Mengenlehre I
Bonn, Wintersemester 2002
Vorversion

Peter Koepke

23. Januar 2003

1 Einleitung

Die Mengenlehre ist die heute allgemein akzeptierte Grundlegung der Mathematik. Sie ist darüber hinaus die mathematische Theorie des Unendlichen. Diese Motivationen für die elementare und axiomatische Mengenlehre werden im Folgenden etwas weiter ausgeführt.

1.1 Grundlegung der Mathematik

Gewöhnliche mathematische Begriffe lassen sich schrittweise auf den Begriff der **Menge** zurückführen wie z.B. in der folgenden Reduktion:

> f ist eine reell-wertige Funktion $\equiv$ f ist eine **Menge** von geordneten Paaren $(x, f(x))$ reeller Zahlen.
>
> (x, y) ist ein geordnetes Paar $\equiv$ (x, y) ist die **Menge** $\ldots \{x, y\} \ldots$.
>
> x ist eine reelle Zahl $\equiv$ x ist linke Hälfte eines Dedekindschen Schnitts in $\mathbb{Q}$ $= x$ ist eine **Teilmenge** von $\mathbb{Q}$, so dass ….
>
> r ist eine rationale Zahl $\equiv$ r ist **geordnetes Paar** von ganzen Zahlen, so dass ….
>
> z ist eine ganze Zahl $\equiv$ z ist **geordnetes Paar** von natürlichen Zahlen.
>
> $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
>
> 0 ist die leere **Menge**.
>
> 1 ist die **Menge** $\{0\}$.
>
> 2 ist die **Menge** $\{0, 1\}$. Usw.

Wir werden zahlreiche Begriffe in der Mengenlehre formalisieren und auf diese Weise demonstrieren, wie sich **alle** Begriffe der Mathematik im Rahmen der Mengenlehre formalisieren lassen.

1.2 Unendliche Kardinalitäten

Die Mengenlehre als Lehre vom Unendlichen geht zurück auf CANTORs fundamentalen Satz, der zeigt, dass es verschiedene Arten von Unendlichkeit gibt.

Satz 1.1 (Georg Cantor) *Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist nicht abzählbar.*

BEWEIS. Angenommen $f : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{R}$ ist bijektiv. Definiere eine Dezimalzahl $r = 0, r_0 r_1 r_2 \ldots$ durch: $r_i = 0$, falls die i-te Dezimalstelle von $f(i)$ eine 1 ist, und $r_i = 1$ sonst. Wähle eine natürliche Zahl n mit $r = f(n)$. Dann ist $r_n \neq$ der n-ten Dezimalstelle von $f(n)$ und $r_n \neq$ der n-ten Dezimalstelle von r. Also ist $r_n \neq r_n$, Widerspruch. QED

CANTOR zeigte, dass die Menge der algebraischen reellen Zahlen andererseits abzählbar ist, und erhielt so einen „abstrakten“ Beweis der Existenz transzendenter reeller Zahlen. CANTOR vermutete, dass die *Kardinalität* der Menge der reellen Zahlen der unmittelbare Nachfolger der Kardinalität der Menge der natürlichen Zahlen ist: die CANTORsche *Kontinuumshypothese* besagt, dass jede Menge reeller Zahlen abzählbar oder bijektiv zu $\mathbb{N}$ oder bijektiv zu $\mathbb{R}$ ist. Die Vermutung konnte von CANTOR und zahlreichen anderen Mathematikern nicht bewiesen oder widerlegt werden. KURT GÖDEL und PAUL COHEN haben dann gezeigt, dass *die Kontinuumshypothese in der gewöhnlichen Mathematik nicht entschieden werden kann.* Ein Ziel der Vorlesung besteht darin, diese Aussage formal exakt zu fassen und zu beweisen.

1.3 Mengen reeller Zahlen

Es gibt verschiedene Beweise für die Existenz von Mengen reeller Zahlen, die nicht LEBESGUE-messbar sind. Diese Beweise beruhen auf Prinzipien wie dem ZORNschen Lemma oder dem ZERMELOschen Auswahlaxiom. Andererseits sind einfache Mengen reeller Zahlen wie die BORELschen Mengen LEBESGUE-messbar. Damit entscheiden die mengentheoretischen Grundlagen der Analysis über einfache Eigenschaften von Mengen reeller Zahlen. Die *deskriptive Mengenlehre* untersucht und klassifiziert Mengen reeller Zahlen unter derartigen Gesichtspunkten.

Die Vorlesung entwickelt die Mengenlehre auf der Basis der ZERMELO-FRAENKELschen Axiome zunächst bis zur Theorie der Ordinalzahlen. Wir untersuchen dann Äquivalenzen und Konsequenzen des Auswahlaxioms. Als merkwürdige Folgerung des Axioms ergibt sich das Paradoxon von HAUSDORFF. Wir zeigen jedoch, dass die Annahme des Auswahlaxioms die Gefahr eines Widerspruchs in den Grundlagen nicht vermehrt: wenn die ZERMELO-FRAENKELschen Axiome ohne das Auswahlaxiom widerspruchsfrei sind, so sind sie es auch zusammen mit dem Auswahlaxiom. Anschließend wenden wir uns der Erzwingungsmethode (*Forcing*) zu, mit der zahlreiche weitere Aussagen über Widerspruchsfreiheit von Erweiterungen des Systems von ZERMELO und FRAENKEL gezeigt werden können.

2 Vorankündigung

Die Vorlesung *Mengenlehre I* wurde folgendermaßen vorangekündigt:

Mathematical Logic Group
Department of Mathematics, University of Bonn

Mengenlehre I
Wintersemester 2002 / 2003

Prof. Dr. Peter Koepke (koepke@math.uni-bonn.de)
Vorlesung: Dienstag Donnerstag, 10 - 12 Uhr, Seminarraum B
Sprechstunde von Prof.Dr.Koepke: Mittwoch, 12 - 13 Uhr, Beringstraße 4, Zimmer 44
Sekretariat: Frau Baoues (Be4Zi27, Mo-Fr, 9 - 12 Uhr, baoues@math.uni-bonn.de)
Newsgroup: uni-bonn.math.logik
Ein umfangreiches Skript über „Mengenlehre“ findet sich auf der Web-Seite der Arbeitsgruppe.

Zuständige Mitarbeiter für den Übungsbetrieb:
Dr. Benedikt Löwe (loewe@math.uni-bonn.de), Be4Zi24, Phone 73-2928
Stefan Bold (bold@math.uni-bonn.de) Be4Zi25, Phone 73-3352
Übungsgruppenleiter:
Oliver Lorscheid; oliver@math.uni-bonn.de
Torsten Langer; t-langer@gmx.net
Übungen:
Dienstag 16-18 Uhr Seminarraum G
Mittwoch 16-18 Uhr Seminarraum A
Übungsblätter: werden als dvi-, ps- und pdf-Dateien erhältlich sein.

Die Zermelo-Fraenkelsche Mengenlehre (ZFC) axiomatisiert die Relation "x ist ein Element von y", $x \in y$. Die gewöhnlichen mathematischen Begriffe lassen sich in dieser Theorie durch $\in$-Formeln dergestalt formalisieren, dass sich in ZFC die Grundeigenschaften der betrachteten Begriffe beweisen lassen. In diesem Sinne leistet die Zermelo-Fraenkelsche Mengenlehre eine Grundlegung der Mathematik. Das System ZFC ist allerdings unvollständig, es gibt $\in$-Sätze, die sich in ZFC nicht entscheiden lassen. Insbesondere ist die Cantorsche Kontinuumshypothese, die eine Aussage über die Kardinalität der Menge der reellen Zahlen macht, von den Zermelo-Fraenkelschen Axiomen unabhängig.
Die Vorlesung beginnt mit der Einführung der mengentheoretischen Axiome und der Entwicklung der Theorie der Ordinal- und Kardinalzahlen. Im zweiten Teil wird die Cohensche Erzwingungstechnik (*Forcing*) zur Konstruktion von verschiedenen Modellen der ZFC-Axiome eingeführt. Diese soll auf axiomatische Fragen über die Kontinuumshypothese und das Auswahlaxiom angewendet werden. Die Vorlesung folgt dem Skript *Mengenlehre*. Der Umfang der Vorlesung entspricht etwa den Kapiteln 2-5, 9, 10, 20, 22-31 des Skripts. Im Sommersemester 2003 wird die Vorlesung mit einer Vorlesung Mengenlehre II und einem Seminar zur Mengenlehre fortgesetzt werden.

