Elementare Modelltheorie und Nichtstandardmodelle

— Alexander Sonnikow —

Die Modelltheorie ist eine Untersuchung von Axiomensystemen, deren Modellen sowie der Beziehung zwischen den beiden.

Definition 1: Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ L-Strukturen.
(a) $\text{Th}(\mathfrak{A}) :\equiv \{\varphi \in \text{Fml}_0(L) | \mathfrak{A} \models \varphi\}$ heißt die **Theorie** von $\mathfrak{A}$.
(b) $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind **elementar äquivalent** $:\equiv \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} :\equiv \text{Th}(\mathfrak{A}) \equiv \text{Th}(\mathfrak{B})$.
(c) Eine Funktion h heißt **elementare Abbildung** (d.h. $h : \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$), falls gilt:
   (i) $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$;
   (ii) $\forall n < \omega \forall \varphi \in \text{Fml}_n(L) \forall \vec{a} \in |\mathfrak{A}|^n (\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[h(\vec{a})])$.
(d) $\mathfrak{A}$ heißt **elementare Substruktur** von $\mathfrak{B}$ (d.h. $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$), falls gilt:
   (i) $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$;
   (ii) $id : \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

Bemerkung 1: Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ L-Strukturen.
(a) Für $\varphi \in \text{Fml}_0(L)$ gilt: $\text{Th}(\mathfrak{A}) \models \varphi \longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi$.
(b) $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \longleftrightarrow \forall \varphi \in \text{Fml}_0(L)\ \ (\mathfrak{A} \models \varphi \leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi)$.
(c) $h : \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.
(d) $h : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \longrightarrow h : \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. Insbesondere sind also isomorphe Strukturen elementar äquivalent.
(e) Substruktur $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{B}$ ist elementar gdw. $\forall \varphi(v_0, \dots, v_{n-1}) \in \text{Fml}(L)$ und $\forall a_0, \dots, a_{n-1} \in |\mathfrak{A}|$ gilt:
   $\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \dots, a_{n-1}] \longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[a_0, \dots, a_{n-1}]$.

Definition 2: $\mathbb{R}$ steht sowohl für die Menge wie auch für die Struktur des angeordneten Körpers der reellen Zahlen über der Sprache L.

ZIEL: Darstellung der (ersten) Ableitung einer Funktion mit Nichtstandardmethoden.

Seien Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig vorgegeben. Wir erweitern L zu $L' = L \cup \{\dot{f}, \dot{g}\} \cup \{\dot{r} | r \in \mathbb{R}\}$. Durch die Interpretation von $\dot{f}$ durch f, $\dot{g}$ durch g und $\dot{r}$ durch r haben wir eine kanonische Expansion von $\mathbb{R}$ zu einer L'-Struktur $\mathbb{R}'$.

Für infinitesimale Größen wählen wir ein neues Konstantensymbol $\dot{\theta}$ und betrachten:

$$\Phi = \text{Th}(\mathbb{R}') \cup \{\dot{(}\dot{0}\dot{<}\dot{\theta}\dot{\wedge}\dot{\theta}\dot{<}\dot{r}\dot{)} | r \in \mathbb{R} \wedge 0 < r\}.$$

Bemerkung 2: Jede endliche Teilmenge Φ' von Φ ist in einer Expansion von $\mathbb{R}'$ erfüllbar.
Nach dem Endlichkeitssatz ist dann insbesondere auch Φ erfüllbar. Sei $(\mathbb{R}^*, \theta^*) \models \Phi$, wobei

$$\mathbb{R}^* = (|\mathbb{R}^*|, <^*, +^*, \cdot^*, f^*, g^*, (r^* | r \in \mathbb{R})).$$

Lemma 1: $\mathbb{R}^*$ ist eine echte Erweiterung von $\mathbb{R}'$ zu einem angeordneten Körper.

Definition 3: Seien $u, v \in \mathbb{R}^*$.
(a) u ist **endlich** $:\equiv \exists r \in \mathbb{R} \quad |u| < r$.
(b) Ist u endlich, so bezeichnet $\mathrm{st}(u) :\equiv \sup_{\mathbb{R}}\{r \in \mathbb{R} | r < u\}$ den **Standardteil** von u.
(c) u ist **unendlich klein** (auch: **infinitesimal**) $:\equiv \mathrm{st}(u) = 0$.
(d) u, v sind **unendlich nahe** $:\equiv u \sim v :\equiv u - v$ ist unendlich klein.

