FILTER, ULTRAFILTER UND EINFÜHRUNG VON $\mathbb{R}^*$

ZIEL: Beweis der Existenz eines Erweiterungskörpers $\mathbb{R}^* \supset \mathbb{R}$, der infinitesimale und unendliche Elemente enthält.

Filter und Ultrafilter für $\langle \mathcal{P}(I), \subseteq \rangle$
Sei $I \neq \emptyset$ und $\mathcal{P}(I) := \{A \mid A \subset I\}$. Eine Menge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ heißt *Filter* über I, falls gilt:

(1) $\mathcal{F} \neq \emptyset$ und $\emptyset \notin \mathcal{F}$;
(2) $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$;
(3) $A \in \mathcal{F}$, $A \subseteq B \subseteq I \implies B \in \mathcal{F}$.

Für einen Filter $\mathcal{F}$ über I sind äquivalent:

(1) Zu $\mathcal{F}$ gibt es keinen echten Oberfilter, d.h. ($\mathcal{G}$ Filter und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$) $\implies \mathcal{F} = \mathcal{G}$;
(2) $A \subseteq I \to (A \notin \mathcal{F} \leftrightarrow I - A \in \mathcal{F})$.

Erfüllt $\mathcal{F}$ eine der Aussagen (1) oder (2), dann heißt $\mathcal{F}$ *Ultrafilter* über I.
Beispiel: Sei I unendlich, $k \in I$ fest und $\mathcal{F} := \{A \subseteq I | k \in A\}$. Dann ist $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter.

Häufig benutzte Aussagen
Für jeden Filter $\mathcal{F}$ über I gilt:

(1) $I \in \mathcal{F}$
(2) $A, B \in \mathcal{F}$ und $A \cap B \subset C \implies C \in \mathcal{F}$

Der Filter $\mathcal{C}$ der koendlichen Mengen
Sei $\mathcal{C} := \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} - A$ ist endlich $\}$ die Menge der koendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$.
Dann ist $\mathcal{C}$ ein Filter über $\mathbb{N}$.

Lemma von ZORN
Sei $\langle X, \leq \rangle$ eine partielle Ordnung, dann gilt:
Jede linear geordnete Menge $K \subset X$ hat eine obere Schranke $\implies X$ besitzt ein maximales Element.

Existenz von Ultrafiltern
Satz: Zu jedem Filter $\mathcal{F}_0$ über I existiert ein diesen Filter umfassender Ultrafilter.

Definition von $\mathbb{R}^*$
Wähle einen Ultrafilter $\mathcal{F}$ mit $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$.
Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definiere die Sprechweise
$\alpha(i) = \beta(i)$ f.ü. $:\Leftrightarrow \{i \in \mathbb{N} \mid \alpha(i) = \beta(i)\} \in \mathcal{F}$.

Schreibe $\alpha \sim \beta$, falls $\alpha(i) = \beta(i)$ f.ü. Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Für $r \in \mathbb{R}$ sei $r_\mathbb{N} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ die konstante Folge $(r, r, r, ...)$.
Für $\alpha \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ setze

$$\overline{\alpha} := \begin{cases} r, & \text{falls } \exists r \in \mathbb{R}\, \alpha \sim r_\mathbb{N} \\ \{\beta \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid \beta \sim \alpha\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Schließlich definiere $\mathbb{R}^* := \{\overline{\alpha} \mid \alpha \in \mathbb{R}^\mathbb{N}\}$.

Es gilt:
(1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^\mathbb{N}\, \overline{\alpha} = \overline{\beta} \Leftrightarrow \alpha \sim \beta$;
(2) $\forall r \in \mathbb{R}\, \overline{r_\mathbb{N}} = r$;
(3) $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^*$.

Struktur auf $\mathbb{R}^*$
Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$. Setze

$$\overline{\alpha} +^* \overline{\beta} := \overline{\alpha + \beta}, \qquad \overline{\alpha} \cdot^* \overline{\beta} := \overline{\alpha \cdot \beta}$$

und schreibe

$$\overline{\alpha} \ \leq^* \overline{\beta} :\Leftrightarrow \{i \in \mathbb{N} \mid \alpha(i) \leq \beta(i)\} \in \mathcal{F}.$$

Dann sind $\overline{\alpha} +^* \overline{\beta}$, $\overline{\alpha} \cdot^* \overline{\beta}$ und die Gültigkeit von $\overline{\alpha} \ \leq^* \overline{\beta}$ unabhängig von den speziellen Representanten α und β. Außerdem sind $+^*, \cdot^*, \leq^*$ in $\mathbb{R}^*$ Fortsetzungen von $+, \cdot, \leq$ in $\mathbb{R}$.

Satz: $\langle \mathbb{R}^*, +, \cdot, \leq \rangle$ ist ein angeordneter Körper.

Endlich, unendlich, infinitesimal und $\approx$
Seien $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in \mathbb{R}^*$. Dann heißt
(1) $\overline{\alpha}$ *endlich* oder *finit*, falls $\exists n \in \mathbb{N}\, |\overline{\alpha}| \leq n$;
(2) $\overline{\alpha}$ *unendlich*, falls $\forall n \in \mathbb{N}\, |\overline{\alpha}| \geq n$;
(3) $\overline{\alpha}$ *infinitesimal*, falls $\forall n \in \mathbb{N}\, |\overline{\alpha}| \leq 1/n$;
(4) $\overline{\alpha}$ *unendlich nahe bei* $\overline{\beta}$ oder $\overline{\alpha}$ *infinitesimal benachbart zu* $\overline{\beta}$ (geschrieben: $\overline{\alpha} \approx \overline{\beta}$), falls $\overline{\alpha} - \overline{\beta}$ infinitesimal ist.

Eigenschaften von $\mathbb{R}^*$
(1) $\mathbb{R}^*$ enthält von 0 verschiedene infinitesimale Elemente.
Zum Beispiel gilt für $\alpha \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$: Wenn $\lim_{n\to\infty} \alpha(n) = 0$, dann ist $\overline{\alpha}$ infinitesimal.
(2) $\mathbb{R}^*$ enthält unendliche Elemente, d.h. $\mathbb{R}^*$ ist nicht archimedisch.
Zum Beispiel ist $\overline{\alpha}$ unendlich, falls $\lim_{n\to\infty} \alpha(n) = \infty$.
(3) $\mathbb{R}^*$ ist nicht (ordnungs)vollständig.
(4) $\approx$ ist eine Äquivalenzrelation über $\mathbb{R}^*$.
(5) Endliche Elemente liegen unendlich nahe bei einer rellen Zahl.
Genauer: $\forall \overline{\alpha} \in \mathbb{R}^* \exists! r \in \mathbb{R} \overline{\alpha} \approx r$.