

SEMINAR ZUR LOGIK: NICHTSTANDARDANALYSIS

Ultraprodukte und Ultrapotenzen

— Christian Panten —

Vorbemerkung:

Wir fixieren eine Sprache $L=(I,J,K,t)$ und eine nicht-leere Menge S .

Definition 1 (*Äquivalenz-Relation*)

Sei S eine Menge. Und für alle $s \in S$ gebe es eine L -Struktur $\mathfrak{A}_s$ mit Grundmenge A_s . Weiter sei U ein Ultrafilter. Die Äquivalenz-Relation $\sim$ auf $B := \times_{s \in S} A_s$ sei durch

$$f \sim g := \{s \in S \mid f(s) = g(s)\} \in U$$

definiert.

Diese Äquivalenz-Relation ist wohldefiniert.

Beweis:

- . $f \sim f$, da $S \in U$
- . $f \sim g \Rightarrow g \sim f$, da $\{s \in S \mid f(s) = g(s)\} = \{s \in S \mid g(s) = f(s)\}$
- . $f \sim g, g \sim h \Rightarrow f \sim h$, da

$$\{s \in S \mid f(s) = g(s)\} \cap \{s \in S \mid g(s) = h(s)\} =$$

$$\underbrace{\{s \in S \mid f(s) = g(s) = h(s)\}}_{\in U, \text{ wegen der Schnitteigenschaft von Filter}} \subset \underbrace{\{s \in S \mid f(s) = h(s)\}}_{\in U, \text{ wegen der Abschlusseigenschaft von Filter}}$$

q.e.d.

Zur Erinnerung (*Filter und Ultrafilter*)

Sei I eine Menge. Dann heißt $\mathcal{F}$ **Filter** auf I , wenn gilt:

- (1) $\mathcal{F} \neq \emptyset$ und $\emptyset \notin \mathcal{F}$
- (2) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$
- (3) $A \in \mathcal{F}, A \subseteq B \subseteq I \Rightarrow B \in \mathcal{F}$

$\mathcal{F}$ heißt **Ultrafilter**, wenn zusätzlich folgendes gilt:

- (4) $A \subseteq I \Rightarrow (A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow I \setminus A \notin \mathcal{F})$

Definition 2 (*L-Struktur $\mathfrak{A}$*)

Nun definieren wir eine *L-Struktur* $\mathfrak{A}$ auf $A := B / \sim := \{[h] \mid h \in B\}$.

Relationen: $R_i([h_0] \dots [h_{t(i)-1}]) := \{s \in S \mid R_i^{\mathfrak{A}_s}(h_0(s) \dots h_{t(i)-1}(s))\} \in U$

Funktionen: $f_j([h_0] \dots [h_{t(j)-1}]) := [(f_j^{\mathfrak{A}_s}(h_0(s) \dots h_{t(j)-1}(s)) \mid s \in S)]$

Konstanten: $c_k := [(c_k^{\mathfrak{A}_s} \mid s \in S)]$

Die so definierte *L-Struktur* ist wohldefiniert.

Beweis:

$$R_i([h_0] \dots [h_{n-1}]) := \{s \in S \mid R_i^{\mathfrak{A}_s}(h_0(s) \dots h_{n-1}(s))\} \in U$$

Sei $(h_0, \dots, h_{n-1}), (h'_0, \dots, h'_{n-1}) \in A^n$ mit $\forall j \in \{0, \dots, n-1\} \ h_j \sim h'_j$

Nun ist zu zeigen:

$$\begin{aligned} \{s \in S \mid R_i^{\mathfrak{A}_s}(h_0(s) \dots h_{n-1}(s))\} \in U &\Leftrightarrow \\ \{s \in S \mid R_i^{\mathfrak{A}_s}(h'_0(s) \dots h'_{n-1}(s))\} &\in U \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie genügt es „ $\Rightarrow$ “ zu zeigen:

Sei $\{s \in S \mid R_i^{\mathfrak{A}_s}(h_0(s) \dots h_{n-1}(s))\} \in U$.

$$\begin{aligned} &\forall j \in \{0, \dots, n-1\} \ \{s \in S \mid h_j(s) = h'_j(s)\} \in U \\ &\Rightarrow \bigcap_{j \leq n-1} \{s \in S \mid h_j(s) = h'_j(s)\} \in U \text{ wegen Filtereigenschaft (2)} \\ &\Rightarrow \underbrace{\{s \in S \mid R_i^{\mathfrak{A}_s}(h_0(s) \dots h_{n-1}(s))\}}_{\in U} \cap \underbrace{\bigcap_{j \leq n-1} \{s \in S \mid h_j(s) = h'_j(s)\}}_{\in U} \\ &\subset \{s \in S \mid R_i^{\mathfrak{A}_s}(h'_0(s) \dots h'_{n-1}(s))\} \in U \text{ wegen Filtereigenschaft (3)} \end{aligned}$$

□

$$f_j([h_0] \dots [h_{n-1}]) := [(f_j^{\mathfrak{A}_s}(h_0(s) \dots h_{n-1}(s)) \mid s \in S)]$$