Last changed: October 11th, 2002

3 Die Zermelo-Fraenkelschen Axiome

Der Begriff der *Menge* wird anschaulich durch das folgende Zitat von GEORG CANTOR beschrieben:

> *Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.*

Entscheidend ist, dass eine Zusammenfassung zu einem Ganzen wiederum als bestimmtes, wohlunterschiedenes Objekt aufgefasst werden kann, so dass eine Menge Element einer Menge sein kann oder nicht. Weiter ist eine Zusammenfassung durch die darin zusammengefassten Elemente bestimmt. Indem wir die Element-Beziehung ($\in$) auf Objekten erfassen, erfassen wir alle Aspekte des Mengen-Universums. Die einleitende Motivation 1.1 legt nahe, dass sich alle mathematischen Objekte vollständig als Mengen, Mengen von Mengen, usw. aufbauen lassen. Wir sehen daher von einer weiteren Beschreibung von „Mengen an sich“ ab und konzentrieren uns auf die Relation $\in$ zwischen ihnen.
Der naive CANTORsche Ansatz führt allerdings direkt zu Widersprüchen wie der RUSSELLschen Antinomie. Als Ausweg ergab sich eine axiomatische Vorgehensweise: die Axiome von ZERMELO und FRAENKEL beschreiben Eigenschaften der Element-Relation, sind ausreichend stark für die gewünschten Anwendungen, aber vermeiden die Russellsche Antinomie. Gleichzeitig ergeben sich axiomatische (= metatheoretische) Aspekte: Wenn die Axiome unser gesamtes Wissen über Mengen enthalten, eine bestimmte Aussage von diesen Axiomen aber nicht entschieden wird, so können wir diese Aussage nicht entscheiden. Das wird bei der CANTORschen Kontinuumshypothese der Fall sein.

Definition 3.1 Das **ZERMELO-FRAENKELsche Axiomensystem ZF** besteht aus folgenden Axiomen:

(Ex) **Mengenexistenzaxiom:** $\exists v_0 \forall v_1 \neg v_1 \in v_0$.

(Ext) **Extensionalitätsaxiom:** $\forall v_0 \forall v_1 (\forall v_2 (v_2 \in v_0 \leftrightarrow v_2 \in v_1) \rightarrow v_0 = v_1)$.

(Paar) **Paarmengenaxiom:** $\forall v_0 \forall v_1 \exists v_2 \forall v_3 (v_3 \in v_2 \leftrightarrow (v_3 = v_0 \vee v_3 = v_1))$.

($\bigcup$-Ax) **Vereinigungsaxiom:** $\forall v_0 \exists v_1 \forall v_2 (v_2 \in v_1 \leftrightarrow \exists v_3 (v_3 \in v_0 \wedge v_2 \in v_3))$.

(Aus) **Aussonderungsschema:** Für jede $\in$-Formel $\varphi(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ postuliere:
$\forall v_1 \ldots \forall v_n \forall v_{n+1} \exists v_{n+2} \forall v_0 (v_0 \in v_{n+2} \leftrightarrow (v_0 \in v_{n+1} \wedge \varphi))$.
In Worten: Zu jeder Menge a und jeder mathematischen Eigenschaft φ existiert eine Menge b, die genau diejenigen Elemente von a enthält, die der Eigenschaft φ genügen.

(Pot) **Potenzmengenaxiom:** $\forall v_0 \exists v_1 \forall v_2 (v_2 \in v_1 \leftrightarrow \forall v_3 (v_3 \in v_2 \rightarrow v_3 \in v_0))$.
In Worten: Zu jeder Menge a existiert eine Menge b, deren Elemente gerade die Teilmengen von a sind.

(Inf) **Unendlichkeitsaxiom:** $\exists v_0 (\exists v_1 (v_1 \in v_0 \wedge \forall v_2 \neg v_2 \in v_1) \wedge$
$\forall v_1 \exists v_2 (v_1 \in v_0 \longrightarrow (v_2 \in v_0 \wedge \forall v_3 (v_3 \in v_2 \leftrightarrow (v_3 \in v_1 \vee v_3 = v_1)))))$.
In Worten: Es gibt eine Menge, die eine Menge ohne Element enthält und unter der Operation $x \mapsto x \cup \{x\}$ abgeschlossen ist.

(Ers) **Ersetzungsschema:** Für jede $\in$-Formel $\varphi(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n+1})$, in der die Variablen v_{n+2} und v_{n+3} nicht vorkommen, postuliere
$\forall v_2 \ldots \forall v_{n+1}(\forall v_0 \forall v_{n+2} \forall v_{n+3}((\varphi\frac{v_{n+2}}{v_1} \wedge \varphi\frac{v_{n+3}}{v_1}) \rightarrow v_{n+2} = v_{n+3})$
$\longrightarrow \forall v_{n+2} \exists v_{n+3} \forall v_1(v_1 \in v_{n+3} \leftrightarrow \exists v_0(v_0 \in v_{n+2} \wedge \varphi)))$.
In Worten: Ersetzt man die Elemente einer Menge a durch ihre Bilder unter einer funktionalen Zuordnung (diese ist hier durch die $\in$-Formel φ gegeben), so erhält man erneut eine Menge.

(Fund) **Fundierungsschema:** Für jede $\in$-Formel $\varphi(v_0, v_1, \ldots, v_n)$, in der die Variable v_{n+1} nicht vorkommt, postuliere
$\forall v_1 \ldots \forall v_n(\exists v_0 \varphi \rightarrow \exists v_0(\varphi \wedge \forall v_{n+1}(v_{n+1} \in v_0 \rightarrow \neg \varphi\frac{v_{n+1}}{v_0})))$.
In Worten: Trifft eine mathematische Eigenschaft φ auf mindestens eine Menge zu, so trifft sie auch auf eine Menge zu, auf deren Elemente sie nicht zutrifft (es gibt einen minimalen Zeugen für φ).

Wir erläutern die Axiome der Reihe nach und führen gleichzeitig die verwendete Sprache und Konventionen ein.

3.1 Das Mengenexistenzaxiom

(Ex): $\exists v_0 \forall v_1 \neg v_1 \in v_0$.

Dieses Axiom besagt: Es gibt (eine Menge) v_0, so dass für alle (Mengen) v_1 gilt, dass v_1 kein Element von v_0 ist.
Wir drücken dieses in einer Sprache mit Quantoren $\exists$ und $\forall$ aus, wie sie zum Beispiel aus den ϵ-δ-Definitionen der Analysis bekannt ist. Die *Sprache der Mengenlehre* spricht über Variablen $v_0, v_1, \ldots$. Diese können in den zweistelligen Relationen $\in$ oder $=$ stehen: $v_1 \in v_0$ oder $v_1 = v_0$. Die elementaren Aussagen können mit aussagenlogischen Verknüpfungen *und* ($\wedge$), *oder* ($\vee$), *impliziert* ($\rightarrow$) und *nicht* ($\neg$) verbunden werden. Der Gebrauch dieser Sprache wird an den weiteren Axiomen demonstriert.
Inhaltlich besagt das Mengenexistenzaxiom, dass es eine Menge ohne Elemente gibt, eine **leere Menge**. Es ist nach dem Mengenexistenzaxiom noch möglich, dass es mehrere solche Mengen gibt.

