq_\kappa, 1_\kappa) \text{ hat ccc}\big)^M$. *Dann gilt* $\aleph_1^M = \aleph_1^{M_k}$ *für alle* $k \leq \kappa$ *und*

$$\mathrm{Pot}(\aleph_1^M) \cap M_\kappa = \bigcup_{k<\kappa} \mathrm{Pot}(\aleph_1^M) \cap M_k.$$

M.a.W.: $\mathrm{Pot}(\aleph_1)^{M_\kappa} = \bigcup_{k<\kappa} \mathrm{Pot}(\aleph_1)^{M_k}$.

Beweis. Da $\big(P_\kappa \text{ hat ccc}\big)^M$ gilt, bewahrt P_κ Kardinalitäten, d.h.,

(1) $\mathrm{Card}^M = \mathrm{Card}^{M[G_\kappa]} = \mathrm{Card}^{M_\kappa}$.

Wegen $M \subset M_k \subset M_\kappa$ gilt nach 22.38 $\mathrm{Card}^{M_\kappa} \subset \mathrm{Card}^{M_k} \subset \mathrm{Card}^M$, woraus wegen (1) $\mathrm{Card}^M = \mathrm{Card}^{M_k}$ folgt. Da dies nach 30.3 gleichwertig ist dazu, daß P_k Kardinalitäten bewahrt, folgt $\aleph_n^M = \aleph_n^{M_k}$ aus 30.6.

Sei nun $\mu :\equiv \aleph_1^M$. Wir zeigen:

(∗) $\mathrm{Pot}(\aleph_1^M) \cap M_\kappa = \bigcup_{k<\kappa} \mathrm{Pot}(\aleph_1^M) \cap M_k$.

„$\supset$“. Dies ist klar wegen $M_k \subset M_\kappa$.
„$\subset$“. Sei $x \in \mathrm{Pot}(\mu) \cap M[G_\kappa]$. Nach 30.17 hat x einen kanonischen Namen der Art

$$\tilde{x} = \left\{(\check{\alpha}, p) \;\middle|\; \alpha < \mu \wedge p \in A_\alpha \wedge p \Vdash_{P_\kappa} \check{\alpha} \in \dot{x}\right\},$$

wobei $\dot{x}$ ein beliebiger M-Name für x und $(A_\alpha | \alpha < \mu) \in M$ eine gewisse Sequenz von Antiketten in P_κ ist. Es gilt

(2) $\quad \exists\, k < \kappa\, \forall \alpha < \mu\, \forall p \in A_\alpha\, \mathrm{supp}(p) \subset k.$

Beweis. Wir arbeiten in M. Sei $B :\equiv \bigcup_{\alpha<\mu} A_\alpha$. Da P_κ ccc hat, gilt $\overline{\overline{A_\alpha}} \leq \aleph_0$, so daß $\overline{\overline{B}} \leq \mu \cdot \aleph_0 = \mu$ ist. Für $p \in B$ sei $k_p :\equiv \max \mathrm{supp}(p) + 1$. Da $\mathrm{supp}(p)$ endlich und Teilmenge von κ ist, ist $k_p < \kappa$. Da $\mathrm{cf}(\kappa) > \mu$ ist, ist $k :\equiv \bigcup_{p \in B} k_p < \kappa$. k ist offenbar wie benötigt. qed(2)

Wir setzen nun

$$\bar{x} :\equiv \left\{\left(\overset{k}{\check{\alpha}}, p \restriction k\right) \;\middle|\; \alpha < \mu \wedge p \in A_\alpha \wedge p \Vdash_{P_\kappa} \check{\alpha} \in \dot{x}\right\};$$

hierbei steht $\overset{k}{\check{\alpha}}$ für den kanonischen Namen von α bezüglich der Forcinghalbordnung P_k. Offenbar ist $\bar{x}$ ein M-Name. Wir zeigen

(3) $\quad \tilde{x}^{G_\kappa} = \bar{x}^{G_k}.$

Beweis. „$\subset$“. Sei $\alpha \in \tilde{x}^{G_\kappa}$. Dann existiert ein $p \in G_\kappa$ mit $(\check{\alpha}, p) \in \tilde{x}$. Hierbei sind $\alpha < \mu$, $p \in A_\alpha$ und $p \Vdash_{P_\kappa} \check{\alpha} \in \dot{x}$ so, daß $(\overset{k}{\check{\alpha}}, p \restriction k) \in \bar{x}$ ist. Da aus $p \in G_\kappa$ folgt $p \restriction k \in G_k$, ergibt sich $\alpha = \overset{k}{\check{\alpha}}{}^{G_k} \in \bar{x}^{G_k}$.

„$\supset$“. Sei $\alpha \in \bar{x}^{G_k}$. Dann existiert ein $q \in G_k$ mit $(\overset{k}{\check{\alpha}}, q) \in \bar{x}$. Nach Definition von $\bar{x}$ ist $q = p \restriction k$ für ein $p \in A_\alpha$ mit $p \Vdash_{P_\kappa} \check{\alpha} \in \dot{x}$. Insbesondere ist dann

(3.1) $\quad (\check{\alpha}, p) \in \tilde{x}.$

Wegen $\mathrm{supp}(p) \subset k$ gilt

(3.2) $\quad p = \iota_{k,\kappa}(q).$

Aus $q \in G_k$ folgt die Existenz eines $p' \in G_\kappa$ mit $q = p' \restriction k$. Wegen $p' \leq_\kappa \iota_{k,\kappa}(p' \restriction k)$, siehe 33.11, folgt aus (3.2) $p' \leq_\kappa p$. Aus $p' \in G_\kappa$ folgt also $p \in G_\kappa$. Nach (3.1) ist dann $\alpha = \check{\alpha}^{G_\kappa} \in \tilde{x}^{G_\kappa}$.
Dies war zu zeigen. qed(3)

Mit (3) folgt sofort $x = \tilde{x}^{G_\kappa} = \bar{x}^{G_k} \in M[G_k] = M_k$. QED

34.4 Corollar *Unter den Voraussetzungen des Lemmas gilt: ist $x \in M$ mit $\overline{\overline{x}}^M = \aleph_1^M$, so ist*

$$\mathrm{Pot}(x) \cap M_\kappa = \bigcup_{k<\kappa} \mathrm{Pot}(x) \cap M_k.$$

Beweis. „$\supset$“. Dies ist evident.
„$\subset$“. Sei $f \in M$ mit $f\colon x \xrightarrow{bij.} \aleph_1^M$. Sei $y \in \mathrm{Pot}(x) \cap M_\kappa$. Wegen $f \in M \subset M_\kappa$ ist dann $f[y] \in \mathrm{Pot}(\aleph_1^M) \cap M_\kappa$, so daß nach dem Lemma ein $k < \kappa$ existiert mit $f[y] \in M_k$. Wegen $f \in M$ ist $f^{-1} \in M \subset M_k$ und es folgt $y = f^{-1}\big[f[y]\big] \in M_k$. QED

34.5 Corollar *Unter den Voraussetzungen des Lemmas gilt: ist $\leq \in M_\kappa$, $\leq \subset \aleph_1^M \times \aleph_1^M$ mit*

$$\big((\aleph_1^M, \leq, 0) \text{ ist eine ccc-Forcing-Halbordnung}\big)^{M_\kappa},$$

so existiert ein $j < \kappa$ mit

$$\forall i \leq \kappa \left(i \geq j \longrightarrow \big((\aleph_1^M, \leq, 0) \text{ ist ccc-Forcing-Halbordnung}\big)^{M_i}\right).$$

Beweis. Sei $\mu :\equiv \aleph_1^M$. Wegen $\overline{\overline{\mu \times \mu}}^M = \mu$ folgt aus 34.4 (mit $x :\equiv \mu \times \mu$) die Existenz eines $j < \kappa$ mit $\leq \in M_j$. Dann ist $(\mu, \leq, 0) \in M_i$ für alle $i \geq j$. Fixiere $i \geq j$. Da die Eigenschaft „$(P, \leq, 1_P)$ ist eine Forcing-Halbordnung" absolut ist zwischen transitiven Modellen, die $(P, \leq, 1_P)$ als Element enthalten, gilt $\big((\mu, \leq, 0)$ ist Forcing-Halbordnung$\big)^{M_i}$. Es bleibt zu zeigen, daß jede Antikette $A \in M_i$ von $(\mu, \leq, 0)$ in M_i höchstens abzählbar ist.[232] Angenommen, dies ist nicht der Fall. Dann existiert ein $A \in M_i$, so daß A eine Antikette in $(\mu, \leq, 0)$ ist und $\overline{\overline{A}}^{M_i} = \aleph_1^{M_i}$ ist. Wegen $\aleph_1^{M_i} = \aleph_1^{M_\kappa}$ existiert dann ein $f \in M_i \subset M_\kappa$ mit $f\colon \aleph_1^{M_\kappa} \xrightarrow{bij.} A$. Da wegen der vorausgesetzten ccc von $(\mu, \leq, 0)$ in M_κ $\big(A$ ist höchstens abzählbar$\big)^{M_\kappa}$ gilt, existiert ein $g \in M_\kappa$ mit $g\colon A \xrightarrow{inj.} \aleph_0$. Dann gilt $g \circ f\colon \aleph_1^{M_\kappa} \xrightarrow{inj.} \aleph_0^{M_\kappa}$ und $g \circ f \in M_\kappa$. Eine solche Funktion kann aber nicht existieren. Also muß $(\mu, \leq, 0)$ doch ccc in M_i haben. QED

34.6 Bemerkung (a) Die Voraussetzungen von 34.3 sind insbesondere dann erfüllt, wenn die Voraussetzungen von 34.1 erfüllt sind.

