Seminar zur Logik: Nichtstandardanalysis

Ultraprodukte und Ultrapotenzen

— Christian Panten —

Definition 1 *(L-Struktur $\mathfrak{A}$)*
Sei S eine Menge. Und für alle $s \in S$ gebe es eine L-Struktur $\mathfrak{A}_s$. Weiter sei U ein Ultrafilter. Nun definieren wir eine Äquivalenz-Relation $\sim$ auf $B :\equiv \times_{s \in S} A_s$ durch $f \sim g :\equiv \{s \in S \mid f(s) = g(s)\} \in U$.
Grundmenge: $A :\equiv B/\sim \; :\equiv \left\{[h] \;\middle|\; h \in B\right\}$
Relationen: $R_i\big([h_0] \dots [h_{t(i)-1}]\big) :\equiv \left\{s \in S \;\middle|\; R_i^{\mathfrak{A}_s}\left(h_0(s) \dots h_{t(i)-1}(s)\right)\right\} \in U$
Funktionen: $f_j\big([h_0] \dots [h_{t(j)-1}]\big) :\equiv \left[\left(f_j^{\mathfrak{A}_s}\left(h_0(s) \dots h_{t(j)-1}(s)\right) \;\middle|\; s \in S\right)\right]$
Konstanten: $c_k :\equiv \left[\left(c_k^{\mathfrak{A}_s} \;\middle|\; s \in S\right)\right]$

Definition 2 *(Ultraprodukt und Ultrapotenz)*
Die oben definierte L-Struktur heißt das **Ultraprodukt der** $\left(\mathfrak{A}_s \mid s \in S\right)$ **über U**. Wir bezeichnen das Ultraprodukt mit $\prod_{s \in S} \mathfrak{A}_s/U$. Sind alle $\mathfrak{A}_s$ gleich einer L-Struktur $\mathfrak{B}$, so schreiben wir $\mathfrak{B}^S/U$. Diese L-Struktur heißt dann die **Ultrapotenz von $\mathfrak{B}$ über U**.

Satz 3 *(Satz von Łoś)*
Sei $\mathfrak{A} :\equiv \prod_{s \in S} \mathfrak{A}_s/U$.

(i) Sei $r(x_0, ..., x_n) \in \mathrm{Tm}(L)$ und seien $[h_0], ..., [h_n] \in$ A. Dann gilt
$r^{\mathfrak{A}}\big[[h_0], ..., [h_n]\big] = \left[\left(r^{\mathfrak{A}_s}[h_0(s), ..., h_n(s)] \;\middle|\; s \in S\right)\right]$.

(ii) Sei $\varphi(x_0, \dots, x_n) \in \mathrm{Fml}(L)$ und seien $[h_0], ..., [h_n] \in$ A. Dann gilt
$\mathfrak{A} \models \varphi\big[[h_0], \dots, [h_n]\big] \longleftrightarrow \left\{s \in S \;\middle|\; \mathfrak{A}_s \models \varphi[h_0(s), \dots, h_n(s)]\right\} \in U$.

Korollar 4
Sei $\varphi \in \mathrm{Fml}_0(L)$. Dann gilt: $\prod_{s \in S} \mathfrak{A}_s/U \models \varphi \Longleftrightarrow \left\{s \in S \;\middle|\; \mathfrak{A}_s \models \varphi\right\} \in U$.

Korollar 5
Sei $\mathfrak{B}$ eine L-Struktur. Dann ist durch $\iota(b) :\equiv \left[\, (b \mid s \in S) \,\right]$ eine elementare Einbettung $\iota : \mathfrak{B} \prec \mathfrak{B}^S/U$ gegeben.

Korollar 6
Ist U ein Hauptultrafilter, d. h. $\exists s_0 \in S$ mit $U = \left\{ x \subset S \;\middle|\; s_0 \in x \right\}$, so ist $\prod_{s \in S} \mathfrak{A}_s/U \cong \mathfrak{A}_{s_0}$.

Satz 7
Sei $\Phi \subset \mathrm{Fml}_0(L)$ und jede endliche Teilmenge $s \subset \Phi$ habe ein Modell $\mathfrak{A}_s$. Dann existiert ein Ultrafilter U auf $S :\equiv \left\{ s \subset \Phi \;\middle|\; \overline{\overline{s}} < \aleph_0 \right\}$, so daß $\prod_{s \in S} \mathfrak{A}_s/U$ ein Modell von Φ ist. Dies impliziert: Ist Φ endlich erfüllbar, so ist Φ erfüllbar. **(Kompaktheitssatz)**

Definition 8
Eine Klasse K von L-Strukturen heißt **Δ-elementar** genau dann, wenn $\exists \Phi \subset \mathrm{Fml}_0(L)$ mit $K = Mod^L(\Phi)$. Wobei $Mod^L(\Phi)$ definiert ist als: $Mod^L(\Phi) = \left\{ \mathfrak{A} \;\middle|\; \mathfrak{A} \text{ ist } L\text{-Struktur} \wedge \mathfrak{A} \models \Phi \right\}$

Satz 9
Sei κ eine Menge von L-Strukturen. κ ist genau dann Δ-elementar, wenn κ bzgl. elementarer Äquivalenz und gegen Ultraproduktbildung abgeschlossen ist.

Definition 10
Eine Klasse K von L-Strukturen heißt **elementar** genau dann, wenn $\exists \varphi \in \mathrm{Fml}_0(L)$ mit $K = Mod^L(\varphi)$.

Korollar 11
Eine Klasse κ von L-Strukturen ist genau dann elementar, wenn sowohl κ als auch ihr Komplement $\kappa^* :\equiv \left\{ \mathfrak{A} \;\middle|\; \mathfrak{A} \text{ ist eine } L\text{-Struktur und } \mathfrak{A} \notin \kappa \right\}$ bzgl. elementarer Äquivalenz und gegen Ultraproduktbildung abgeschlossen sind.