3.2 Das Extensionalitätsaxiom

(Ext): $\forall v_0 \forall v_1(\forall v_2(v_2 \in v_0 \leftrightarrow v_2 \in v_1) \rightarrow v_0 = v_1)$.

Dieses Axiom besagt, dass eine Menge genau durch ihre Elemente bestimmt ist: wenn v_0 und v_1 dieselben Elemente enthalten, so sind sie gleich.
Wir können nun folgern, dass es höchstens eine leere Menge gibt:

Lemma 3.2 $\forall v_0 \forall v_1((\forall v_2 \neg v_2 \in v_0 \wedge \forall v_2 \neg v_2 \in v_1) \rightarrow v_0 = v_1)$.

Diese Bemerkung lässt sich formal aus dem Extensionalitätsaxiom folgern:

Beweis. Betrachte v_0, v_1, so dass: $(\forall v_2\ \neg v_2 \in v_0 \wedge \forall v_2\ \neg v_2 \in v_1)$. Betrachte v_2. Dann ist $(\neg v_2 \in v_0 \wedge \neg v_2 \in v_1)$. Dann ist $(v_2 \in v_0 \leftrightarrow v_2 \in v_1)$. Da v_2 beliebig war, gilt $\forall v_2(v_2 \in v_0 \leftrightarrow v_2 \in v_1)$. Nach dem Extensionalitätsaxiom folgt hieraus: $v_0 = v_1$. QED

Zu diesem Beweis ist folgendes zu bemerken: Das Argument vollzieht sich nach festen Beweisfiguren: Um eine Allaussage zu zeigen, „betrachtet“ man beliebige Objekte. Gegebene Allaussagen werden auf betrachtete Objekte bezogen. Weiter werden aussagenlogische Schlüsse wie

aus $(A \rightarrow B)$ und A folgt B

eingesetzt. Die Beweismethode ist formal, und kann mit genügendem Aufwand strikt formal gemacht werden, so dass von einem gegebenen mathematischen Text wie oben durch syntaktische Überprüfung entschieden werden kann, ob dieser ein Beweis ist.
Die benutzten Beweisfiguren entsprechen den in der Mathematik gebräuchlichen Argumentationsformen, wir werden daher in Zukunft wie gewohnt argumentieren. Dies bedeutet, dass man argumentiert, als hätte man die Gesamtheit aller Mengen konkret vorliegen.

3.3 Das Paarmengenaxiom

(Paar): $\forall v_0 \forall v_1 \exists v_2 \forall v_3 (v_3 \in v_2 \leftrightarrow (v_3 = v_0 \vee v_3 = v_1))$.

Für alle v_0 und v_1 existiert ein v_2, dessen Elemente genau v_0 und v_1 sind. Die Eigenschaft, dass v_2 aus den Elemente v_0 und v_1 aufgebaut ist, kann man durch Einführung von Mengenbildungstermen ausdrücken:

$$v_2 = \{v_0, v_1\}.$$

Diese Formel ist eine Abkürzung und suggestive Schreibweise von $\forall v_3(v_3 \in v_2 \leftrightarrow (v_3 = v_0 \vee v_3 = v_1))$.
Wir werden eine Fülle solcher abkürzenden Schreibweisen einführen. *Jede* mathematische Definition kann in die Sprache der Mengenlehre übersetzt werden, die gewöhnliche Schreibweise kann dann als suggestive und gewohnte Abkürzung für eine Formel der Mengenlehre angesehen werden. Mit der eingeführten Abkürzung schreiben wir das Paarmengenaxiom suggestiv als: $\forall v_0 \forall v_1 \exists v_2\ v_2 = \{v_0, v_1\}$.
Man beachte, dass die Termschreibweise wegen des Extensionalitätsaxioms mit dem gewohnten Umgang mit Termen kompatibel ist:

Lemma 3.3 $\forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 \forall v_3\ ((v_2 = \{v_0, v_1\} \wedge v_3 = \{v_0, v_1\}) \rightarrow v_2 = v_3)$.

Die Formelbestandteile mit den $\{.,.\}$-Termen werden als Abkürzungen benutzt. Die Aussage folgt sofort aus dem Extensionalitätsaxiom, da v_2 und v_3 dieselben Elemente haben. Der Term $\{v_0, v_1\}$ kann als Abkürzungsteil verstanden werden, der innerhalb einer $\in$-Formel geeignet zu expandieren ist. Diese Expansion ist durch die obige Formel $(v_3 = v_0 \vee v_3 = v_1)$ bestimmt. $\{v_0, v_1\}$ „besteht“ aus allen Mengen v_3, die die Formel $(v_3 = v_0 \vee v_3 = v_1)$ erfüllen. Dies lässt sich durch $\{v_0, v_1\} = \{v_3 | v_3 = v_0 \vee v_3 = v_1\}$ ausdrücken.
$\{v_0, v_1\}$ steht also für den **Klassenterm** $\{v_3 | v_3 = v_0 \vee v_3 = v_1\}$.

Definition 3.4 Ein **Klassenterm** ist ein Ausdruck der Form $\{v_n|\varphi\}$, wobei φ eine $\in$-Formel ist. Ein $\in$**-Term** oder einfach **Term** ist eine Variable oder ein Klassenterm.

Wir führen weitere Klassenterme ein und geben einigen von ihnen suggestive Abkürzungen.
$\{v_0\} = \{v_1|v_1 = v_0\}$ ist die **Einermenge** mit dem einzigen Element v_0. Aus dem Paarmengenaxiom folgt sofort die Existenz von Einermengen:

Lemma 3.5 $\forall v_0 \exists v_1\ v_1 = \{v_0\}$.

Das Zusammenfassen zu Paaren ist eine elementare Operation, ohne die Mathematik in der gewohnten Form nicht denkbar ist. Das **ungeordnete Paar** $\{v_0, v_1\}$ hat allerdings den Nachteil, dass (unter den bisherigen Axiomen) gilt: $\{v_0, v_1\} = \{v_1, v_0\}$. Es ist nötig, ein **geordnetes Paar** (v_0, v_1) zweier Objekte einzuführen, bei dem es auf die Reihenfolge ankommt. Die Asymmetrie zwischen v_0 und v_1 lässt sich auf verschiedene Art herstellen, wir benutzen das gebräuchliche Paar nach Kuratowski (und Wiener).

Definition 3.6 $(v_0, v_1) = \{\{v_0\}, \{v_0, v_1\}\}$ ist das **geordnete Paar** von v_0 und v_1.

Man beachte, dass hier Klassenterme in Klassenterme eingesetzt werden. Die Auflösung der iterierten Klassenterme ergibt sich auf kanonische Art, wie wir am folgenden Beispiel sehen:

Lemma 3.7 $\forall v_0 \forall v_1 \exists v_2\ v_2 = (v_0, v_1)$.

Beweis. : Betrachte v_0 und v_1. Nach dem Paarmengenaxiom wähle v_3 und v_4 mit $v_3 = \{v_0, v_1\}$ und $v_4 = \{v_0\}$. Nach dem Paarmengenaxiom wähle v_2 mit $v_2 = \{v_4, v_3\}$. Wir zeigen, dass $v_2 = (v_0, v_1)$: Dieses ist eine Abkürzung für: $\forall v_5\ (v_5 \in v_2 \leftrightarrow (v_5 = \{v_0\} \vee v_5 = \{v_0, v_1\})$. Die linke Seite kann äquivalent umgeformt werden: $\forall v_5\ ((v_5 = v_4 \vee v_5 = v_3) \leftrightarrow (v_5 = \{v_0\} \vee v_5 = \{v_0, v_1\})$. Dies ist wahr nach Wahl von v_4 und v_3. QED

Noch wichtiger ist:

Satz 3.8 *Das* Kuratowski*-Paar hat die Grundeigenschaft geordneter Paare:* $(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$ *impliziert* $x_0 = x_1$ *und* $y_0 = y_1$.