Sei $(h_0, \dots, h_{n-1}), (h'_0, \dots, h'_{n-1}) \in A^n$ mit $\forall l \in \{0, \dots, n-1\} \ h_l \sim h'_l$

Nun ist zu zeigen:

$$(f_j^{\mathfrak{A}_s}(h_0(s) \dots h_{n-1}(s)) \mid s \in S) \sim (f_j^{\mathfrak{A}_s}(h'_0(s) \dots h'_{n-1}(s)) \mid s \in S)$$

$$\underbrace{\bigcap_{l \leq n} \underbrace{\{s \in S \mid h_l(s) = h'_l(s)\}}_{\in U}}_{\in U} \subset \{s \in S \mid f_j^{\mathfrak{A}_s}(h_0(s) \dots h_{n-1}(s)) = f_j^{\mathfrak{A}_s}(h'_0(s) \dots h'_{n-1}(s))\} \in U$$

wegen Filtereigenschaft(3).

$$\Leftrightarrow f_j([h_0] \dots [h_{n-1}]) \sim f_j([h'_0] \dots [h'_{n-1}])$$

□

q.e.d.

Definition 3 (Ultraprodukt und Ultrapotenz)

Die oben definierte L -Struktur heißt das **Ultraprodukt der** $(\mathfrak{A}_s \mid s \in S)$ **ber** U . Wir bezeichnen das Ultraprodukt mit $\prod_{s \in S} \mathfrak{A}_s / U$. Sind alle $\mathfrak{A}_s$ gleich einer L -Struktur $\mathfrak{B}$, so schreiben wir $\mathfrak{B}^S / U$. Diese L -Struktur heißt dann die **Ultrapotenz von** $\mathfrak{B}$ **ber** U .

Satz 4 (Satz von Ło)

Sei $\mathfrak{A} := \prod_{s \in S} \mathfrak{A}_s / U$.

- (a) Sei $r(x_0, \dots, x_n) \in \text{Tm}(L)$ und seien $[h_0], \dots, [h_n] \in A$. Dann gilt $r^{\mathfrak{A}}([h_0], \dots, [h_n]) = \left[\left(r^{\mathfrak{A}_s}[h_0(s), \dots, h_n(s)] \mid s \in S \right) \right]$.
- (b) Sei $\varphi(x_0, \dots, x_n) \in \text{Fml}(L)$ und seien $[h_0], \dots, [h_n] \in A$. Dann gilt $\mathfrak{A} \models \varphi([h_0], \dots, [h_n]) \iff \left\{ s \in S \mid \mathfrak{A}_s \models \varphi(h_0(s), \dots, h_n(s)) \right\} \in U$.

Zur Erinnerung (Tm(L) und Belegung von Termen)

Sei L eine Sprache. Dann hat die Menge $\text{Tm}(L)$ der **Terme** von L folgende Eigenschaften:

- . $\forall n < \omega \ v_n \in \text{Tm}(L)$
- . $\forall k \in K \ c_k \in \text{Tm}(L)$
- . $\forall x_0, \dots, x_n \in \text{Tm}(L) \ \forall f_n \in F : f_n x_0 \dots x_n \in \text{Tm}(L)$

Belegung von Termen

Sei β eine Belegung.

- (1) $v_n^{\mathfrak{A}}[\beta] := \beta(v_n)$
- (2) $c_k^{\mathfrak{A}}[\beta] := c_k$
- (3) $(f_j s(0) \dots s(n))^{\mathfrak{A}}[\beta] := f_j(s(0)^{\mathfrak{A}}[\beta], \dots, s(n)^{\mathfrak{A}}[\beta])$

Beweis:

(a) *Induktion über den Termenaufbau*

Fall 1 $r = v_n$ eine Variable

Sei $[h] \in A$.

$$\left[\left(r^{\mathfrak{A}_s}[h(s)] \mid s \in S \right) \right] = [(h(s) \mid s \in S)] = [h] = r^{\mathfrak{A}}[[h]]$$

□

Fall 2 $r = c_k$ eine Konstante

$$\left[\left(r^{\mathfrak{A}_s} \mid s \in S \right) \right] = \left[\left(c_k^{\mathfrak{A}_s} \mid s \in S \right) \right] = c_k = r^{\mathfrak{A}}$$

□

Fall 3 $r = f_j r_0 \dots r_n$ mit $r_0, \dots, r_n \in Tm(L)$ und $r_0, \dots, r_n$ erfüllen (a)

Seien $[h_1], \dots, [h_k] \in A$.

$$\begin{aligned} & r^{\mathfrak{A}}[[h_1], \dots, [h_k]] \stackrel{\text{Belegung}}{=} f_j^{\mathfrak{A}} \left(r_0^{\mathfrak{A}}[[h_1], \dots, [h_k]], \dots, r_n^{\mathfrak{A}}[[h_1], \dots, [h_k]] \right) \\ & \stackrel{\text{vor}}{=} f_j^{\mathfrak{A}} \left(\left[\left(r_0^{\mathfrak{A}_s}[h_1(s), \dots, h_k(s)] \mid s \in S \right) \right], \dots, \left[\left(r_n^{\mathfrak{A}_s}[h_1(s), \dots, h_k(s)] \mid s \in S \right) \right] \right) \\ & \stackrel{\text{Def. von } f}{=} \left[\left(f_j^{\mathfrak{A}_s} \left(r_0^{\mathfrak{A}_s}[h_1(s), \dots, h_k(s)], \dots, r_n^{\mathfrak{A}_s}[h_1(s), \dots, h_k(s)] \right) \mid s \in S \right) \right] \\ & \stackrel{\text{Belegung}}{=} \left[\left((f_j r_0 \dots r_n)^{\mathfrak{A}_s}[h_1(s), \dots, h_k(s)] \mid s \in S \right) \right] \\ & = \left[\left(r^{\mathfrak{A}_s}[h_1(s), \dots, h_k(s)] \mid s \in S \right) \right] \end{aligned}$$