(b) Die Aussage von 34.3 kann nicht zu $M_\kappa = \bigcup_{k<\kappa} M_k$ verallgemeinert werden: es ist z.B. $G_\kappa \in M_\kappa$ aber i.a. $G_\kappa \notin M_k$ für $k < \kappa$.

35 Ein Modell von $\mathbf{MA}(\aleph_1) + 2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

In 26.7 haben wir gesehen, daß Martins Axiom[233] **MA** von der Kontinuumshypothese impliziert wird: in Anwesenheit von **CH** wird **MA** zu $\mathbf{MA}(\aleph_0)$, und dies ist nach dem Existenzsatz für generische Filter 25.4 trivialerweise erfüllt. Wir wollen in diesem Kapitel zeigen, daß **MA** auch in nicht-trivialen Situationen gelten kann, also in Situationen, in denen die Kontinuumshypothese nicht gilt.

35.1 Vorüberlegungen.

Aus der Formulierung von **MA** und weil $\mathbf{ZFC} \vdash \mathbf{MA}(\aleph_0)$ gilt, folgt, daß

$$\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_2 \vdash \mathbf{MA} \longleftrightarrow \mathbf{MA}(\aleph_1)$$

gilt. Um relative Konsistenz von $\mathbf{MA} + \neg\, \mathbf{CH}$ zu zeigen, genügt es also, ein Modell von $\mathbf{MA}(\aleph_1) + 2^{\aleph_0} = \aleph_2$ anzugeben. Wir können die Situation noch weiter vereinfachen, indem wir statt $\mathbf{MA}(\aleph_1)$ eine unter **ZFC** zu $\mathbf{MA}(\aleph_1)$ äquivalente „Spezialform" von $\mathbf{MA}(\aleph_1)$ betrachten.

35.1 Lemma *Sei $\mu \in$ Card. Setze*

$$\begin{aligned}\mathbf{MA}'(\mu) :\equiv \forall P, \mathcal{D}\, \exists G\, \Big(\big(&P \text{ ist ccc-Forcing-Halbordnung mit Träger } \mu \text{ und größtem Element } 0 \\ &\wedge \mathcal{D} \text{ ist eine Menge dichter Teilmengen von } P \wedge \overline{\overline{\mathcal{D}}} \leq \mu\big) \\ &\longrightarrow G \text{ ist ein } P\text{-generischer Filter über } \mathcal{D}\Big)\end{aligned}$$

Dann sind $\mathbf{MA}(\mu)$ und $\mathbf{MA}'(\mu)$ (unter **ZFC***) äquivalent.*

Beweis. $\mathbf{MA}(\mu) \longrightarrow \mathbf{MA}'(\mu)$ ist klar.

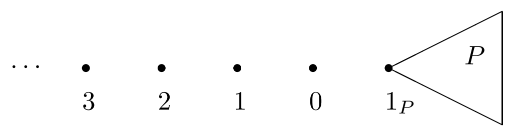
Gelte nun $\mathbf{MA}'(\mu)$ und sei $(P, \leq, 1_P)$ eine ccc-Forcing-Halbordnung und $\mathcal{D}$ eine Menge von dichten Teilmengen von P mit $\overline{\overline{\mathcal{D}}} \leq \mu$. Es ist zu zeigen, daß ein P-generischer Filter über $\mathcal{D}$ existiert.

(1) Es genügt, den Fall $\overline{\overline{P}} \geq \mu$ zu betrachten.

[232] Wir nutzen hierbei aus, daß die $\in$-Formel „x ist eine Antikette" absolut zwischen transitiven Modellen ist, vgl. 27.4.
[233] siehe 26.6.

Beweis. Angenommen, für jede ccc-Forcing-Halbordnung $(P', \leq', 1_{P'})$ mit $\overline{\overline{P'}} \geq \mu$ und jede Familie $\mathcal{D}'$ von in P' dichten Mengen mit $\overline{\overline{\mathcal{D}'}} \leq \mu$ sei die Existenz eines P'-generischen Filters über $\mathcal{D}'$ bewiesen. Es ist zu zeigen, daß $\mathbf{MA}'(\mu)$ gilt. Sei also $(P, \leq, 1_P)$ eine beliebige ccc-Forcing-Halbordnung und $\mathcal{D}$ eine Familie von in P dichten Mengen mit $\overline{\overline{\mathcal{D}}} \leq \mu$. Setze $P' :\equiv (\mu \times \{0\}) \cup (P \times \{1\})$, $1_{P'} :\equiv (0,0)$ und definiere $\leq'$ durch

$$
\begin{array}{lll}
(\alpha,0) \leq' (\beta,0) & \text{falls } \beta \in \alpha \text{ oder } \beta = \alpha \\
(p,1) \leq' (q,1) & \text{falls } p \leq q \\
(p,1) \leq' (\alpha,0) & \text{für alle } \alpha \in \mu \text{ und alle } p \in P.
\end{array}
$$



P' entsteht also aus P, indem man μ mit seiner umgekehrten kanonischen Ordnung am vorderen Ende (also „links von“ von 1_P) an P anfügt. Man sieht leicht, daß $(P', \leq', 1_{P'})$ eine Forcing-Halbordnung ist.

(1.1) P' hat ccc.

Beweis. Sei A' eine Antikette in P'. Wir können $\overline{\overline{A'}} \geq 2$ annehmen. Dann ist $A' \cap (\mu \times \{0\}) = \emptyset$. Wäre nämlich $(\alpha, 0) \in A'$, so wähle ein beliebiges $(x,i) \in A'$ mit $(x,i) \neq (\alpha,0)$. Aus der Definition von $\leq'$ folgt unmittelbar, daß $(\alpha,0) \leq' (x,i)$ oder $(x,i) \leq' (\alpha,0)$ gilt. A' ist also keine Antikette.
Setze $A :\equiv \{p \in P \mid (p,1) \in A'\}$. Dann gilt $\overline{\overline{A'}} = \overline{\overline{A}}$. Ferner ist A eine Antikette in P, denn die Existenz eines $r \in P$ mit $r \leq p, q$ für irgendzwei verschiedene $p, q \in A$ impliziert $(r,1) \leq' (p,1), (q,1)$ im Widerspruch dazu, daß A' eine Antikette ist. Aus der vorausgesetzten ccc von P folgt nun $\overline{\overline{A'}} = \overline{\overline{A}} < \aleph_1$. Dies war zu zeigen. qed(1.1)

Sei nun $\mathcal{D}$ eine Familie von in P dichten Teilmengen, $\overline{\overline{\mathcal{D}}} \leq \mu$. Sei $\mathcal{D}' :\equiv \{D \times \{1\} \mid D \in \mathcal{D}\}$. Ist dann $D' \in \mathcal{D}'$, so gilt $D' \subset P'$. Ferner gilt

(1.2) D' ist dicht in P'.

Beweis. Sei $D' = D \times \{1\}$. Sei $p' \in P'$. Es ist zu zeigen, daß es ein $q' \in D'$ gibt mit $q' \leq' p'$. Wir unterscheiden zwei Fälle.
Fall 1. $p' = (\alpha, 0)$. Da D dicht in P ist, existiert ein $q \in D$ mit $q \leq 1_P$. Dann gilt $(q,1) \in D'$ und es ist $(q,1) \leq' (\alpha, 0)$.
Fall 2. $p' = (p,1)$. Da D dicht in P ist, existiert ein $q \in D$ mit $q \leq p$. Dann ist $(q,1) \in D'$ und $(q,1) \leq' (p,1)$.
Dies war zu zeigen. qed(1.2)

Wegen $\overline{\overline{\mathcal{D}'}} = \overline{\overline{\mathcal{D}}} \leq \mu$ existiert nach Voraussetzung ein P'-generischer Filter G' über $\mathcal{D}'$. Setze

$$G :\equiv \{p \in P \mid (p,1) \in G'\}.$$

Dann gilt

(1.3) G ist ein P-generischer Filter über $\mathcal{D}$.