Beweis. Gelte $(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$, d.h.,

(1) $\{\{x_0\}, \{x_0, y_0\}\} = \{\{x_1\}, \{x_1, y_1\}\}$.

Wir unterscheiden zwei Fälle:
Fall 1. $x_0 = y_0$. Dann ist nach **(Ext)** $\{\{x_0\}, \{x_0, y_0\}\} = \{\{x_0\}\}$, und (1) wird zu

(2) $\{\{x_0\}\} = \{\{x_1\}, \{x_1, y_1\}\}$.

Durch Anwendungen von **(Ext)** ergibt sich hieraus $\{x_0\} = \{x_1\}$, also $x_0 = x_1$, sowie $\{x_0\} = \{x_1, y_1\}$, also $x_0 = x_1$ und $x_0 = y_1$. Damit ist $x_0 = x_1$ und $y_0 = y_1$ nachgewiesen.
Fall 2. $x_0 \neq y_0$. Nach **(Ext)** folgen aus (1)

(3) $\{x_0\} = \{x_1\}$ oder $\{x_0\} = \{x_1, y_1\}$.

sowie

(4) $\{x_0, y_0\} = \{x_1\}$ oder $\{x_0, y_0\} = \{x_1, y_1\}$.

Aus jeder der beiden Identitäten von (3) folgt $x_0 = x_1$ wegen **(Ext)**, so daß $x_0 = x_1$ nachgewiesen ist. Betrachte nun (4). Wäre hier die erste Identität wahr, so hätten wir nach **(Ext)** $x_0 = x_1 = y_0$, was der Voraussetzung von Fall 2 widerspricht. Somit ist in (4) die zweite Identität wahr; unter Einbeziehung des für Fall 2 bereits gezeigten ergibt sich dann $\{x_0, y_0\} = \{x_0, y_1\}$. Da nach Annahme $x_0 \neq y_0$ gilt, folgt hieraus nach **(Ext)** $y_0 = y_1$ und Fall 2 ist abgeschlossen. Damit ist alles gezeigt. QED

Mit Hilfe geordneter Paare kann man nun in gewohnter Weise über **Relationen** und **Funktionen** sprechen. Hierbei ist zu unterscheiden zwischen *Mengen*, die Relationen oder Funktionen sind, und *Klassentermen*, die Relationen und Funktionen sind.

Definition 3.9 Ein Klassenterm R ist eine **Relation**, falls sämtliche Elemente von R geordnete Paare sind. Formal: $\mathrm{Rel}(R) :\equiv R \subseteq V \times V$. Statt $(x, y) \in R$ schreiben wir meist Rxy oder auch xRy. Ist A ein Klassenterm und $R \subseteq A \times A$, so sagen wir, R ist eine **Relation über** A.

Man beachte, dass es sich hier um ein unendliches **Schema** von Definitionen handelt. Zu jedem Klassenterm der Form $R = \{v_0|\phi\}$ haben wir eine **Instanz** der obigen Liste von Definitionen vereinbart.

Definition 3.10 Seien R und S sowie A Klassenterme.

(a) Der **Definitionsbereich** oder auch (engl.) **Domain** von R ist $\mathrm{dom}(R) :\equiv \{x \mid \exists y\, xRy\}$.

(b) Der **Wertebereich** oder auch (engl.) **Range** von R ist $\mathrm{ran}(R) :\equiv \{y \mid \exists x\, xRy\}$.

(c) Das **Feld** von R ist $\mathrm{field}(R) :\equiv \mathrm{dom}(R) \cup \mathrm{ran}(R)$.

(d) Die **Einschränkung** von R auf A ist $R \restriction A :\equiv \{(x, y) \mid x \in A \wedge xRy\}$.

(e) Das **Bild** von A unter R ist $R[A] :\equiv R''A :\equiv \{y \mid \exists x\, x \in A \wedge xRy\}$.

(f) Das **Urbild** von A unter R ist $R^{-1}[A] :\equiv \{x \mid \exists y\, y \in A \wedge xRy\}$.

(g) Die **Komposition** von S und R ist $S \circ R :\equiv \{(x, z) \mid \exists y\, xRy \wedge ySz\}$.[1]

(h) Die **Inverse** oder **Umkehrrelation** von R ist $R^{-1} :\equiv \{(y, x) \mid xRy\}$.

Relationen können verschiedene vom Standpunkt der Mathematik aus interessante Eigenschaften haben. Einige der wichtigsten sind in der nachfolgenden Definition zusammengestellt.

Definition 3.11 Sei R ein Klassenterm.

[1] Die Definition ist so gewählt, daß wir in dem Fall, daß S und R Funktionen sind, die übliche Schreibweise für die Komposition von Funktionen erhalten.

(a) Die $\in$-Formel $\mathrm{Ref}(R) :\equiv \mathrm{Rel}(R) \wedge \forall x \in \mathrm{field}(R)\; xRx$ bedeutet, R ist eine **reflexive** Relation.

(b) Die $\in$-Formel $\mathrm{Irref}(R) :\equiv \mathrm{Rel}(R) \wedge \forall x \in \mathrm{field}(R) \neg xRx$ bedeutet, R ist eine **irreflexive** Relation.

(c) Die $\in$-Formel $\mathrm{Sym}(R) :\equiv \mathrm{Rel}(R) \wedge \forall x, y\,(xRy \to yRx)$ bedeutet, R ist eine **symmetrische** Relation.

(d) Die $\in$-Formel $\mathrm{Antisym}(R) :\equiv \mathrm{Rel}(R) \wedge \forall x, y\,(xRy \wedge yRx \to x = y)$ bedeutet, R ist eine **antisymmetrische** Relation.

(e) Die $\in$-Formel $\mathrm{Tra}(R) :\equiv \mathrm{Rel}(R) \wedge \forall x, y, z\,(xRy \wedge yRz \to xRz)$ bedeutet, R ist eine **transitive** Relation.

(f) Die $\in$-Formel $\mathrm{Con}(R) :\equiv \mathrm{Rel}(R) \wedge \forall x, y((x \in \mathrm{field}(R) \wedge y \in \mathrm{field}(R)) \to (xRy \vee yRx \vee x = y))$ bedeutet, R ist eine **konnexe** Relation.

Wir kennzeichnen gewisse Typen von Relationen:

Definition 3.12 Sei R ein Klassenterm.

(a) Die $\in$-Formel $\mathrm{Eq}(R) :\equiv \mathrm{Ref}(R) \wedge \mathrm{Sym}(R) \wedge \mathrm{Tra}(R)$ bedeutet, R ist eine **Äquivalenzrelation**.

(b) Mit $[y]_R :\equiv \{x \mid xRy\}$ bezeichnen wir die **Äquivalenzklasse** von y bezüglich R.

Bemerkung 3.13 Im allgemeinen ist die Äquivalenzklasse einer Menge y bezüglich der Relation R eine echte Klasse. Unter den in 3.1 angegebenen Erweiterungen **ZF** bzw. **ZFC** von **EML** treten Ausnahmen etwa dann auf, wenn $\mathrm{dom}(R) \in V$ gilt. Im Regelfall ist aber $[y]_R$ als echte Klasse anzusehen; wir können deshalb nicht a priori die „Klasse aller Äquivalenzklassen“ bilden, also keine Faktorisierung nach R durchführen, da die Bildung von „Klassen von Klassen“ zu Widersprüchen führen kann. Um dennoch eine adäquate Darstellung der „Familie“ der Äquivalenzklassen zu bekommen, werden wir auf der Basis des oben bereits erwähnten Systems **ZFC** aus jeder Äquivalenzklasse einen Repräsentanten „auswählen“ (hierzu benötigen wir das „Auswahlaxiom“, das wir ausführlich studieren werden) und dann die Klasse all dieser Repräsentanten bilden. Eine andere Möglichkeit besteht darin, jede Äquivalenzklasse soweit zu verkleinern, bis sie eine Menge ist (wir werden in 5.14 sehen, daß echte Klassen in gewisser Weise zu groß geratene Mengen sind), und die Klasse all dieser „verkleinerten“ Äquivalenzklassen zu betrachten.