□

Zur Erinnerung ($Fml(L)$ und Belegung von Formeln)

Sei L eine Sprache. Dann hat die Menge $Fml(L)$ der **Formeln** von L folgende Eigenschaften:

- . $At(L) \subset Fml(L)$
- . $\forall \varphi, \psi \in Fml(L) : (\varphi \wedge \psi) \in Fml(L)$
- . $\forall \varphi \in Fml(L) : \neg \varphi \in Fml(L)$
- . $\forall n < \omega \forall \varphi \in Fml(L) : \forall v_n \varphi \in Fml(L)$

Wobei man mit $At(L)$ die *atomaren Formeln* von L bezeichnet:

- . $At(L) := \{s_1 = s_2 \mid s_1 \in Fml(L) \wedge s_2 \in Fml(L)\}$
- . $\cup \{R_i s_0 \dots s_n \mid i \in I \wedge s : n + 1 \longrightarrow Tm(L)\}$

Belegung von Formeln

Sei β eine Belegung.

- . $\mathfrak{A} \models s_1 = s_2 [\beta] := s_1^{\mathfrak{A}}[\beta] = s_2^{\mathfrak{A}}[\beta]$
- . $\mathfrak{A} \models R_i s_0 \dots s_n [\beta] := R_i (s_0^{\mathfrak{A}}[\beta], \dots, s_n^{\mathfrak{A}}[\beta])$
- . $\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)[\beta] := (\mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta] \wedge \mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta])$
- . $\mathfrak{A} \models \neg \varphi[\beta] := \neg \mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$
- . $\mathfrak{A} \models \forall v_n \varphi[\beta] := \forall a \in A \mathfrak{A} \models \varphi \left[\beta \frac{a}{v_n} \right]$

(b) *Induktion über den Formelaufbau*

Fall 1.1 $\varphi \in At(L) : \quad \varphi = r_1 = r_2$ mit $r_1, r_2 \in Tm(L)$
Seien $[h_1], \dots, [h_n] \in A$.

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{A} \models \varphi[[h_1], \dots, [h_n]] \stackrel{\text{Belegung}}{\Leftrightarrow} r_1^{\mathfrak{A}}[[h_1], \dots, [h_n]] = r_2^{\mathfrak{A}}[[h_1], \dots, [h_n]] \\
& \stackrel{(a)}{\Leftrightarrow} \left[\left(r_1^{\mathfrak{A}_s} [h_1(s), \dots, h_n(s)] \mid s \in S \right) \right] = \left[\left(r_2^{\mathfrak{A}_s} [h_1(s), \dots, h_n(s)] \mid s \in S \right) \right] \\
& \Leftrightarrow \left(r_1^{\mathfrak{A}_s} [h_1(s), \dots, h_n(s)] \mid s \in S \right) \sim \left(r_2^{\mathfrak{A}_s} [h_1(s), \dots, h_n(s)] \mid s \in S \right) \\
& \stackrel{\text{Def. von}}{\Leftrightarrow} \sim \left\{ s \in S \mid r_1^{\mathfrak{A}_s} [h_1(s), \dots, h_n(s)] = r_2^{\mathfrak{A}_s} [h_1(s), \dots, h_n(s)] \right\} \in U \\
& \stackrel{\text{Belegung}}{\Leftrightarrow} \left\{ s \in S \mid \mathfrak{A}_s \models \varphi[h_1(s), \dots, h_n(s)] \right\} \in U
\end{aligned}$$

□

Fall 1.2 $\varphi \in At(L) : \quad \varphi = R_i r_0 \dots r_n$ mit $r_0, \dots, r_n \in Tm(L)$
Seien $[h_1], \dots, [h_l] \in A$.