Beweis. Aus $p \leq q$ folgt $(p,1) \leq' (q,1)$, so daß G nach oben abgeschlossen ist, weil G' es ist. Sind ferner $p, q \in G$, so sind $(p,1), (q,1) \in G'$, so daß ein $r' \in G'$ existiert mit $r' \leq' (p,1), (q,1)$. Aus der Definition von $\leq'$ folgt, daß $r' = (r,1)$ mit $r \leq p, q$ ist. Dann ist außerdem $r \in G$, so daß p und q in G kompatibel sind. Ist schließlich $D \in \mathcal{D}$, so ist $D \times \{1\} \in \mathcal{D}'$, so daß ein $(p,1) \in G' \cap (D \times \{1\}$ existiert. Dann ist ist offenbar $p \in G \cap D$. Dies war zu zeigen. qed(1.3)

Nach (1.3) ist G wie benötigt. qed(1)

In Hinblick auf (1) nehmen wir nun $\overline{\overline{P}} \geq \mu$ an. Wir konstruieren zunächst ein $\bar{P} \subset P$ mit $\overline{\overline{\bar{P}}} = \mu$, das Kompatibilitäten und die Dichtheit der $D \in \mathcal{D}$ bewahrt. Hierzu zeigen wir:

(2) Zu $X \subset P$ existiert ein $X' \subset P$ mit

(i) $\forall p, q \in X\ \big(\exists r \in P\ (r \leq p \wedge r \leq q) \longrightarrow \exists r \in X'\ (r \leq p \wedge r \leq q)\big)$.

(ii) $\forall D \in \mathcal{D}\ \forall p \in X\ \exists q \in D \cap X'\ q \leq p$.

(iii) $1_P \in X'$, $X \subset X'$.

(iv) $\mu \leq \overline{\overline{X'}} \leq \overline{\overline{X}} + \mu$.

Beweis. Sei $Y \subset P$ beliebig mit $\overline{\overline{Y}} = \mu$. Für $p, q \in X$ mit $p \parallel q$ wähle eine gemeinsame Verstärkung $r(p,q) \in P$. Für $D \in \mathcal{D}$, $p \in X$ wähle $q(D,p) \in D$ mit $q(D,p) \leq p$; $q(D,p)$ existiert, da D dicht in P ist. Definiere nun $X' \subset P$ durch

$$\begin{aligned} X' :\equiv\ & \big\{r(p,q) \bigm| p \in X \wedge q \in X \wedge p \parallel q\big\} \cup \\ & \big\{q(D,p) \bigm| D \in \mathcal{D} \wedge p \in X\big\} \cup \\ & \{1_P\} \cup X \cup Y. \end{aligned}$$

Dann gelten offenbar (i)–(iii). Ferner berechnen wir

$$\mu = \overline{\overline{Y}} \leq \overline{\overline{X'}} \leq (\overline{\overline{X}} \cdot \overline{\overline{X}}) + (\overline{\overline{\mathcal{D}}} \cdot \overline{\overline{X}}) + 1 + \overline{\overline{X}} + \overline{\overline{Y}} \leq \overline{\overline{X}} + \overline{\overline{\mathcal{D}}} + \overline{\overline{Y}} \leq \overline{\overline{X}} + \mu + \mu,$$

so daß (iv) gilt. qed(2)

Setze nun $X_0 :\equiv \emptyset$, $X_{n+1} :\equiv (X_n)'$ und $\bar{P} :\equiv \bigcup_{n<\omega} X_n$ sowie $\bar{\leq} :\equiv\ \leq \cap (\bar{P} \times \bar{P})$. Man sieht leicht, daß $(\bar{P}, \bar{\leq}, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung ist. Um zu sehen, daß $\bar{P}$ ccc hat, genügt es wegen der ccc von P, folgendes zu zeigen:

(3) Ist $A \subset \bar{P}$ eine Antikette in $\bar{P}$, so ist A auch eine Antikette in P.

Beweis. Angenommen, dies gilt nicht. Dann existieren $p, q \in A$, die in P kompatibel sind. Wegen $A \subset \bar{P}$ existiert ein $n < \omega$ mit $p, q \in X_n$. Nach (2)(i) (mit $X :\equiv X_n$) existiert ein $r \in (X_n)' = X_{n+1}$ mit $r \leq p, q$. Dann ist $r \in \bar{P}$, d.h., p und q sind in $\bar{P}$ kompatibel, im Widerspruch dazu, daß A eine Antikette in $\bar{P}$ ist. Also gilt (3). qed(3)

$(\bar{P}, \bar{\leq}, 1_P)$ hat also ccc. Setzen wir $\bar{D} :\equiv D \cap \bar{P}$ für $D \in \mathcal{D}$, so folgt – analog zum Beweis von (3) – aus (2)(ii), daß $\bar{D}$ dicht in $\bar{P}$ ist. Da sich aus (2)(iv) leicht induktiv $\overline{\overline{X_n}} = \mu$ für $1 \leq n < \omega$ ergibt, gilt ferner $\overline{\overline{\bar{P}}} = \aleph_0 \cdot \mu = \mu$. Indem wir eine Bijektion $\bar{P} \xrightarrow{bij.} \mu$ mit $1_p \mapsto 0$ wählen, können wir $\mathbf{MA}'(\mu)$ also auf die Situation $(\bar{P}, \bar{\leq}, 1_P)$ und $\big\{\bar{D} \bigm| D \in \mathcal{D}\big\}$ anwenden, d.h., es existiert ein $\big\{\bar{D} \bigm| D \in \mathcal{D}\big\}$-generischer Filter über $\bar{P}$. Sei $\bar{G}$ dieser Filter. Man sieht leicht, daß

$$G :\equiv \big\{p \in P \bigm| \exists q \in \bar{G}\ q \leq p\big\}$$

ein Filter auf P ist. Da $\bar{G} \subset G$ und $\bar{D} \subset D$ ist, folgt $G \cap D \neq \emptyset$ für alle $D \in \mathcal{D}$ aus der $\big\{\bar{D} \bigm| D \in \mathcal{D}\big\}$-Generizität von $\bar{G}$. G ist also wie für $\mathbf{MA}(\mu)$ benötigt. QED

Wegen 35.1 genügt es, zum Nachweis der relativen Konsistenz von $\mathbf{ZFC} + \mathbf{MA}(\aleph_1) + 2^{\aleph_0} = \aleph_2$ ein Modell von $\mathbf{ZFC} + \mathbf{MA}'(\aleph_1) + 2^{\aleph_0} = \aleph_2$ zu konstruieren. Da $\mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_1 + 2^{\aleph_1} = \aleph_2)$ gilt, siehe 31.10, genügt es,

$$\mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_1 + 2^{\aleph_1} = \aleph_2) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + \mathbf{MA}'(\aleph_1) + 2^{\aleph_0} = \aleph_2)$$

zu zeigen. Hierzu fixieren wir ein Grundmodell M mit $\big(2^{\aleph_0} = \aleph_1\big)^M$ und $\big(2^{\aleph_1} = \aleph_2\big)^M$.