Definition 3.14 Sei R ein Klassenterm.

(a) Die $\in$-Formel $\mathrm{wPO}(R) :\equiv \mathrm{Ref}(R) \wedge \mathrm{Tra}(R)$ bedeutet, R ist eine **schwache partielle Ordnung**.

(b) Die $\in$-Formel $\mathrm{PO}(R) :\equiv \mathrm{wPO}(R) \wedge \mathrm{Antisym}(R)$ bedeutet, R ist eine **partielle Ordnung**.

(c) Die $\in$-Formel $\mathrm{LO}(R) :\equiv \mathrm{PO}(R) \wedge \mathrm{Con}(R)$ bedeutet, R ist eine **lineare Ordnung**.

(d) Sei A ein Klassenterm. Wir sagen, R ist eine schwache partielle, partielle bzw. lineare Ordnung **auf** A, falls $\mathrm{field}(R) = A$ gilt. Wir setzen dementsprechend

$\mathrm{wPO}(A, R) :\equiv \mathrm{wPO}(R) \wedge \mathrm{field}(R) = A$,
$\mathrm{PO}(A, R) :\equiv \mathrm{PO}(R) \wedge \mathrm{field}(R) = A$ und
$\mathrm{LO}(A, R) :\equiv \mathrm{LO}(R) \wedge \mathrm{field}(R) = A$.

Definition 3.15 Seien R und A sowie B Klassenterme, so daß R eine schwache partielle Ordnung auf A ist und $B \subseteq A$ gilt.

(a) Die Menge x heißt R-**minimales Element** von B, falls $x \in B \wedge \forall b \in B\ (bRx \to b = x)$ gilt. Sie heißt R-**maximales Element** von B, falls $x \in B \wedge \forall b \in B\ (xRb \to x = b)$ gilt.

(b) Die Menge x heißt R-**kleinstes Element** von B, falls $x \in B \wedge \forall b \in B\ xRb$ gilt. Sie heißt R-**größtes Element** von B, falls $x \in B \wedge \forall b \in B\ bRx$ gilt.

(c) Die Menge x heißt **untere** R-**Schranke** von B, falls $x \in A \wedge \forall b \in B\ xRb$ gilt. Sie heißt **obere** R-**Schranke** von B, falls $x \in A \wedge \forall b \in B\ bRx$ gilt.

(d) Eine Menge heißt R-**Infimum** von B und wird mit $\inf_R B$ bezeichnet, falls sie R-größtes Element von $\{s \mid s \text{ ist untere } R\text{-Schranke von } B\}$ ist. Eine Menge heißt R-**Supremum** von B und wird mit $\sup_R B$ bezeichnet, falls sie R-kleinstes Element von $\{s \mid s \text{ ist obere } R\text{-Schranke von } B\}$ ist.

Wenn der Bezug zu R aus dem Zusammenhang klar ist, verzichten wir in den eingeführten Begriffen auf die explizite Nennung von R.

Definition 3.16 Seien A sowie B und R Klassenterme, R sei eine partielle Ordnung auf A und $B \subseteq A$. Wir sagen, B ist eine R-**Kette**, falls $\forall x, y((x \in B \wedge y \in B) \to (xRy \vee yRx \vee x = y))$ gilt. Hat jede R-Kette eine obere Schranke, so sagen wir, A ist durch R **induktiv geordnet**.

Definition 3.17 Seien R sowie A und B Klassenterme, so daß R eine schwache partielle Ordnung auf A ist und $B \subseteq A$ gilt. Hat die Klasse $\{s \mid s \in A \setminus B \wedge \forall b \in B\ bRs\}$ ein kleinstes Element x, so bezeichnen wir dies mit $\mathrm{lub}\, B$ und nennen es das **least upper bound** von B.

Definition 3.18 Sei R ein Klassenterm.

(a) Die $\in$-Formel $\mathrm{SLO}(R) :\equiv \mathrm{Irref}(R) \wedge \mathrm{Tra}(R) \wedge \mathrm{Con}(R)$ bedeutet, R ist **strikte lineare Ordnung**.

(b) Sei A ein Klassenterm. Wir sagen, R ist strikte lineare Ordnung **auf** A, falls R eine strikte lineare Ordnung mit $\mathrm{field}(R) = A$ ist. Dementsprechend setzen wir $\mathrm{SLO}(A, R) :\equiv \mathrm{SLO}(R) \wedge \mathrm{field}(R) = A$.

Wir wenden uns nun dem wohl wichtigsten Begriff der neueren Mathematik zu, dem Begriff der Funktion.

Definition 3.19 Sei F ein Klassenterm. Die $\in$-Formel $\mathrm{Fun}(F) :\equiv \mathrm{Rel}(F) \wedge \forall x, y_1, y_2((xFy_1 \wedge xFy_2) \to y_1 = y_2)$ bedeutet, F ist eine **Funktion** oder **funktional**.

Wir definieren folgende, mit Funktionen verbundene Begriffe und Schreibweisen.

Definition 3.20 Seien F sowie A und B Klassenterme.

(a) Die $\in$-Formel $F\colon A \to B \;:\equiv\; \mathrm{Fun}(F) \wedge \mathrm{dom}(F) = A \wedge \mathrm{ran}(F) \subseteq B$ bedeutet, F **bildet** A **in** B **ab**.

(b) Die $\in$-Formel $F\colon A \supset\!\!\to B \;:\equiv\; \mathrm{Fun}(F) \wedge \mathrm{dom}(F) \subseteq A \wedge \mathrm{ran}(F) \subseteq B$ bedeutet, F ist eine **partielle Funktion** von A in B.

(c) $F\colon A \xrightarrow{surj.} B \;:\equiv\; F\colon A \to B \wedge \mathrm{ran}(F) = B$ bedeutet, F ist eine **Surjektion** oder auch **surjektive Funktion** von A auf B.

(d) Die $\in$-Formel $F\colon A \xrightarrow{inj.} B \;:\equiv\; F\colon A \to B \wedge \forall x_1, x_2 \in A \forall y((x_1 F y \wedge x_2 F y) \to x_1 = x_2)$ bedeutet, F ist eine **Injektion** oder auch **injektive Funktion** von A in B.

(e) Die $\in$-Formel $F\colon A \leftrightarrow B \;:\equiv\; F\colon A \xrightarrow{bij.} B \;:\equiv\; F\colon A \xrightarrow{inj.} B \wedge F\colon A \xrightarrow{surj.} B$ bedeutet, F ist eine **Bijektion** oder auch **bijektive Funktion** von A in B.

(f) Der Klassenterm ${}^{A}B \;:\equiv\; \{f \mid f\colon A \to B\}$ definiert die Klasse aller Funktionen von A nach B, die Mengen sind.

3.4 Das Vereinigungsaxiom

($\bigcup$-Ax): $\forall v_0 \exists v_1 \forall v_2 (v_2 \in v_1 \leftrightarrow \exists v_3 (v_3 \in v_0 \wedge v_2 \in v_3))$.