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{A} \models \varphi[[h_1], \dots, [h_l]] \stackrel{\text{Belegung}}{\Leftrightarrow} R_i \left(r_0^{\mathfrak{A}}[[h_1], \dots, [h_l]] \dots r_n^{\mathfrak{A}}[[h_1], \dots, [h_l]] \right) \\
& \stackrel{(a)}{\Leftrightarrow} R_i \left(\left[\left(r_0^{\mathfrak{A}_s} [h_1(s), \dots, h_l(s)] \right) \right], \dots, \left[\left(r_n^{\mathfrak{A}_s} [h_1(s), \dots, h_l(s)] \right) \right] \right) \\
& \stackrel{\text{Def. von Relationen}}{\Leftrightarrow} \left\{ s \in S \mid R_i^{\mathfrak{A}_s} \left(r_0^{\mathfrak{A}_s} [h_1(s), \dots, h_l(s)], \dots, r_n^{\mathfrak{A}_s} [h_1(s), \dots, h_l(s)] \right) \right\} \in U \\
& \stackrel{\text{Belegung}}{\Leftrightarrow} \left\{ s \in S \mid \mathfrak{A}_s \models \varphi[h_1(s), \dots, h_l(s)] \right\} \in U
\end{aligned}$$

□

Fall 2 $\varphi = \neg\psi$ und (b) gilt für $\psi \in Fml(L)$
Seien $[h_1], \dots, [h_n] \in A$. Da U ein Ultrafilter ist, folgt:

$$\begin{aligned}
& \left\{ s \in S \mid \mathfrak{A}_s \models \psi[h_1(s), \dots, h_n(s)] \right\} \notin U \\
& \Leftrightarrow \left\{ s \in S \mid \neg \mathfrak{A}_s \models \psi[h_1(s), \dots, h_n(s)] \right\} \in U \tag{1}
\end{aligned}$$

Damit folgt dann:

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{A} \models \varphi[[h_1], \dots, [h_n]] \stackrel{\text{Belegung}}{\Leftrightarrow} \neg \mathfrak{A} \models \psi[[h_1], \dots, [h_n]] \\
& \stackrel{\text{Vor.}}{\Leftrightarrow} \left\{ s \in S \mid \mathfrak{A}_s \models \psi[h_1(s), \dots, h_n(s)] \right\} \notin U \\
& \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \left\{ s \in S \mid \neg \mathfrak{A}_s \models \psi[h_1(s), \dots, h_n(s)] \right\} \in U \\
& \stackrel{\text{Belegung}}{\Leftrightarrow} \left\{ s \in S \mid \mathfrak{A}_s \models \varphi[h_1(s), \dots, h_n(s)] \right\} \in U
\end{aligned}$$

□

Fall 3 $\varphi = (\psi \wedge \chi)$ und (b) gilt für $\psi, \chi \in Fml(L)$
Seien $[h_1], \dots, [h_n] \in A$. Da U ein Ultrafilter und gegen endliche Schnitt-

und Obermengenbildung abgeschlossen ist, gilt:

$$\forall x, y \subseteq S : (x \in U \wedge y \in U) \Leftrightarrow x \cap y \in U \quad (2)$$

Daraus folgt dann:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \varphi[[h_1], \dots, [h_n]] &\stackrel{\text{Belegung}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A} \models \psi[[h_1], \dots, [h_n]] \wedge \mathfrak{A} \models \chi[[h_1], \dots, [h_n]] \\ \stackrel{\text{Vor.}}{\Leftrightarrow} \left\{ s \in S \mid \mathfrak{A}_s \models \psi[h_1(s), \dots, h_n(s)] \right\} \in U &\wedge \left\{ s \in S \mid \mathfrak{A}_s \models \chi[h_1(s), \dots, h_n(s)] \right\} \in U \\ \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \left\{ s \in S \mid \mathfrak{A}_s \models \psi[h_1(s), \dots, h_n(s)] \right\} \cap \left\{ s \in S \mid \mathfrak{A}_s \models \chi[h_1(s), \dots, h_n(s)] \right\} &\in U \\ \Leftrightarrow \left\{ s \in S \mid \mathfrak{A}_s \models \psi[h_1(s), \dots, h_n(s)] \wedge \mathfrak{A}_s \models \chi[h_1(s), \dots, h_n(s)] \right\} &\in U \\ \Leftrightarrow \left\{ s \in S \mid \mathfrak{A}_s \models \varphi[h_1(s), \dots, h_n(s)] \right\} &\in U \end{aligned}$$

□

Fall 4 $\varphi = \forall x \psi$ und (b) gilt für $\psi \in Fml(L)$

Seien $[h_0], \dots, [h_n] \in A$. Für diesen Fall ist zu zeigen, daß

$$\begin{aligned} (i) \quad &\forall [h] \in A \left\{ s \in S \mid \mathfrak{A}_s \models \psi[h(s), h_0(s), \dots, h_n(s)] \right\} \in U \\ (ii) \quad &\left\{ s \in S \mid \forall a \in A_s \mathfrak{A}_s \models \psi[a, h_0(s), \dots, h_n(s)] \right\} \in U \quad (3) \end{aligned}$$

äquivalent sind.