35.2 Lemma *Sei $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung für M und es gelte $\big((P, \leq, 1_P)$ hat ccc$\big)^M$ sowie $\overline{\overline{P}}^M \leq \aleph_2^M$. Dann gibt es in M höchstens $\aleph_2^M$-viele kanonische Namen (bzgl. P) für Teilmengen von $\mu \times \mu$.*

Beweis. Sei $x :\equiv \mu \times \mu$. In 30.19 haben wir die Anzahl der kanonischen Namen für Teilmengen von x bzgl. P nach oben abgeschätzt durch $\lambda_1 = \big(\overline{\overline{P}}^{\overline{\overline{x}}\cdot\aleph_0}\big)^M$. Wir arbeiten in M, um $\lambda_1 \leq \aleph_2^M$, also $\big(\lambda_1 \leq \aleph_2\big)^M$ zu zeigen.

$$\lambda_1 = \overline{\overline{P}}^{\overline{\overline{x}}\cdot\aleph_0} \leq \aleph_2^{\aleph_1\cdot\aleph_0} = \aleph_2^{\aleph_1} = \big(2^{\aleph_1}\big)^{\aleph_1} = 2^{\aleph_1} = \aleph_2.$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, daß in M $2^{\aleph_1} = \aleph_2$ gilt. QED

35.2 Konstruktion eines Modells von ZFC + $\mathbf{MA}'(\aleph_1) + 2^{\aleph_0} = \aleph_2$ mit finite support iteration: Übersicht

In Anbetracht des bisher gezeigten, gehen wir folgender Idee für den Aufbau eines Modells von $\mathbf{MA}'(\aleph_1) + 2^{\aleph_0} = \aleph_2$ nach:[234] Wir setzen $\kappa :\equiv \aleph_2^M$ und führen eine finite support iteration der Länge κ durch,[235] so daß

(a) $\big((P_\kappa, \leq_\kappa, 1_\kappa) \text{ hat ccc}\big)^M$

gilt. Dann folgt aus 30.10, 34.3 und 34.4:

(b) Kardinalitäten und Konfinalitäten werden bewahrt,

(c) $\mathrm{Pot}(\mu) \cap M_\kappa = \bigcup_{j<\kappa} \mathrm{Pot}(\mu) \cap M_j$ und $\mathrm{Pot}(\mu \times \mu) \cap M_\kappa = \bigcup_{j<\kappa} \mathrm{Pot}(\mu \times \mu) \cap M_j$.

Um $\mathbf{MA}'(\aleph_1)^{M_\kappa}$ zu verifizieren, haben wir alle $(P, \leq, 1_P) \in M_\kappa$ und alle $\mathcal{D} \in M_\kappa$ zu betrachten mit

$$\Big(P = \aleph_1 \wedge 1_P = 0 \wedge (P, \leq, 1_P) \text{ ist ccc-Forcing-Halbordnung} \wedge$$
$$\mathcal{D} \text{ ist Familie dichter Teilmengen von } P \wedge \overline{\overline{\mathcal{D}}} \leq \aleph_1\Big)^{M_\kappa}$$

Wir fixieren ein solches Tupel $(P, \leq, 1_P)$. Dann gilt $P = \mu$, da nach (b) $\aleph_1^{M_\kappa} = \aleph_1^M$ gilt. Nach 34.5 existiert ein $j_\leq < \kappa$ mit $\leq \in M_{j_\leq}$, so daß $\big((P, \leq, 1_P) \text{ ist ccc-Forcing-Halbordnung}\big)^{M_i}$ für jedes $i \geq j_\leq$ gilt. Da jedes $D \in \mathcal{D}$ eine Teilmenge von $P = \mu$ ist, existiert nach (c) zu jedem $D \in \mathcal{D}$ ein $j_D < \kappa$ mit $D \in M_{j_D}$. Sei

$$j :\equiv \sup\big(\{j_\leq\} \cup \{j_D \mid D \in \mathcal{D}\}\big).$$

Da in M $\mathrm{cf}(\kappa) = \aleph_2 > \aleph_1 \geq \overline{\overline{\mathcal{D}}}$ gilt, ist $j < \kappa$ und es gilt $(P, \leq, 1_P) \in M_j$, $\big((P, \leq, 1_P) \text{ hat ccc}\big)^{M_j}$ sowie $\mathcal{D} \subset M_j$. Wir haben in 33.15, 33.16 und 33.17 gesehen, daß es zu jedem $i < \kappa$ ein $(Q^i, \leq^i, 1^i)$ und ein H^i gibt, so daß $(Q^i, \leq^i, 1^i)$ eine Forcing-Halbordnung für M_i, H^i ein Q^i-generischer Filter über M_i und $M_{i+1} = M_i[H^i]$ ist. Können wir die Iteration nun so anlegen, daß es ein $i \geq j$ gibt mit

(d) $(P, \leq, 1_P) = (Q^i, \leq^i, 1^i)$,

so folgt wegen $\mathcal{D} \subset M_j \subset M_i$, daß H^i ein P-generischer Filter über $\mathcal{D}$ ist. Die Existenz eines solchen Objektes ist gerade zu zeigen.

Um (d) zu erreichen, müssen wir in der Konstruktion dafür sorgen, daß jedes $\leq \in M_j$ mit $\leq \subset \mu \times \mu$, das in M_j eine ccc-Forcing-Halbordnung auf μ mit größtem Element 0 definiert, an einer (späteren) Stelle i der Konstruktion berücksichtigt wird, es also ein $i \geq j$ gibt mit

(e) $\leq = \leq^i$ $(= \dot{\leq}_i^{G_i})$.

[234] Wir raten dem Leser, während der weiter unten durchgeführten detaillierten Konstruktion immer wieder auf die folgenden Ausführungen zurück zu kommen, um sich den Sinn der einzelnen Schritte der Konstruktion klar zu machen.

[235] Wir benutzen für die hierbei involvierten Parameter die in den beiden vorhergehenden Kapiteln benutzten Bezeichnungen.

Können wir unsere Iteration so einrichten, daß die Forcing-Halbordnungen $\big((P_k, \leq_k, 1_k) \mid k \leq \kappa\big)$ unserer Iteration jeweils $\overline{\overline{P_k}} \leq \aleph_2^M$ erfüllen, so gibt es nach 35.2 eine Aufzählung $\big(x^j_\xi \mid \xi < \kappa\big) \in M$ der kanonischen Namen für Teilmengen von $\mu \times \mu$ bzgl. P_j. Wir bestimmen dann (s.u.) zu jedem Paar (j, ξ) ein $i \geq j$, und legen unsere Iteration so an, daß

(f) $\quad \dot{\leq}_i^{G_i} = \big(x^j_\xi\big)^{G_j}$

zumindest in dem Fall gilt, wenn $\big(x^j_\xi\big)^{G_j}$ in M_j eine ccc-Forcing-Halbordnung mit größtem Element 0 ist. Die Verbindung zwischen (j, ξ) und i wird durch eine Surjektion $B\colon \kappa \xrightarrow{surj.} \kappa \times \kappa$ hergestellt, für die gilt: ist $B(i) = (j, \xi)$, so ist $i \geq j$. Eine solche Funktion wollen wir **Buchführungsfunktion** nennen. Wir wählen eine solche Buchführungsfunktion vor dem Start der Konstruktion. Da jedes $\leq \in M_j = M[G_j]$, $\leq \subset \mu \times \mu$ nach 30.17 von der Form $\leq = \big(x^j_\xi\big)^{G_j}$ ist, folgt dann (e) aus (f). Um nun (f) zu bekommen, müssen wir dafür sorgen, daß die unserer finite support iteration zugrunde liegende Namenfolge $\big((\dot{Q}_i, \dot{\leq}_i, \dot{1}_i) \mid i < \kappa\big) \in M$ passend gewählt ist. Wir erreichen dies auf folgende Weise: befinden wir uns an der Stelle i der Iteration, so wählen wir $(j, \xi) \in \kappa \times \kappa$ mit $B(i) = (j, \xi)$. Dann definieren wir einen Namen $x^{j,i}_\xi \in M$, so daß

$$\big(x^j_\xi\big)^{G_j} = \big(x^{j,i}_\xi\big)^{G_i}$$

gilt. (Wir bezeichnen diesen Vorgang als **Hochheben eines P_j-Namen zu einem P_i-Namen**.) Wir definieren dann $\dot{\leq}_i$ durch „Mischen“ von $x^{j,i}_\xi$ mit einem Namen für die umgekehrte kanonische Ordnung $\geq$ von μ, so daß für jeden P_i-generischen Filter G über M gilt

$$\dot{\leq}_i^G = \begin{cases} \big(x^{j,i}_\xi\big)^G, & \text{falls dies in } M[G] \text{ ccc-Forcing-Halbordnung auf } \mu \text{ mit größtem Element 0 ist;} \\ \geq, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Betrachten wir speziell $G = G_i$, so ergibt sich (e). Da $\dot{\leq}_i^G$ in jedem Fall in $M[G]$ eine ccc-Forcing-Halbordnung ist, folgt außerdem

(g) $\quad 1_i \Vdash_{P_i} \big(\overset{i}{\check{\mu}}, \dot{\leq}_i, 0\big)$ hat ccc;

hierbei ist $\overset{i}{\check{\mu}}$ der kanonische Name von μ beim Forcing mit P_i, also

$$\overset{i}{\check{\mu}} = \Big\{ \big(\overset{i}{\check{\alpha}}, 1_i\big) \,\Big|\, \alpha \in \mu \Big\}.$$

Nach 34.1 folgt aus der Gültigkeit von (g) für alle $i < \kappa$ die Gültigkeit von (a).