Lemma 2: Seien $u, v \in \mathbb{R}^*$.
(a) u ist unendlich klein $\longleftrightarrow \forall r \in \mathbb{R} \quad (0 < r \to |u| < r)$.
(b) Sind u und v endlich, so auch $u + v$, $-u$ und $u \cdot v$.
(c) Sind u und v unendlich klein, so auch $u + v$, $-u$ und $u \cdot v$.
(d) Ist u endlich und v unendlich klein, so ist $u \cdot v$ unendlich klein.
(e) Ist $r \in \mathbb{R}$, so ist $\mathrm{st}(r) = r$; insbesondere ist r endlich.

Satz 1: Jedes endliche u ist eindeutig darstellbar in der Form $u = r + h$, so daß $r \in \mathbb{R}$ und $h \in \mathbb{R}^*$ unendlich klein ist. Es ist dann $r = \mathrm{st}(u)$.

Korollar: Seien $u, v \in \mathbb{R}^*$ endlich. Dann gilt:
(a) $\mathrm{st}(u + v) = \mathrm{st}(u) + \mathrm{st}(v)$.
(b) $\mathrm{st}(u \cdot v) = \mathrm{st}(u) \cdot \mathrm{st}(v)$.
(c) $\mathrm{st}(-u) = -\mathrm{st}(u)$.
(d) Wenn $u \leq v$ so $\mathrm{st}(u) \leq \mathrm{st}(v)$.
(e) $|\mathrm{st}(u)| = \mathrm{st}(|u|)$.

Satz 2: $g = f' \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \ \ \forall h \in \mathbb{R}^* \quad \Big((h \sim 0 \wedge h \neq 0) \longrightarrow g^*(x) \sim \frac{f^*(x+h) - f^*(x)}{h}\Big)$.

Formalisierung einiger Eigenschaften der Sprache L_{aoK} der angeordneter Körper:

„$\dot{v}_1 = -\dot{v}_0$" entspricht $\alpha(\dot{v}_0, \dot{v}_1) :\equiv \dot{v}_0 \dot{+} \dot{v}_1 \dot{=} \dot{0}$.
„$\dot{v}_1 = \dot{v}_0^{-1}$" entspricht $\mu(\dot{v}_0, \dot{v}_1) :\equiv \dot{v}_0 \dot{\bullet} \dot{v}_1 \dot{=} \dot{1}$.
„$|\dot{v}_0| < \dot{v}_1$" entspricht $\beta(\dot{v}_0, \dot{v}_1) :\equiv \dot{(}\dot{(}\dot{(}\dot{0} \dot{<} \dot{v}_0 \dot{\vee} \dot{0} \dot{=} \dot{v}_0\dot{)} \dot{\longrightarrow} \dot{v}_0 \dot{<} \dot{v}_1\dot{)} \dot{\wedge} \dot{(}\dot{v}_0 \dot{<} \dot{0} \dot{\longrightarrow} \dot{\forall} \dot{v}_2 \dot{(}\dot{v}_0 \dot{+} \dot{v}_2 \dot{=} \dot{0} \dot{\rightarrow} \dot{v}_2 \dot{<} \dot{v}_1\dot{)}\dot{)}\dot{)}$.

Betrachte nun: $\Delta(\dot{v}_0, \dot{v}_1, \dot{v}_2, \dot{v}_3, \dot{v}_4) :\equiv \forall \dot{v}_5 \forall \dot{v}_6 \forall \dot{v}_7 \dot{(}\dot{(}\alpha \frac{\dot{v}_1}{\dot{v}_0} \frac{\dot{v}_5}{\dot{v}_1} \dot{\wedge} \dot{(}\mu \frac{\dot{v}_2}{\dot{v}_0} \frac{\dot{v}_6}{\dot{v}_1} \dot{\wedge} \alpha \frac{\dot{v}_3}{\dot{v}_0} \frac{\dot{v}_7}{\dot{v}_1}\dot{)}\dot{)} \dot{\longrightarrow} \beta \frac{(\dot{v}_0 \dot{+} \dot{v}_5) \dot{\bullet} \dot{v}_6 \dot{+} \dot{v}_7}{\dot{v}_0} \frac{\dot{v}_4}{\dot{v}_1}\dot{)}$.

In jedem angeordneten Körper $\mathfrak{K}$ gilt: $\mathfrak{K} \models \Delta[a_0, a_1, a_2, a_3, a_4] \quad \Longleftrightarrow \quad \left|\frac{a_0 - a_1}{a_2} - a_3\right| < a_4$.

Beispiel: Für $0 < n < \omega$ ist $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, denn für $h \in \mathbb{R}^* \backslash \{0\}$ mit $h \sim 0$ gilt

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n}{h} = n \cdot x^{n-1} + \underbrace{h \cdot \sum_{k=2}^{n} x^{n-k} h^{k-2}}_{\sim 0}.$$