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Angenommen: (ii) ist nicht erfüllt, d.h.

$$\begin{aligned} \left\{ s \in S \mid \forall a \in A_s \mathfrak{A}_s \models \psi[a, h_0(s), \dots, h_n(s)] \right\} &\notin U \\ \stackrel{U \text{ Ultrafilter}}{\Rightarrow} Z := \left\{ s \in S \mid \exists a \in A_s \neg \mathfrak{A}_s \models \psi[a, h_0(s), \dots, h_n(s)] \right\} &\in U \end{aligned}$$

Dann definiere die folgende Funktion (mit Hilfe des Auswahlaxioms (AC)):

$$\begin{aligned} h : S &\longrightarrow \bigcup_{s \in S} A_s \\ h(s) &:= \begin{cases} a \in A_s \text{ mit } \neg \mathfrak{A}_s \models \psi[a, h_0(s), \dots, h_n(s)] & : s \in Z \\ a \in A_s \text{ beliebig} & : \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Es gilt nun:

$$Z \subset \underbrace{\left\{ s \in S \mid \neg \mathfrak{A}_s \models \psi[h(s), h_0(s), \dots, h_n(s)] \right\}}_{\in U, \text{ wegen Filtereigenschaft (3)}}$$

Nach Voraussetzung ist aber das Komplement dieser Menge in U

$\Rightarrow$ Widerspruch zur Definition von Ultrafilter

(ii) $\Rightarrow$ (i)Sei $h \in \times_{s \in S} A_s$ beliebig.

Es gilt nun:

$$\begin{aligned} \left\{ s \in S \mid \forall a \in A_s \ \mathfrak{A}_s \models \psi[a, h_0(s), \dots, h_n(s)] \right\} \subset \\ \left\{ s \in S \mid \mathfrak{A}_s \models \psi[h(s), h_0(s), \dots, h_n(s)] \right\} \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung (ii):

$$\begin{aligned} \left\{ s \in S \mid \forall a \in A_s \ \mathfrak{A}_s \models \psi[a, h_0(s), \dots, h_n(s)] \right\} \in U \\ \xRightarrow{\text{Filtereigenschaft (3)}} \left\{ s \in S \mid \mathfrak{A}_s \models \psi[h(s), h_0(s), \dots, h_n(s)] \right\} \in U \end{aligned}$$

q.e.d.
(3)

Nun folgt der Beweis von Fall 4:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \varphi[[h_1], \dots, [h_n]] &\stackrel{\text{Belegung}}{\Leftrightarrow} \forall a \in A \ \mathfrak{A} \models \psi[a, [h_0], \dots, [h_n]] \\ &\Leftrightarrow \forall [h] \in A \ \mathfrak{A} \models \psi[[h], [h_0], \dots, [h_n]] \\ &\stackrel{\text{Vor.}}{\Leftrightarrow} \forall [h] \in A \ \left\{ s \in S \mid \mathfrak{A}_s \models \psi[h(s), h_0(s), \dots, h_n(s)] \right\} \in U \\ &\stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} \left\{ s \in S \mid \forall a \in A_s \ \mathfrak{A}_s \models \psi[a, h_0(s), \dots, h_n(s)] \right\} \in U \\ &\stackrel{\text{Belegung}}{\Leftrightarrow} \left\{ s \in S \mid \mathfrak{A}_s \models \varphi[h_0(s), \dots, h_n(s)] \right\} \in U \end{aligned}$$

q.e.d.

Korollar 5 (*L-Sätze*)Sei $\varphi \in \text{Fml}_0(L)$. Dann gilt: $\prod_{s \in S} \mathfrak{A}_s / U \models \varphi \iff \left\{ s \in S \mid \mathfrak{A}_s \models \varphi \right\} \in U$.*Beweis:*

Der Beweis folgt sofort aus dem Satz von Łoś(b).

$$\varphi \underbrace{(x_0, \dots, x_n)}_{n+1 \text{ freie Variablen}} \in \text{Fml}_{n+1}(L)$$

q.e.d.

Zur Erinnerung (*Einbettung, Isomorphismus, elementare Einbettung*)
 Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ L -Strukturen und $h : |\mathfrak{A}| \longrightarrow |\mathfrak{B}|$ eine Abbildung.
 h ist eine **Einbettung**, wenn folgendes gilt:

- (1) h ist injektiv
 (2) $\forall i \in I \forall \vec{x} \in A^{t(i)} (R_i^{\mathfrak{A}} \vec{x} \leftrightarrow R_i^{\mathfrak{B}} h(\vec{x}))$

h heißt **Isomorphismus**, wenn zusätzlich noch folgendes gilt:

- (3) h ist bijektiv

h ist eine **elementare Einbettung**, wenn gilt:

- (1) $\forall n < \omega \forall \varphi \in Fml_n(L) :$
 $(\forall h_1, \dots, h_n \in |\mathfrak{A}|^n : \mathfrak{A} \models \varphi[h_1, \dots, h_n] \longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[h(h_1), \dots, h(h_n)])$

Korollar 6 (elementare Einbettung)

Sei $\mathfrak{B}$ eine L -Struktur. Dann ist durch $\iota(b) := [(b \mid s \in S)]$ eine elementare Einbettung $\iota : \mathfrak{B} \prec \mathfrak{B}^S/U$ gegeben.

Beweis:

Sei $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in Fml_n(L)$. Sei $b_1, \dots, b_n \in |\mathfrak{B}|$ beliebig.

Dann gilt:

$$\mathfrak{B} \models \varphi[b_1, \dots, b_n] \Leftrightarrow \underbrace{\{s \in S \mid \mathfrak{B} \models \varphi[b_1, \dots, b_n]\}}_{\in \{\emptyset, S\}} \in U$$

$$\stackrel{\text{Łoś(b)}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{B}^S/U \models \varphi[\iota(b_1), \dots, \iota(b_n)]$$

q.e.d.