35.3 Konstruktion eines Modells von ZFC + MA$'(\aleph_1)$ + $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ mit finite support iteration: Ausführung

Wir führen die skizzierte finite support iteration en detail durch. Fixiere eine Buchführungsfunktion $B\colon \kappa \xrightarrow{surj.} \kappa \times \kappa$, $B \in M$. Wir definieren rekursiv Sequenzen $\big((\dot{Q}_i, \dot{\leq}_i, \dot{1}_i) \mid i < \kappa\big) \in M$, $\big((P_i, \leq_i, 1_i) \mid i \leq \kappa\big)$ und $\big((x^i_\xi | \xi < \kappa) \mid i < \kappa\big) \in M$, so daß für alle $i \leq \kappa$ folgendes gilt:

(1) $\big((P_j, \leq_j, 1_j) \mid j \leq i\big)$ ist die finite support iteration, die durch die Namenfolge $\big((\dot{Q}_j, \dot{\leq}_j, \dot{1}_j) \mid j < i\big)$ bestimmt ist. Es gilt $\big((P_i, \leq_i, 1_i) \text{ hat ccc}\big)^M$.

(2) Ist $i < \kappa$, so gilt $\dot{Q}_i = \overset{i}{\check{\mu}}$, $\dot{1}_i = \overset{i}{\check{0}}$ $(= 0)$.

(3) Ist $i < \kappa$, so gilt $1_i \Vdash_{P_i} (\overset{i}{\check{\mu}}, \dot{\leq}_i, 0)$ ist ccc-Forcing-Halbordnung.

(4) Ist $i < \kappa$, so gilt $\overline{\overline{P_i}}^M \leq \mu$.

(5) Ist $i < \kappa$, so ist $(x^i_\xi | \xi < \kappa)$ eine Aufzählung der kanonischen Namen für Teilmengen von $\mu \times \mu$ bzgl. P_i.

Zur Konstruktion:

Wir führen die Rekursion in M durch. Sei also $i \leq \kappa$ und für jedes $j < i$ seien die Parameter bereits gemäß (1)–(5) bestimmt. Durch (1) ist $(P_i, \leq_i, 1_i)$ gemäß 33.2 bestimmt. Aus der Gültigkeit von (2) und (3) für die Vorgängerstellen von i folgt nach 34.1

(6) $\big((P_i, \leq_i, 1_i) \text{ hat ccc}\big)^M$.

Da in (2) – (4) nur Aussagen über den Fall $i < \kappa$ gemacht werden, sei von nun an $i < \kappa$ vorausgesetzt. Wir zeigen, daß (4) erfüllt ist, daß also gilt

(7) $\overline{\overline{P_i}} \leq \aleph_1$.

Beweis. Ist $p \in P_i$, so ist $p \in \times_{j<i} \mathrm{dom}(\dot{Q}_j)$ und es existiert eine endliche Menge $x \subset i$, nämlich $x :\equiv \mathrm{supp}(p)$, mit $\forall\, j < i \,\big(j \notin x \longrightarrow p(j) = \dot{1}_j\big)$. Also gilt

$$(7.1)\quad P_i \subset \bigcup\Big\{\underbrace{\big\{p \in \underset{j<i}{\times} \mathrm{dom}(\dot{Q}_i) \;\big|\; \forall\, j < i \,\big(j \notin x \longrightarrow p(j) = \dot{1}_j\big)\big\}}_{\equiv:\, P_{i,x}} \;\Big|\; x \in [i]^{<\aleph_0}\Big\}.$$

Für $x \in [i]^{<\aleph_0}$ ist durch $p \mapsto p \restriction x$ eine Injektion von $P_{i,x}$ in $\times_{j\in x} \mathrm{dom}(\dot{Q}_j)$ gegeben, da sich zwei verschiedene Elemente von $P_{i,x}$ an einer Stelle $j \in x$ unterscheiden müssen. Es folgt $\overline{\overline{P_{i,x}}} \leq \overline{\overline{\times_{j\in x} \mathrm{dom}(\dot{Q}_j)}}$. Da wegen (2) für $j < i$ gilt $\mathrm{dom}(\dot{Q}_j) = \big\{\overset{j}{\check{\alpha}} \big|\; \alpha < \aleph_1\big\}$, folgt hieraus wegen $\overline{\overline{x}} < \aleph_0$

$$\overline{\overline{P_{i,x}}} \leq \overline{\overline{{}^{x}\aleph_1}} \leq \aleph_1^{\overline{\overline{x}}} = \aleph_1.$$

Damit erhalten wir aus (7.1)

$$\overline{\overline{P_i}} \leq \aleph_1 \cdot \underbrace{\overline{\overline{[i]^{<\aleph_0}}}}_{\leq \overline{\overline{i}} + \aleph_0} \leq \aleph_1 + \overline{\overline{i}} = \aleph_1;$$

beachte, daß $i < \kappa = \aleph_2$ gilt. qed(7)

Aus (6) und (7) folgt nach 35.2, daß es in M höchstens κ viele kanonische Namen für Teilmengen von $\mu \times \mu$ bzgl. P_i gibt. Sei $(x^i_\xi | \xi < \kappa)$ eine – evtl. nicht injektive – Aufzählung dieser Namen.

Um $\dot{\leq}_i$ zu definieren, wählen wir $j \leq i$ und $\xi \in \kappa$ mit $B(i) = (j, \xi)$. Wir benutzen x^j_ξ zur Definition von $\dot{\leq}_i$. Da x^j_ξ ein Name bzgl. P_j ist, heben wir x^j_ξ zu einem Namen $x^{j,i}_\xi$ bzgl. P_i hoch. Es sei

$$x^{j,i}_\xi :\equiv \Big\{\big(\overset{i}{\check{(\alpha,\beta)}}, q\big) \;\Big|\; (\alpha,\beta) \in \mu \times \mu \,\wedge\, q \in P_i \,\wedge\, \big(\overset{j}{\check{(\alpha,\beta)}}, q \restriction j\big) \in x^j_\xi\Big\}.$$

Wir mischen $x^{j,i}_\xi$ mit einer garantiert ccc-Forcing-Halbordnung auf μ mit größtem Element 0; eine solche ist gewiß die Umkehrung der kanonischen Wohlordnung von μ. Wir bezeichnen sie mit $\geq$. Um Schreibarbeit zu sparen, setzen wir zunächst

$$\mathrm{ccc}(v_0, v_1, v_2) :\equiv (v_0, v_1, v_2) \text{ ist ccc-Forcing-Halbordnung.}$$

Hiermit sei

$$\dot{\leq}_i :\equiv \bigg\{\Big(\overset{i}{\check{(\alpha,\beta)}}, q\Big) \;\bigg|\; q \in P_i \wedge \Big[q \Vdash^*_{P_i} \Big(\mathrm{ccc}\big(\overset{i}{\check{\mu}}, x^{j,i}_\xi, 0\big) \wedge\, \overset{i}{\check{(\alpha,\beta)}} \in x^{j,i}_\xi\Big) \vee q \Vdash^*_{P_i} \Big(\neg\, \mathrm{ccc}\big(\overset{i}{\check{\mu}}, x^{j,i}_\xi, 0\big) \wedge\, \overset{i}{\check{\alpha}} \geq \overset{i}{\check{\beta}}\Big)\Big]\bigg\}.$$

[M.H. der üblichen Absolutheitsargumente und dem Forcing-Theorem folgt, daß aus der Sicht von V

$$\dot{\leq}_i = \bigg\{\Big(\overset{i}{\check{(\alpha,\beta)}}, q\Big) \;\bigg|\; q \in P_i \,\wedge\, \Big[q \Vdash_{P_i} \Big(\mathrm{ccc}\big(\overset{i}{\check{\mu}}, x^{j,i}_\xi, 0\big) \wedge\, \overset{i}{\check{(\alpha,\beta)}} \in x^{j,i}_\xi\Big) \,\vee\, q \Vdash_{P_i} \Big(\neg\, \mathrm{ccc}\big(\overset{i}{\check{\mu}}, x^{j,i}_\xi, 0\big) \wedge\, \overset{i}{\check{\alpha}} \geq \overset{i}{\check{\beta}}\Big)\Big]\bigg\}$$

gilt.]

(8) Sei $p \in P_i$. Dann gilt

(a) $p \Vdash^*_{P_i} \operatorname{ccc}\big(\overset{i}{\check{\mu}}, x^{j,i}_\xi, 0\big) \longrightarrow p \Vdash^*_{P_i} \dot{\leq}_i = x^{j,i}_\xi$.

(b) $p \Vdash^*_{P_i} \neg \operatorname{ccc}\big(\overset{i}{\check{\mu}}, x^{j,i}_\xi, 0\big) \longrightarrow p \Vdash^*_{P_i} \dot{\leq}_i =\geq$.