Auch hier wird die Existenz einer gewissen definierbaren Mengen ausgesagt, die wir durch folgenden Klassenterm erfassen: $\bigcup v_0 = \{v_2 | \exists v_3 (v_3 \in v_0 \wedge v_2 \in v_3)\}$ ist die **Vereinigung** von v_0. Das Axiom besagt dann, dass $\forall v_0 \exists v_1\ v_1 = \bigcup v_0$. In die Vereinigung von v_0 werden also alle Elemente von Elementen von v_0 aufgenommen. Die folgende Schreibweise suggeriert die Vereinigung einer Familie von Mengen, führt aber zum selben Ergebnis: $\bigcup_{v_3 \in v_0} v_3 = \bigcup v_0$.
Der Zusammenhang zur zweistelligen Vereinigungsoperation ist gegeben durch: $x \cup y = \bigcup\{x, y\}$. Dabei benutzen wir ab jetzt Buchstaben $a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots$ als Bezeichnung für geeignet gewählte Variablen $v_0, v_1, \ldots$.
Wir führen weitere Klassenterme zur Vereinfachung der Notationen ein:

Definition 3.21 Für Variablen x, y und z definieren wir:

(a) $\emptyset \;:\equiv\; \{x \mid x \neq x\}$ ist die **leere Klasse** bzw. **leere Menge**.

(b) $x \subseteq y \;:\equiv\; \forall z (z \in x \to z \in y)$ bedeutet, dass x eine **Teilmenge** von y ist.

(c) $\{x\} \;:\equiv\; \{y \mid y = x\}$ ist die **Einermenge** x.

(d) $\{x, y\} \;:\equiv\; \{z \mid z = x \vee z = y\}$ ist die **Paarmenge** von x und y.

(e) $x \cap y \;:\equiv\; \{z \mid z \in x \wedge z \in y\}$ ist der **Schnitt** von x und y.

(f) $x \cup y \;:\equiv\; \{z \mid z \in x \vee z \in y\}$ ist die **Vereinigung** von x und y.

(g) $x \setminus y \;:\equiv\; \{z \mid z \in x \wedge z \notin y\}$ ist die **Differenz** von x und y.

(h) $\overline{x} \;:\equiv\; \{z \mid z \notin x\}$ ist das **Komplement** von x.

(i) $\bigcap x \;:\equiv\; \{z \mid \forall y\ y \in x \to z \in y\}$ ist der **Schnitt** von x.

(j) $\bigcup x \;:\equiv\; \{z \mid \exists y\ y \in x \wedge z \in y\}$ ist die **Vereinigung** von x.

(k) $\mathcal{P}(x) :\equiv \{z \mid z \subseteq x\}$ ist die **Potenzklasse** von x.

(l) $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} :\equiv \{z \mid z = x_1 \vee z = x_2 \vee \ldots \vee z = x_n\}$.

(m) $V :\equiv \{x \mid x = x\}$ ist die **Klasse aller Mengen** oder die **Allklasse** oder das **Universum**.

(n) x **ist eine Menge** $:\equiv x \in V$.

Indem man in den obigen Definitionen die freien Variablen durch Klassenterme ersetzt, erhält man Definitionen für neue Klassenterme.

Unter Benutzung der Allklasse vereinfacht sich die Schreibweise der Axiome weiter:

Bemerkung 3.22 Das Mengenexistenzaxiom **(Ex)** ist äquivalent zu $\emptyset \in V$.
Das Paarmengenaxiom **(Paar)** ist äquivalent zu $\forall a, b \ \{a, b\} \in V$.
Das Vereinigungsaxiom **($\bigcup$-Ax)** ist äquivalent zu $\forall a \ \bigcup a \in V$.

Mit Paarmengen- und Vereinigungsaxiom gelangen wir zu beliebig großen endlichen Mengen: $\forall v_0, \ldots, v_{n-1} \ \{v_0, \ldots, v_{n-1}\} \in V$. Diese Aussagen lassen sich durch vollständige Induktion über n beweisen: $\{v_0, \ldots, v_{n-1}\} = \{v_0, \ldots, v_{n-2}\} \cup \{v_{n-1}\}$. Die Induktion geschieht auf der Ebene der formalen Sprache und nicht innerhalb des Axiomensystems (Metatheoretische Induktion).

3.5 Das Aussonderungsschema

(Aus): Für jede $\in$-Formel $\varphi(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ postuliere:
$\forall v_1 \ldots \forall v_n \forall v_{n+1} \exists v_{n+2} \forall v_0 (v_0 \in v_{n+2} \leftrightarrow (v_0 \in v_{n+1} \wedge \varphi))$.
In Worten: Zu jeder Menge v_{n+1} und jeder mathematischen Eigenschaft φ existiert eine Menge v_{n+2}, die genau diejenigen Elemente von v_{n+1} enthält, die der Eigenschaft φ genügen.

Dies ist das erste von mehreren **Axiomen-Schemata**. Für jedes φ von geeignetem Typ wird eine Mengenexistenz gefordert. Mit Klassentermen kann man das Schema schreiben als:

> Für jede $\in$-Formel $\varphi(v_0, v_1, \ldots, v_n)$:
>
> $\forall v_1 \ldots \forall v_n \forall v_{n+1} \exists v_{n+2} \ v_{n+2} = \{v_0 | v_0 \in v_{n+1} \wedge \varphi\}$.
>
> Oder: Für jede $\in$-Formel $\varphi(v_0, v_1, \ldots, v_n)$:
>
> $\forall v_1 \ldots \forall v_n \forall v_{n+1} \ \{v_0 | v_0 \in v_{n+1} \wedge \varphi\} \in V$.
>
> Oder: Für jeden Klassenterm A: $\forall v_{n+1} \ v_{n+1} \cap A \in V$.
>
> Oder: Für jeden Klassenterm A: $\forall x \ x \cap A \in V$.

Man beachte, dass hier die initialen Allquantoren $\forall v_1, v_1, \ldots, v_n$ fortgelassen wurden.
Das Aussonderungsschema ist eine abgeschwächte Version eines Mengenkonstruktionsprinzips, das implizit in der frühen Mengenlehre angewendet wurde: Das bei FREGE formulierte starke **Komprehensionsschema** ist in unserer Notation: Für jeden Klassenterm

A: $A \in V$. Dieses Axiom würde aber sofort zu der RUSSELschen Antinomie führen, denn es widerspricht folgendem Satz:

Lemma 3.23 $\{x|x \notin x\} \notin V$.

BEWEIS. : Angenommen $\{x|x \notin x\} \in V$. Wähle y mit $y = \{x|x \notin x\}$. Dann ist $y \in y \leftrightarrow y \in \{x|x \notin x\} \leftrightarrow y \notin y$. Widerspruch. QED

Das volle Komprehensionsschema ist also soweit abzuschwächen, dass Klassen der Form $\{x|x \notin x\}$ nicht mehr durch Mengen in V realisiert werden. Die entscheidende Beobachtung von ZERMELO war, dass die meisten Mengenbildungen Aussonderungen aus bereits nachgewiesenen Mengen sind. Das Axiomensystem wird daher so festgelegt, dass essentielle Mengen wie die Menge der natürlichen Zahlen oder die Menge der reellen Zahlen gebildet werden können, und dass man volle Aussonderung aus bereits existierenden Mengen zulässt. Die beiden nächsten Axiome haben mit der Bereitstellung der erwähnten Zahlmengen zu tun.

3.6 Potenzmengenaxiom

(Pot): In der Klassentermschreibweise ist das $\forall a \ \mathcal{P}(a) \in V$, wobei $\mathcal{P}(a) = \{b|b \subseteq a\}$.