Bei einem Ultraprodukt müssen die einzelnen Faktoren nicht notwendig *elementare Substrukturen* des Ultraproduktes sein. I.A. sind sie zu diesem noch nicht einmal *elementar äquivalent*.

Beispiel 7 (Primzahlen)

Sei F der Filter der coendlichen Teilmengen der Menge $\mathbb{P}$ der Primzahlen und $U \supset F$ ein Ultrafilter. Für $p \in \mathbb{P}$ sei $\mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen (also $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$).

Dann ist $\mathbb{F} := \prod_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{F}_p / U$ ein Körper der Charakteristik 0. Dies folgt aus dem Satz von Łoś(a) und aus der Eigenschaft, daß für alle $p \in \mathbb{P}$ $\{q \in \mathbb{P} \mid \mathbb{F}_q \models \neg C_p\} = \mathbb{P} \setminus \{p\} \in U$ ist.

Zur Erinnerung (elementare Substrukturen, elementare Abbildungen, elementar äquivalent, coendliche Teilmengen, Charakteristik)

Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ L -Strukturen .

Dann ist $\mathfrak{A}$ eine **elementare Substruktur** von $\mathfrak{B}$, wenn gilt:

- (i) $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$
 (ii) $id : \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$

$\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ ist eine **elementare Abbildung**, wenn gilt:

- (i) $h : |\mathfrak{A}| \longrightarrow |\mathfrak{B}|$
 (ii) $\forall n < \omega \forall \varphi \in Fml_n(L) \forall \vec{a} \in |\mathfrak{A}|^n (\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[h(\vec{a})])$

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind **elementar äquivalent**, wenn gilt:

- . $Th(\mathfrak{A}) \equiv Th(\mathfrak{B})$
wobei $Th(\mathfrak{A}) := \{\varphi \in Fml_0(L) \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$

Filter der coendlichen Teilmengen der Menge $\mathbb{P}$:

- . $C := \{A \subseteq \mathbb{P} \mid \mathbb{N} \setminus A \text{ ist endlich}\}$

Charakteristik

- . $C_p := \sum_{i < p} 1 = 0$
- . für $\mathbb{F}_p$ gilt: $\mathbb{F}_p \models C_p$

Zur Erinnerung (Hauptultrafilter)

U ist **Hauptultrafilter** von S , wenn gilt:

$$\exists s_0 \in S : U = \{x \subset S \mid s_0 \in x\}$$

Korollar 8 (Hauptultrafilter)

Ist U ein Hauptultrafilter, d.h. $\exists s_0 \in S$ mit $U = \{x \subset S \mid s_0 \in x\}$,
so ist $\prod_{s \in S} \mathfrak{A}_s / U \cong \mathfrak{A}_{s_0}$.

Beweis:

Sei $\mathfrak{A} := \prod_{s \in S} \mathfrak{A}_s / U$. $F : |\mathfrak{A}| \longrightarrow |\mathfrak{A}_{s_0}|$ mit $F([h]) = h(s_0)$ ist isomorph.

Sei $[f], [g] \in |\mathfrak{A}|$

$$\begin{aligned} [f] = [g] &\Leftrightarrow f \sim g \stackrel{U \text{ Hauptultrafilter}}{\Leftrightarrow} f(s_0) = g(s_0) \\ &\Leftrightarrow F([f]) = F([g]) \end{aligned}$$

F injektiv

angenommen: $\exists [f], [g] \in |\mathfrak{A}| : F([f]) = F([g]) \text{ und } f \not\sim g$

$$\begin{aligned} F([f]) = F([g]) &\Leftrightarrow f(s_0) = g(s_0) \Leftrightarrow \{s \in S \mid f(s) = g(s)\} \in U \\ &\Leftrightarrow f \sim g \end{aligned}$$

Widerspruch zur Annahme

□

F surjektiv

da U Hauptultrafilter gilt:

$$\overline{|\mathfrak{A}|} = \overline{|\mathfrak{A}_{s_0}|}$$

□

Relationen

Sei R_i eine n -stellige Relation von $\mathfrak{A}$ und $[h_1], \dots, [h_n] \in |\mathfrak{A}|$

zu zeigen: $R_i^{\mathfrak{A}}([h_1], \dots, [h_n]) \leftrightarrow R_i^{\mathfrak{A}_{s_0}}(F([h_1]), \dots, F([h_n]))$

$$R_i^{\mathfrak{A}}([h_1], \dots, [h_n]) \Leftrightarrow \left\{ s \in S \mid R_i^{\mathfrak{A}_s}(h_1(s), \dots, h_n(s)) \right\} \in U$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow s_0 \in \left\{ s \in S \mid R_i^{\mathfrak{A}_s}(h_1(s), \dots, h_n(s)) \right\} \\ \Leftrightarrow R_i^{\mathfrak{A}_{s_0}}(h_1(s), \dots, h_n(s)) \end{aligned}$$

□

q.e.d.