Insbesondere gilt in jedem der beiden Fälle $p \Vdash^*_{P_i} \operatorname{ccc}(\overset{i}{\check{\mu}}, \dot{\leq}_i, 0)$

Beweis. Wir arbeiten in V. Sei $p \in P_i$.

zu (a). Es gelte $\big(p \Vdash^*_{P_i} \operatorname{ccc}\big(\overset{i}{\check{\mu}}, x^{j,i}_\xi, 0\big)\big)^M$, also

(8.1) $p \Vdash_{P_i} \operatorname{ccc}\big(\overset{i}{\check{\mu}}, x^{j,i}_\xi, 0\big)$.

Wir haben $\big(p \Vdash^*_{P_i} \big(\dot{\leq}_i = x^{j,i}_\xi \wedge \operatorname{ccc}(\overset{i}{\check{\mu}}, \dot{\leq}_i, 0)\big)\big)^M$, also $p \Vdash_{P_i} \dot{\leq}_i = x^{j,i}_\xi \wedge \operatorname{ccc}(\overset{i}{\check{\mu}}, \dot{\leq}_i, 0)$ nachzuweisen. Sei also G ein P_i-generischer Filter über M mit $p \in G$. Wir müssen

(8.2) $\dot{\leq}^G_i = \big(x^{j,i}_\xi\big)^G$

und

(8.3) $\operatorname{ccc}\big(\mu, \dot{\leq}^G_i, 0\big)^{M[G]}$

zeigen. Wir beweisen zunächst (8.2).

„$\supset$“. Nach Definition von $x^{j,i}_\xi$ ist jedes Element von $\big(x^{j,i}_\xi\big)^G$ von der Form (α, β) mit $\alpha, \beta \in \mu$. Sei also $(\alpha, \beta) \in \big(x^{j,i}_\xi\big)^G$. Nach dem Forcing-Theorem existiert dann ein $q \in G$ mit

(8.4) $q \Vdash_{P_i} \overset{i}{\check{(\alpha, \beta)}} \in x^{j,i}_\xi$.

Da wir von q zu einer gemeinsamen Verstärkung $r \in G$ von p, q übergehen können, können wir o.E. $q \leq_i p$ annehmen. Dann gilt $q \Vdash_{P_i} \operatorname{ccc}\big(\overset{i}{\check{\mu}}, x^{j,i}_\xi, 0\big)$ wegen (8.1). Mit (8.4) folgt $\big(\overset{i}{\check{(\alpha, \beta)}}, q\big) \in \dot{\leq}_i$ aus der Definition von $\dot{\leq}_i$. Wegen $q \in G$ gilt also $(\alpha, \beta) \in \dot{\leq}^G_i$.

„$\subset$“. Nach Definition von $\dot{\leq}_i$ ist jedes Element von $\dot{\leq}^G_i$ von der Form (α, β) mit $\alpha, \beta \in \mu$. Sei also $(\alpha, \beta) \in \dot{\leq}^G_i$. Dann existiert ein $q \in G$ mit $\big(\overset{i}{\check{(\alpha, \beta)}}, q\big) \in \dot{\leq}_i$. Nach Definition von $\dot{\leq}_i$ tritt dann einer der folgenden zwei Fälle ein:

Fall 1. Es gilt $q \Vdash_{P_i} \big(\operatorname{ccc}\big(\overset{i}{\check{\mu}}, x^{j,i}_\xi, 0\big) \wedge \overset{i}{\check{(\alpha, \beta)}} \in x^{j,i}_\xi\big)$.

Fall 2. Es gilt $q \Vdash_{P_i} \big(\neg \operatorname{ccc}\big(\overset{i}{\check{\mu}}, x^{j,i}_\xi, 0\big) \wedge \overset{i}{\check{\alpha}} \geq \overset{i}{\check{\beta}}\big)$.

Fall 2 kann nicht eintreten. In diesem Fall hätten wir nämlich $q \Vdash_{P_i} \neg \operatorname{ccc}\big(\overset{i}{\check{\mu}}, x^{j,i}_\xi, 0\big)$. Ist dann $r \in G$ eine gemeinsame Verstärkung von p, q, so gilt einerseits $r \Vdash_{P_i} \neg \operatorname{ccc}\big(\overset{i}{\check{\mu}}, x^{j,i}_\xi, 0\big)$, andererseits $r \Vdash_{P_i} \operatorname{ccc}\big(\overset{i}{\check{\mu}}, x^{j,i}_\xi, 0\big)$ wegen (8.1), was unmöglich ist. Also tritt Fall 1 ein. Dann gilt insbesondere $q \Vdash_{P_i} \overset{i}{\check{(\alpha, \beta)}} \in x^{j,i}_\xi$, was wegen $q \in G$ auf $(\alpha, \beta) \in \big(x^{j,i}_\xi\big)^G$ führt.

Damit ist (8.2) gezeigt. Da aus (8.1) wegen $p \in G$ $\operatorname{ccc}\big(\mu, \big(x^{j,i}_\xi\big)^G, 0\big)^{M[G]}$ folgt und (8.2) aus Absolutheitsgründen mit $\big(\dot{\leq}^G_i = \big(x^{j,i}_\xi\big)^G\big)^{M[G]}$ gleichwertig ist, ergibt sich $\big(\operatorname{ccc}\big(\mu, \big(x^{j,i}_\xi\big)^G, 0\big) \wedge \dot{\leq}^G_i = \big(x^{j,i}_\xi\big)^G\big)^{M[G]}$, was sofort (8.3) impliziert. Damit ist (a) bewiesen.

zu (b). In diesem Fall gilt

(8.5) $p \Vdash_{P_i} \neg \operatorname{ccc}\big(\overset{i}{\check{\mu}}, x^{j,i}_\xi, 0\big)$

und wir haben $p \Vdash_{P_i} \dot{\leq}_i =\geq \wedge \operatorname{ccc}(\overset{i}{\check{\mu}}, \dot{\leq}_i, 0)$ nachzuweisen. Wir bemerken zunächst:

(8.6) Sind $\alpha, \beta \in \mathrm{On} \cap M$ mit $\beta \in \alpha$, so gilt $p \Vdash_{P_i} \overset{i}{\check{\beta}} \in \overset{i}{\check{\alpha}}$.

Beweis. Es gilt $(\overset{i}{\check{\beta}}, 1_i) \in \overset{i}{\check{\alpha}}$, so daß $1_i \Vdash_{P_i} \overset{i}{\check{\beta}} \in \overset{i}{\check{\alpha}}$ aus 28.3 folgt. Hieraus ergibt sich wegen $p \leq_i 1_i$ die Behauptung. qed(8.6)

Sei nun G ein P_i-generischer Filter über M mit $p \in G$. Wir müssen

(8.7) $\dot{\leq}_i^G = \geq$

und (8.3) zeigen. Wir beweisen zunächst (8.7).

„$\supset$". Seien $\alpha, \beta \in \mu$ mit $\alpha \geq \beta$. Wegen (8.5) und (8.6) gilt dann $\big(\overset{i}{(\alpha, \beta)}\check{}, p\big) \in \dot{\leq}_i$. Wegen $p \in G$ gilt also $(\alpha, \beta) \in \dot{\leq}_i^G$.
„$\subset$". Nach Definition von $\dot{\leq}_i$ ist jedes Element von $\dot{\leq}_i^G$ von der Form (α, β) mit $\alpha, \beta \in \mu$. Sei also $(\alpha, \beta) \in \dot{\leq}_i^G$. Dann existiert ein $q \in G$ mit $\big(\overset{i}{(\alpha, \beta)}\check{}, q\big) \in \dot{\leq}_i$. Nach Definition von $\dot{\leq}_i$ tritt dann einer der beiden im Beweis von (a) formulierten Fälle „Fall 1." bzw. „Fall 2." ein. Dual zum Beweis von (a) ergibt sich, daß Fall 1 nicht eintreten kann. Also tritt Fall 2 ein. Dann gilt insbesondere $q \Vdash_{P_i} \overset{i}{\check{\alpha}} \geq \overset{i}{\check{\beta}}$, was wegen $q \in G$ auf $\alpha \geq \beta$ führt.
Damit ist (8.7) gezeigt. Da schließlich $\mathbf{ZFC} \vdash \mathrm{ccc}(\mu, \geq, 0)$ gilt, folgt $\mathrm{ccc}(\mu, \geq, 0)^{M[G]}$, so daß wir

$$\big(\mathrm{ccc}(\mu, \geq, 0) \ \wedge \ \dot{\leq}_i^G = \geq\big)^{M[G]}$$

haben, was sofort (8.3) impliziert. Damit ist auch (b) bewiesen. qed(8)

Da wir in M arbeiten, folgt nun (3) aus

(9) $\quad 1_i \Vdash^*_{P_i} \mathrm{ccc}\big(\check{\mu}, \dot{\leq}_i, 0\big)$.