Dieses Axiom führt zu größeren Kardinalitäten, wie wir im Grunde schon bei der Überabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen gesehen haben. Das Argument wird noch deutlicher im allgemeinen Kontext, es ähnelt dem obigen Argument über die RUSSELsche Antinomie:

Lemma 3.24 *Für alle a gibt es keine surjektive Abbildung $f : a \to \mathcal{P}(a)$.*

BEWEIS. Angenommen,$f : a \to \mathcal{P}(a)$ sei eine surjektive Abbildung. Nach dem Aussonderungsschema wähle b mit $b = \{x|x \in a \wedge x \notin f(x)\}$. $b \subseteq a$ und $b \in \mathcal{P}(a)$. Wegen der Surjektivität von f wähle ein $x \in a$ mit $f(x) = b$. Dann ist $x \in b \leftrightarrow x \notin f(x) \leftrightarrow x \notin b$. Widerspruch. QED

Da man anscheinend die Menge a durch $x \mapsto \{x\}$ in $\mathcal{P}(a)$ einbetten kann, hat die Potenzmenge von a eine echt größere Kardinalität als a. Die Potenzmenge einer gegebenen endlichen Menge $\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ kann man „konkret“ durch Angabe aller 2^n Teilmengen konstruieren. Das Potenzial des Potenzmengenaxioms wie auch der anderen starken mengentheoretischen Axiome entfaltet sich erst im Zusammenhang mit unendlichen Mengen. Zusammen mit dem Aussonderungsschema kann man mit dem Potenzmengenaxiom verschiedene Mengenexistenzen zeigen wie z.B. die Existenz von kartesischen Produkten: Es sei $a \times b = \{z|\exists x, y\ (x \in a \wedge y \in b \wedge z = (x, y))\}$ das **kartesische Produkt** von a und b. Für $(x, y) \in a \times b$ gilt: $x \in a,\ y \in b,\ \{x\} \subseteq a \cup b,\ \{x, y\} \subseteq a \cup b,\ \{x\} \in \mathcal{P}(a \cup b),\ \{x, y\} \in \mathcal{P}(a \cup b),\ (x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq \mathcal{P}(a \cup b),\ (x, y) \in \mathcal{P}\,\mathcal{P}(a \cup b)$. Damit ist $a \times b \subseteq \mathcal{P}\,\mathcal{P}(a \cup b)$. Nach dem Aussonderungsschema angewendet auf die Obermenge $\mathcal{P}\,\mathcal{P}(a \cup b)$ existiert dann $a \times b$ als Menge:

Lemma 3.25 $\forall a, b \; a \times b \in V$.

3.7 Das Unendlichkeitsaxiom

(Inf): $\exists v_0(\exists v_1(v_1 \in v_0 \wedge \forall v_2 \neg v_2 \in v_1) \wedge$
$\forall v_1 \exists v_2(v_1 \in v_0 \longrightarrow (v_2 \in v_0 \wedge \forall v_3(v_3 \in v_2 \leftrightarrow (v_3 \in v_1 \vee v_3 = v_1)))))$.
In Worten: Es gibt eine Menge, die eine Menge ohne Element enthält und unter der Operation $x \mapsto x \cup \{x\}$ abgeschlossen ist.

Wir wollen dieses Axiom mit Hilfe von Klassentermen in eine leichter verständliche Form bringen. Dabei lassen wir uns von dem Gedanken leiten, dass die Menge der natürlichen Zahlen eine Menge ist, die das Unendlichkeitsaxiom bezeugt. Wir führen entsprechende Abkürzungen und Klassenterme ein:

Definition 3.26

$0 = \emptyset$ ist die Zahl **Null**, $1 = \{0\}$ ist die Zahl **Eins**, $2 = \{0, 1\}$ ist die Zahl **Zwei**, usw.

$x + 1 = x \cup \{x\}$ ist der **Nachfolger** von x.

Damit wird das Unendlichkeitsaxiom äquivalent zu:
$\exists x \; (0 \in x \wedge \forall n(n \in x \rightarrow n + 1 \in x))$.
Man kann dann durch metatheoretische Induktion zeigen, dass die Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ Elemente der hier postulierten Menge sind. Das Axiom fordert nicht die Existenz einer eindeutig bestimmten Menge. Mit etwas mehr Aufwand können wir aber später die eindeutig bestimmte Menge der natürlichen Zahlen einführen. Die obige Definition wird bei der mengentheoretischen Definition von Zahlbereichen weiter ausgeführt werden.
Durch Hintereinanderschaltung des Unendlichkeitsaxioms und des Potenzmengenaxioms gelangen wir zu überabzählbaren Mengen, wobei wir noch die geeigneten unendlichen Größenbegriffe aufbauen müssen.

3.8 Das Ersetzungsschema

Das Ersetzungsschema kann ähnlich wie das Aussonderungsschema auf eine prägnante Form mit Klassentermen gebracht werden:

Lemma 3.27 *Auf der Basis von* **(Ex)**, **(Ext)**, **(Paar)** *und* **($\bigcup$-Ax)** *sind die folgenden beiden Schemata gleichwertig:*

(i) **(Ers)**.
(ii) *Für jeden Klassenterm F gilt die Aussage* $\forall a(\mathrm{Fun}(F) \rightarrow F[a] \in V)$.

Satz 3.28 *Das Aussonderungsschema folgt aus dem Ersetzungsschema.*

Denn im Wesentlichen kann man die Menge $x \cap A$ als Bild $x \cap A = F[x]$ erhalten, wobei die Funktion $F : x \rightarrow x$ definiert ist durch: $F(u) = u$, falls $u \in A$, und $F(u) = a_0$, falls $u \notin A$, wobei a_0 ein fest gewähltes Element von $x \cap A$ ist. Das Aussonderungsschema belassen wir dennoch in unserem System der Mengenaxiome, da wir bei späteren axiomatischen Betrachtungen teilweise nur Aussonderung ohne Ersetzung voraussetzen wollen. Mit dem Ersetzungsschema kann man weitere Mengenexistenzen im Umfeld von Funktionen zeigen.

Definition 3.29

Der Klassenterm ${}^{A}B :\equiv \{f \mid f\colon A \to B\}$ definiert die Klasse aller Mengen-Funktionen von A nach B.

$\bigtimes_{i\in I} F(i) :\equiv \{f \mid f\colon I \to V \wedge \forall i \in I\ f(i) \in F(i)\}$.

Lemma 3.30 *Sei $x \in V$ und F ein Klassenterm mit $F\colon x \to V$. Dann gilt $F \in V$. Gilt* **(Pot)**, *so ist auch $\bigtimes_{i\in x} F(i) \in V$.*

Beweis. Wegen $F = \{(i, F(i)) \mid i \in x\} = G[x]$, wobei $G :\equiv \{(i,(i,F(i))) \mid i \in x\} \cup \{(i,i) \mid i \in V \setminus x\}$ funktional ist, folgt $F \in V$ aus **(Ers)**. Insbesondere ist dann auch $\mathrm{ran}(F) \in V$ nach **??**. Da

$$\bigtimes_{i\in x} F(i) = \{f \mid f\colon x \to V \wedge \forall i \in x\ f(i) \in F(i)\} \subseteq {}^{x}(\bigcup \mathrm{ran}(F)),$$

gilt und der ganz rechts stehende Klassenterm in V ist, folgt $\bigtimes_{i\in x} F(i) \in V$ aus **(Aus)**.
QED

3.9 Das Fundierungsschema

Das Fundierungsschema geht auf Mirimanoff (1917) zurück. Es ist unter allen **ZFC**-Axiomen dasjenige, das im mathematischen Alltag am seltensten verwendet wird. Gleichwohl hat es weitreichende und wichtige Konsequenzen, auf die wir im Folgenden kurz eingehen wollen. Zuerst geben wir unter Verwendung der Klassentermschreibweise eine bzgl. der anderen Axiome äquivalente Charakterisierung von **(Fund)** an.

Lemma 3.31 *Unter* **(Ex)**, **(Ext)**, **(Paar)** *und* **($\bigcup$-Ax)** *sind äquivalent:*

(i) **(Fund)**.

(ii) Für jeden Klassenterm $A \equiv \{x \mid \varphi(x, \vec{w})\}$ gilt die Aussage $\forall \vec{w}(A \neq \emptyset \to \exists x(x \in A \wedge A \cap x = \emptyset))$.