Satz 9 (Kompaktheitssatz)

Sei $\Phi \subset \text{Fml}_0(L)$ und jede endliche Teilmenge $s \subset \Phi$ habe ein Modell $\mathfrak{A}_s$. Dann existiert ein Ultrafilter U auf $S := \{s \subset \Phi \mid \bar{s} < \aleph_0\}$, so daß $\prod_{s \in S} \mathfrak{A}_s / U$ ein Modell von Φ ist. Dies impliziert: Ist Φ endlich erfüllbar, so ist Φ erfüllbar. (**Kompaktheitssatz**)

Beweis:

Zur Erinnerung (Kompaktheitssatz)

Sei $\Phi \subset \text{Fml}_0(L)$.

- . $\text{Erf}(\Phi) \Leftrightarrow \forall \Phi' \subset \Phi \left(\overline{\Phi'} < \aleph_0 \rightarrow \text{Erf}(\Phi') \right)$
- . $\Phi \models \varphi \Leftrightarrow \exists \Phi' \subset \Phi \left(\overline{\Phi'} < \aleph_0 \wedge \Phi' \models \varphi \right)$

Definiere für $\varphi \in \text{Fml}_0(L)$: $\langle \varphi \rangle := \{s \in S \mid \varphi \in s\}$

und

$$E := \{ \langle \varphi \rangle \mid \varphi \in \Phi \}$$

Dann hat E die *endliche Durchschnittseigenschaft*, da

$$\bigcap_{i < n} \langle \varphi_i \rangle \ni \{ \varphi_i \mid i < n \}$$

Zur Erinnerung (endliche Durchschnittseigenschaft)

E hat die **endliche Durchschnittseigenschaft**, wenn gilt:

- . $\forall E' \subset E \left(\overline{E'} < \aleph_0 \rightarrow \bigcap E' \neq \emptyset \right)$

Sei $U \supset E$ ein Ultrafilter auf S .

U existiert:

[Satz 12.12 (Skript)]

$E \subset \text{Pot}(S) : \exists U \text{ Ultrafilter auf } S \Leftrightarrow E \text{ hat die endliche Durchschnittseigenschaft}$

$$F := \left\{ y \subset S \mid \exists E' \subset E \left(\overline{E'} < \aleph_0 \wedge y \supset \underbrace{\bigcap E'}_{\neq \emptyset} \right) \right\}$$

Für diesen Beweis benötigen wir nur die eine Richtung („ $\Leftarrow$ “).

zu zeigen: F ist ein eigentlicher Filter auf S , der E umfaßt.

- (1) E hat die endliche Durchschnittseigenschaft $\Rightarrow \emptyset \notin F$
- (2) F ist gegen Obermengenbildung abgeschlossen.

$$x \subset y \subset S : x \in F \Rightarrow \exists E' \subset E \left(\overline{E'} < \aleph_0 \wedge \underbrace{x}_y \supset \bigcap E' \right)$$

(3) $y_1 \supset \bigcap E'$ und $y_2 \supset \bigcap E''$ mit $E', E'' \subset E$ endlich

$$y_1 \cap y_2 \supset \bigcap \left(\underbrace{E' \cup E''}_{\subset E \text{ endlich}} \right)$$

$$\stackrel{\text{Def. von } F}{\Rightarrow} y_1 \cap y_2 \in F$$

Nach dem *Zorn'schen Lemma* wähle nun ein $\subset$ -maximales Element U in

$$\mathcal{F} := \{G \subset \text{Pot}(S) \mid F \subset G \wedge G \text{ ist eigentlicher Filter auf } S\}$$

U ist ein Ultrafilter.

Sei $\varphi \in \Phi$ so gilt: $\mathfrak{A}_s \models \varphi$ für jedes $s \in S$ mit $\varphi \in s$.

Also ist: $s \in \langle \varphi \rangle$

Somit gilt:

$$\{s \in S \mid \mathfrak{A}_s \models \varphi\} \supset \langle \varphi \rangle$$

und weil $\langle \varphi \rangle \in U \stackrel{\text{Obermengenabschluß}}{\Rightarrow} \{s \in S \mid \mathfrak{A}_s \models \varphi\} \in U$

d.h. $\prod_{s \in S} \mathfrak{A}_s / U \models \varphi$

nach Korollar 5.
q.e.d.

Definition 10 (Δ -elementar)

Eine Klasse K von L -Strukturen heißt **Δ -elementar** genau dann, wenn $\exists \Phi \subset \text{Fml}_0(L)$ mit $K = \text{Mod}^L(\Phi)$. Wobei $\text{Mod}^L(\Phi)$ definiert ist als:

$$\text{Mod}^L(\Phi) = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \text{ ist } L\text{-Struktur} \wedge \mathfrak{A} \models \Phi\}$$

Satz 11 (Δ -elementar)

Sei κ eine Menge von L -Strukturen. κ ist genau dann Δ -elementar, wenn κ bzgl. elementarer Äquivalenz und gegen Ultraproduktbildung abgeschlossen ist.