Beweis. Da $q \Vdash^*_P \varphi$ gleichwertig ist dazu, daß $\big\{p \in P \bigm| q \Vdash^*_P \varphi\big\}$ dicht unter p ist, siehe 28.17, ist zu zeigen:

(9.1) $\quad \big\{p \in P_i \bigm| p \Vdash^*_{P_i} \mathrm{ccc}\big(\check{\mu}, \dot{\leq}_i, 0\big)\big\}$ ist dicht (unter 1_i).

Beweis. Sei $q \in P_i$. Da nach 28.20 für jede $\in$-Formel $\varphi(\vec{v})$ und für jedes Tupel $\vec{x}$ von Namen die Menge $\big\{p \in P_i \bigm| p \Vdash^*_{P_i} \varphi(\vec{x}^G) \vee p \Vdash^*_{P_i} \neg\varphi(\vec{x}^G)\big\}$ dicht in P_i ist,[236] existiert ein $p \in P_i$ mit $p \leq_i q$, so daß $p \Vdash^*_{P_i} \mathrm{ccc}\big(\overset{i}{\check{\mu}}, x_\xi^{j,i}, 0\big)$ oder $p \Vdash^*_{P_i} \neg\,\mathrm{ccc}\big(\overset{i}{\check{\mu}}, x_\xi^{j,i}, 0\big)$ gilt. Nach (8) gilt in jedem der beiden Fälle $p \Vdash^*_{P_i} \mathrm{ccc}(\overset{i}{\check{\mu}}, \dot{\leq}_i, 0)$. p ist dann wie benötigt. qed(9.1)

Damit ist (9) gezeigt. qed(9)

Hiermit ist die rekursive Definition abgeschlossen.

35.4 Wesentliche kombinatorische Eigenschaften des Zielmodells.

35.3 Satz $\big(\mathbf{MA}'(\aleph_1)\big)^{M_\kappa}$.

Beweis. Da P_κ nach (1) in M ccc hat, gilt $\aleph_1^{M_\kappa} = \mu$, so daß wir $\big(\mathbf{MA}'(\mu)\big)^{M_\kappa}$ zu zeigen haben. Es ist leicht zu sehen, daß dieses äquivalent ist zu

$$\forall \leq, \mathcal{D} \in M_\kappa \ \exists G \in M_\kappa$$
$$\Big(\big(\big((\mu, \leq, 0) \text{ ist eine ccc-Forcing-Halbordnung}\big)^{M_\kappa} \ \wedge \ \forall D \in \mathcal{D} \ D \text{ ist dicht in } (\mu, \leq, 0) \ \wedge \ \overline{\overline{\mathcal{D}}}^{M_\kappa} \leq \mu\big)$$
$$\longrightarrow G \text{ ist ein } (\mu, \leq, 0)\text{-generischer Filter über } \mathcal{D}\Big)$$

[236] Beachte, daß wir in M arbeiten und wir deshalb auf die in 28.20 vorkommenden Relativierungen verzichten können.

Seien also $\leq, \mathcal{D} \in M_\kappa$ mit obigen Eigenschaften vorgegeben. Nach 34.5 existiert ein $j_\leq < \kappa$ mit

(1) $\quad \forall\, j \geq j_\leq \ \big((\mu, \leq, 0) \text{ ist eine ccc-Forcing-Halbordnung}\big)^{M_j}$.

Da jedes $D \in \mathcal{D}$ eine Teilmenge von μ und (wegen $\mathcal{D} \in M_\kappa$ und der Transitivität von M_κ) ein Element von $\mathrm{Pot}(\mu) \cap M_\kappa$ ist, existiert nach 34.3 ein $j_D < \kappa$ mit $D \in \mathrm{Pot}(\mu) \cap M_{j_D}$. Sei

$$j :\equiv \sup\big(\{j_\leq\} \cup \{j_D \,|\, D \in \mathcal{D}\}\big).$$

Wegen $\overline{\overline{\mathcal{D}}} \leq \mu < \kappa = \mathrm{cf}(\kappa)^M$ ist $j < \kappa$. Sei x^j_ξ ein kanonischer Name von $\leq$ bzgl. P_j. Dann gilt also

(2) $\quad \leq = \big(x^j_\xi\big)^{G_j}$.

Wähle $i < \kappa$ mit $B(i) = (j, \xi)$. Es gilt:

(3) $\quad \big(x^j_\xi\big)^{G_j} = \big(x^{j,i}_\xi\big)^{G_i}$.

Beweis. „$\subset$“. Sei $(\alpha, \beta) \in \big(x^j_\xi\big)^{G_j}$. Dann existiert ein $q \in G_j$ mit $\big((\overset{j}{\check{\alpha}}, \beta), q\big) \in x^j_\xi$; beachte, daß jeder kanonische Name für eine Teilmenge von $\mu \times \mu$ nur aus Elementen der Art $\big((\overset{j}{\check{\alpha}}, \beta), q\big)$ mit $\alpha, \beta \in \mu$ und $q \in P_j$ besteht. Nach Definition von G_j existiert ein $p \in G_\kappa$ mit $q = p \upharpoonright j$. Dann ist $p \upharpoonright i \in G_i$ und aus der Definition von $x^{j,i}_\xi$ folgt $\big((\overset{j}{\check{\alpha}}, \beta), p \upharpoonright i\big) \in x^{j,i}_\xi$. Also ist $(\alpha, \beta) \in \big(x^{j,i}_\xi\big)^{G_i}$.
„$\supset$“. Dies beweist man analog. qed(3)

(4) $\quad \dot{\leq}_i^{G_i} = \leq$.

Beweis. Aus (2) und (3) folgt zunächst

(4.1) $\quad \leq = \big(x^{j,i}_\xi\big)^{G_i}$,

was zu $\big(\leq = \big(x^{j,i}_\xi\big)^{G_i}\big)^{M_i}$ äquivalent ist. Da aus (1) $\big((\mu, \leq, 0) \text{ ist eine ccc-Forcing-Halbordnung}\big)^{M_i}$ folgt, erhalten wir $\mathrm{ccc}\big(\mu, x^{j,i}_\xi, 0\big)^{M_i}$. Nach dem Forcing-Theorem existiert ein $p \in G_i$ mit $p \Vdash_{P_i} \mathrm{ccc}\big(\overset{i}{\check{\mu}}, x^{j,i}_\xi, 0\big)$. Nach (8) gilt dann $p \Vdash_{P_i} \dot{\leq}_i = x^{j,i}_\xi$. (Beachte, daß (8) eine Aussage *in* M ist.) Wegen $p \in G_i$ folgt hieraus $\dot{\leq}_i^{G_i} = \big(x^{j,i}_\xi\big)^{G_i}$, woraus in Verbindung mit (4.1) die Behauptung folgt. qed(4)

Insgesamt haben wir wegen $\dot{Q}_i = \overset{i}{\check{\mu}}$, $\dot{1}_i = 0$:

$$(Q^i, \leq^i, 1^i) = \big(\dot{Q}_i^{G_i}, \dot{\leq}_i^{G_i}, \dot{1}_i^{G_i}\big) = \big(\mu, \dot{\leq}_i^{G_i}, 0\big) \overset{(4)}{=} \big(\mu, \leq, 0\big),$$

so daß $(Q^i, \leq^i, 1^i)$ mit derjenigen Forcing-Halbordnung übereinstimmt, für die wir einen generischen Filter über $\mathcal{D}$ finden müssen. Nach 33.16 gibt es einen $(Q^i, \leq^i, 1^i)$-generischer Filter über M_i, den wir dort mit H^i bezeichnet haben. Wegen $\mathcal{D} \subset M_i$ schneidet H^i insbesondere jede Menge aus $\mathcal{D}$. H^i ist also wie benötigt. Damit ist der Satz bewiesen. QED

Da $\mathbf{MA}(\aleph_1)$ und $\mathbf{MA}'(\aleph_1)$ unter $\mathbf{ZFC}$ äquivalent sind und $\mathbf{ZFC}^{M_\kappa}$ gilt, erhalten wir sofort

35.4 Corollar $\big(\mathbf{MA}(\aleph_1)\big)^{M_\kappa}$.

Es bleibt noch zu zeigen:

35.5 Satz $\big(2^{\aleph_0} = \aleph_2\big)^{M_\kappa}$.

Beweis. Wegen $\mathbf{ZFC} \vdash \forall\, \lambda \geq 2^{\aleph_0}\ \neg\, \mathbf{MA}(\lambda)$ folgt $\big(2^{\aleph_0} \geq \aleph_2\big)^{M_\kappa}$ aus 35.4. Wir zeigen

(1) $\quad \overline{\overline{\mathrm{Pot}(\aleph_1)}}^{M_\kappa} \leq \kappa.$

BEWEIS. Da P_κ in M ccc hat, gilt $\aleph_1^{M_\kappa} = \mu$, woraus $\overline{\overline{\mathrm{Pot}(\aleph_1)}}^{M_\kappa} = \overline{\overline{\mathrm{Pot}(\mu)}}^{M_\kappa}$ folgt. Mit 30.20 folgt

$$\overline{\overline{\mathrm{Pot}(\mu)}}^{M_\kappa} \leq \big(\overline{\overline{P_\kappa}}^{\overline{\overline{\mu}}\cdot\aleph_0}\big)^M = \big(\overline{\overline{P_\kappa}}^{\mu}\big)^M.$$

Um dies weiter auszurechnen, arbeiten wir in M. Analog zu (7) (in der obigen Konstruktion des iterierten Forcings) zeigt man $\overline{\overline{P_\kappa}} \leq \kappa$. (Man muß in (7) nur i durch κ ersetzen und beachten, daß dann die dortige Identität $\aleph_1 + \overline{\overline{i}} = \aleph_1$ zu $\aleph_1 + \overline{\overline{\kappa}} = \kappa$ transformiert.) Also gilt

$$\overline{\overline{P_\kappa}}^{\mu} = \kappa^\mu = \aleph_2^{\aleph_1} = \big(2^{\aleph_1}\big)^{\aleph_1} = 2^{\aleph_1} = \kappa$$

aufgrund der für M vorausgesetzten Eigenschaft des Wertes von $2^{\aleph_1}$. Damit ist (1) gezeigt. qed(1)

Nach (1) gilt $\big(2^{\aleph_1} \leq \aleph_2\big)^{M_\kappa}$, was wegen $\big(2^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_1}\big)^{M_\kappa}$ auf $\big(2^{\aleph_0} \leq \aleph_2\big)^{M_\kappa}$ führt. Damit ist der Satz bewiesen. QED

35.5 Die relative Konsistenz von MA + ¬ CH.

Wir erhalten als Hauptresultat:

35.6 Satz (Solovay, Martin) $\mathrm{Kon}(\mathbf{ZF}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + \mathbf{MA} + 2^{\aleph_0} > \aleph_1)$.

BEWEIS. Wegen $\mathrm{Kon}(\mathbf{ZF}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_1 + 2^{\aleph_1} = \aleph_2)$ (siehe 31.10) und

$$\mathbf{ZFC} \vdash \big((\mathbf{MA}(\aleph_1) + 2^{\aleph_0} = \aleph_2)) \longleftrightarrow (\mathbf{MA} + 2^{\aleph_0} > \aleph_1)\big)$$

genügt es, $\mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_1 + 2^{\aleph_1} = \aleph_2) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + \mathbf{MA} + 2^{\aleph_0} > \aleph_1)$ zu zeigen. Gemäß 35.4 und 35.5 leistet dies die in diesem Kapitel dargestellte finite support iteration. QED

35.7 Corollar $\mathrm{Kon}(\mathbf{ZF}) \longrightarrow \mathrm{Kon}(\mathbf{ZFC} + \mathbf{MA} + \neg\,\mathbf{CH})$.

Literatur

[1] Barwise, J. (Ed.): *Handbook of Mathematical Logic.* North-Holland, 1977

[2] Bell, J.L., Slomson, A.B.: *Models and Ultraproducts.* North-Holland, 1969

[3] Cantor, G.: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts.* Springer-Verlag, 1932, Reprint 1980

[4] Chang, C.C., Keisler, H.J.: *Model Theory.* 3.Auflage, North-Holland, 1990

[5] Dauben, J.W.: *Abraham Robinson.* Princeton University Press, 1995

[6] Ebbinghaus, H.-D.: *Einführung in die Mengenlehre.* 2.Auflage, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1979

[7] Ebbinghaus, H.-D. u.a.: *Zahlen.* Springer-Verlag, 1983

[8] Ebbinghaus, H.-D., Flum, J., Thomas, W.: *Einführung in die mathematische Logik.* 2.Auflage, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1986

[9] Felgner, U.: *Bericht über die Cantorsche Kontinuums-Hypothese.* Originalbeitrag in [10], 1976

[10] Felgner, U. (Ed.): *Mengenlehre.* Unveränderte Teilauflage der ersten Auflage 1979, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1985

[11] Fischer, G., Sacher, R.: *Einführung in die Algebra.* 3.Auflage, B.G. Teubner Verlag, 1983

[12] Fraenkel, A.A.: *Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre.* in: Math. Ann. **86** 1922, nachgedruckt in [10]

[13] Friedrichsdorf, U., Prestel, A.: *Mengenlehre für den Mathematiker.* Vieweg, 1985

[14] Gottwald, S., Ilgauds, H.-J., Schlote, K.-H. (Ed.): *Lexikon bedeutender Mathematiker.* Verlag Harri Deutsch, 1990

[15] Harrington, L.A., Morley M.D., Sčědrov, A. (Ed.): *Harvey Friedman's Research on the Foundations of Mathematics.* North-Holland, 1985

[16] Hausdorff, F.: *Grundzüge der Mengenlehre.* Leipzig 1914

[17] Hermes, H.: *Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit.* 3.Auflage, Springer-Verlag, 1978

[18] Hopcroft, J.E., Ullman, J.D.: *Einführung in die Automatentheorie, Formale Sprachen und Komplexitätstheorie.* 3.Auflage, Addison-Wesley, 1994

[19] Jech, T.: *The Axiom of Choice.* North-Holland, 1973

[20] Jech, T.: *About the axiom of choice.* in: [1]

[21] Jech, T.: *Set Theory.* Academic Press, 1978

[22] Keisler, H.J.: *Foundations of Infinitesimal Calculus.* Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1976

[23] Kertész, A.: *Georg Cantor 1845–1918 Schöpfer der Mengenlehre.* Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1983

[24] Kolata, G.: *Does Gödel's Theorem matter to mathematics?* in: [15], pp. 399–404

[25] Kunen, K.: *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs.* North-Holland, 1980

[26] Mainzer, K.: *Reelle Zahlen.* in: [7]

[27] Meschkowski, H.: *Mathematiker-Lexikon.* 3.Auflage, Bibliographisches Institut, 1980

[28] Paris, J., Harrington, L.: *A mathematical incompleteness in Peano arithmetic.* in: [1], pp. 1133–1142

[29] Potthoff, K.: *Einführung in die Modelltheorie und ihre Anwendungen.* Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1981

[30] Prestel, A.: *Non-Standard Analysis.* in: [7]

[31] Prestel, A.: *Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie.* Vieweg-Verlag, 1986

[32] Purkert, W., Ilgauds, H.J.: *Georg Cantor 1845–1918.* Birkhäuser-Verlag, 1987

[33] Rubin, H., Rubin, J.E.: *Equivalents of the Axiom of Choice, II.* North-Holland, 1985

[34] Rowe, D.E., McClearly, J. (Ed.): *The History of Modern Mathematics, Vol. I: Ideas and Their Reception.* Academic Press, 1989

[35] Simpson, S.G. (Ed.): *Contemporary Mathematics, Vol. 65: Logic and Combinatorics. Proceedings of the AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conference held August 4–10,1985.* American Mathematical Society, Providence, 1987

[36] Simpson, S.G.: *Unprovable theorems and fast-growing functions.* in: [35], pp. 359–392.

[37] Shelah, S.: *The number of non-isomorphic models of an unstable first-order theory.* in: Israel Journal of Mathematics **9** (1971), pp. 473–487

[38] Skolem, A.T.: *Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre.* in: Wissenschaftliche Vorträge, gehalten auf dem fünften Kongreß der skandinavischen Mathematiker in Helsingfors 1922, Akademische Buchhandlung, Helsingfors 1923, nachgedruckt in [10]

[39] Wußing, H., Arnold, W. (Ed.): *Biographien bedeutender Mathematiker.* 2.Auflage, Aulis Verlag 1985

[40] Zermelo, E.: *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I.* in: Math. Ann. **65** (1908), nachgedruckt in [10]

logic
is the beginning
of wisedom
not the end.

(Spock)