Beweis:

Zur Erinnerung (Δ -elementar, elementar äquivalent)
 . κ **Δ -elementar** $\Leftrightarrow \exists \Phi \subset \text{Fml}_0(L) : \kappa = \text{Mod}^L(\Phi)$
 . $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind **elementar äquivalent** $\Leftrightarrow \text{Th}(\mathfrak{A}) \equiv \text{Th}(\mathfrak{B})$
 wobei $\text{Th}(\mathfrak{A}) := \{\varphi \in \text{Fml}_0(L) \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$

„ $\Rightarrow$ “

Sei κ Δ -elementar, d.h. $\exists \Phi \in \text{Fml}_0(L) : \kappa = \text{Mod}^L(\Phi)$

(1) Sei $\mathfrak{A} \in \kappa$ und $\mathfrak{B}$ eine L -Struktur mit $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$

$$\Rightarrow \mathfrak{B} \models \Phi \text{ also } \mathfrak{B} \in \kappa$$

(2) Sei S eine Menge und U ein Ultrafilter auf S und sei $\forall s \in S : \mathfrak{A}_s \in \kappa$

$$\Rightarrow \forall s \in S : \mathfrak{A}_s \models \Phi$$

$$\stackrel{\text{Korollar 5}}{\Rightarrow} \prod_{s \in S} \mathfrak{A}_s / U \models \Phi$$

$$\Rightarrow \prod_{s \in S} \mathfrak{A}_s / U \in \kappa$$

„ $\Leftarrow$ “

Setze $\Phi := \{ \varphi \in Fml_0(L) \mid \forall \mathfrak{A} \in \kappa : \mathfrak{A} \models \varphi \}$

$$\Rightarrow \kappa \subset Mod^L(\Phi)$$

Wir zeigen nun: $Mod^L(\Phi) \subset \kappa$

Fixiere dafür $\mathfrak{B} \in Mod^L(\Phi)$.

Sei $\Psi := Th(\mathfrak{B})$ und $S := \{ s \subset \Psi \mid \bar{s} < \aleph_0 \}$

zu zeigen: $\forall s \in S \exists \mathfrak{A}_s \in \kappa : \mathfrak{A}_s \models s$ (3)

Beweis:

angenommen: es gilt nicht.

$$\Rightarrow \exists s_0 \in S \text{ mit } \mathfrak{A} \models \neg \bigwedge s_0 \text{ f\"ur alle } \mathfrak{A} \in \kappa$$

$$\Rightarrow \neg \bigwedge s_0 \in \Phi$$

$$\Rightarrow \mathfrak{B} \models \neg \bigwedge s_0$$

Da $s_0 \subset \Psi \equiv Th(\mathfrak{B})$ gilt aber: $\mathfrak{B} \models \bigwedge s_0$

Widerspruch

q.e.d.

(3)

(3) $\stackrel{\text{Satz 9}}{\Rightarrow}$ es gibt einen Ultrafilter U auf S mit $\prod_{s \in S} \mathfrak{A}_s / U \models \Psi$

κ ist abgeschlossen gegen Ultraproduktbildung

$$\Rightarrow \prod_{s \in S} \mathfrak{A}_s / U \in \kappa$$

$\Psi = Th(\mathfrak{B})$. Und $\mathfrak{B}$ und $\prod_{s \in S} \mathfrak{A}_s / U$ sind elementar äquivalent.

κ ist abgeschlossen bzgl. elementarer Äquivalenz $\Rightarrow \mathfrak{B} \in \kappa$.

q.e.d.

Definition 12 (elementare Klassen von L -Strukturen)

Eine Klasse K von L -Strukturen heißt **elementar** genau dann, wenn $\exists \varphi \in Fml_0(L)$ mit $K = Mod^L(\varphi)$.

Korollar 13 (elementare Klassen von L -Strukturen)

Eine Klasse κ von L -Strukturen ist genau dann elementar, wenn sowohl κ als auch ihr Komplement $\kappa^* := \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \text{ ist eine } L\text{-Struktur und } \mathfrak{A} \notin \kappa\}$ bzgl. elementarer Äquivalenz und gegen Ultraproduktbildung abgeschlossen sind.

Beweis:

„ $\Rightarrow$ “

κ elementar $\Rightarrow \exists \varphi \in Fml_0(L) : \kappa = Mod^L(\varphi)$

mit $\Phi = \{\varphi\}$ folgt die Behauptung des Korollars aus Satz 10.

„ $\Leftarrow$ “

Sei κ und κ^* Δ -elementar etwa $\kappa = Mod^L(\Phi)$ und $\kappa^* = Mod^L(\Phi^*)$ mit $\Phi, \Phi^* \in Fml_0(L)$

Angenommen: κ ist nicht elementar

daraus folgt, daß es zu jedem endlichen $\Phi' \subset \Phi$ eine L -Struktur $\mathfrak{A}$ gibt mit

$\mathfrak{A} \models \Phi'$ aber $\mathfrak{A} \not\models \Phi$.

$\Rightarrow \mathfrak{A} \notin \kappa$ also $\mathfrak{A} \in \kappa^*$ und somit $\mathfrak{A} \models \Phi^*$

$\Rightarrow \Phi \cup \Phi^*$ ist endlich erfüllbar $\stackrel{\text{Kompaktheit}}{\Rightarrow} \exists$ ein Modell $\mathfrak{A} \models \Phi \cup \Phi^*$

Jedoch gilt: $\kappa \cap \kappa^* = \emptyset \Rightarrow$ Widerspruch zur Annahme

Also ist κ elementar.

q.e.d.