Das Fundierungsschema entspricht intuitiv einem hierarchisch aufgebauten Mengenuniversum. Die Elemente einer Menge erscheinen vor der Menge selbst, daher sollte es kein x mit $x \in x$ geben. Das Fundierungsschema schließt jede Art von $\in$-Zykeln aus:

Satz 3.32 *Für Variablen $x_1, \ldots, x_n$ n gilt: $\neg(x_1 \in x_2 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} \in x_n \wedge x_n \in x_1)$. Speziell für $n = 1$: $x_1 \notin x_1$.*

Beweis. Angenommen,

(1) $\quad x_1 \in x_2 \in \cdots \in x_n \in x_1.$

Durch $A :\equiv \{x_1, \dots, x_n\}$ wird ein Klassenterm A gegeben und es ist $A \neq \emptyset$. Sei gemäß **(Fund)** x mit $x \in A$ und $A \cap x = \emptyset$ gewählt. Dann ist $x = x_k$ für ein k mit $1 \leq k \leq n$. Im Fall $k > 1$ ist aber $x_{k-1} \in A \cap x$ und im Fall $k = 1$ ist $x_n \in A \cap x$. Also in jedem Fall $A \cap x \neq \emptyset$, Widerspruch. QED

Unser Aufbau der Theorie der Ordinalzahlen im nächsten Kapitel beruht auf dem Fundierungsschema.

3.10 Das Auswahlaxiom.

Das Axiom **(AC)** gehört zu Zermelos 1908 aufgestellten Axiomensystem; mit seiner Hilfe hat er den Cantorschen Wohlordnungssatz bewiesen.

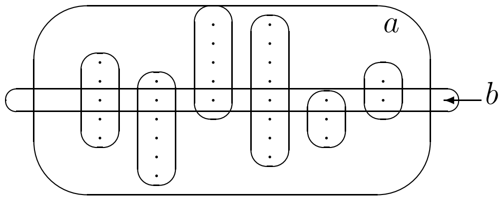


Abbildung 1: *b* ist eine Auswahlmenge für *a*.

Bevor wir die Bedeutung des Auswahlaxioms in der Mathematik kommentieren, beweisen wir zunächst drei äquivalente Darstellungen. (In 6.1 werden wir weitere Äquivalenzen formulieren und beweisen.) Die erste Charakterisierung vereinfacht die Formulierung von **(AC)** mit Hilfe der Klassentermschreibweise.

Lemma 3.33 *Unter* **(Ex)**, **(Ext)**, **(Paar)** *und* **($\bigcup$-Ax)** *sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) **(AC)**.

(ii) $\forall a \exists b((\emptyset \notin a \wedge \forall x_1, x_2((x_1 \in a \wedge x_2 \in a \wedge x_1 \neq x_2) \to x_1 \cap x_2 = \emptyset))$
$\longrightarrow \forall x(x \in a \to \exists y\, b \cap x = \{y\}))$.

Tiefliegender ist der im folgenden Satz aufgezeigte Zusammenhang:

Satz 3.34 *Unter den eingeführten Axiomen bis auf das Auswahlaxiom sind äquivalent:*

(i) **(AC)**.

(ii) $\forall r \exists b\,(\mathrm{Eq}(r) \longrightarrow (\forall x, y((x \in b \wedge y \in b \wedge x \neq y) \to \neg\, xry) \wedge \forall x \exists y(x \in \mathrm{field}(r) \to (y \in b \wedge xry))))$.
In Worten: Jede Äquivalenzrelation hat ein vollständiges Repräsentantensystem.

(iii) $\forall f, x\,((f\colon x \to V \wedge \forall i\,(i \in x \to f(i) \neq \emptyset)) \longrightarrow \mathsf{X}_{i \in x}\, f(i) \neq \emptyset)$.
In Worten: Das Produkt nicht-leerer Mengen ist nicht leer.

Beweis. „(i)⇒(iii)“. Seien $f, x \in V$ mit $f\colon x \to V$ und $f(i) \neq \emptyset$ für alle $i \in x$. Es ist ein $g\colon x \to V$ mit $g(i) \in f(i)$ für alle $i \in x$ zu finden. Hierzu „machen“ wir die Mengen $f(i)$ disjunkt und wählen mit **(AC)** aus jedem der $f(i)$ ein Element $g(i)$ aus. Formal geschieht das wie folgt: Durch $\{\{i\} \times f(i) \mid i \in x\}$ ist nach **(Ers)** eine Menge a definiert; die Elemente von a sind nicht-leer und paarweise disjunkt. Nach **(AC)** existiert eine Menge $b \in V$, die jedes Element von a in genau einem Punkt trifft. Aus **ZF** folgt, daß durch $\bigcup\{b \cap (\{i\} \times f(i)) \mid i \in x\}$ eine Menge g definiert ist. Man sieht leicht, daß $g\colon x \to V$ gilt und die Elemente von g von der Form $(i, g(i))$ mit $i \in x$ und $g(i) \in f(i)$ sind. Die Funktion g ist also wie benötigt.

„(iii)⇒(ii)“. Sei r wie in (ii). Durch $\{[x]_r \mid x \in \mathrm{field}(r)\}$ ist eine Menge a definiert. $\{(y, y) \mid y \in a\}$ ist eine funktionale Menge $f\colon a \to a$, die identische Abbildung von a. Wegen $x \in [x]_r$ ist $\emptyset \notin a$ und somit $f(y) \neq \emptyset$ für jedes $y \in a$. Nach (iii) existiert ein $g \in \bigtimes_{y \in a} f(y)$. Dann ist $g([x]_r) \in [x]_r$ (also $g([x]_r) r x$) und $g([x]_r) \neq g([x']_r)$ impliziert $[x]_r \neq [x']_r$, d.h., $\neg\, x r x'$ und somit $\neg\, g([x]_r) r g([x']_r)$. Die Menge $\mathrm{ran}(g)$ ist also ein vollständiges Repräsentantensystem für r.

„(ii)⇒(i)“. Sei a eine Menge nicht-leerer, paarweise disjunkter Mengen. Wir fassen a als Partition von $\bigcup a$ auf und definieren die zu dieser Partition gehörende Äquivalenzrelation[2] r. Ein vollständiges Repräsentantensystem von r trifft jedes Element von a in genau einem Punkt. Formal geschieht dies wie folgt: Durch $\bigcup\{u \times u \mid u \in a\}$ ist eine relationale Menge r gegeben. Man sieht leicht, daß r eine Äquivalenzrelation ist und $a = \{[x]_r \mid x \in \bigcup a\}$ gilt. Wähle gemäß (ii) für r ein vollständiges Repräsentantensystem $b \in V$. Dann trifft b jede Äquivalenzklasse von r (d.h., jedes Element von a) in genau einem Punkt, ist also wie für (i) benötigt. QED

3.11 Axiomensysteme

In der axiomatischen Mengenlehre werden verschiedene mengentheoretische Axiomensysteme untersucht, etwa in Bezug auf ihre Widerspruchsfreiheit, oder weil in bestimmten Situationen nur ein Teil der obigen Axiome erfüllt ist. Wir werden daher grundsätzlich beachten, welche Axiome in bestimmte Beweise eingehen. Einige Teilsysteme zeichnen wir besonders aus:

Definition 3.35

Das Axiomensystem **ZF** (Zermelo-Fraenkel) besteht aus allen angegebenen Axiomen bis auf das Auswahlaxiom.

Das Axiomensystem **ZFC** besteht aus allen angegebenen Axiomen einschließlich des Auswahlaxioms (Axiom of **C**hoice).

Das Axiomensystem **ZF**$^-$ besteht aus allen angegebenen Axiomen bis auf Auswahl- und Potenzmengenaxiom.

[2] Zwei Elemente von $\bigcup a$ sind genau dann äquivalent, wenn sie in derselben Teilmenge der Partition liegen.

Das Axiomensystem **EML** besteht aus den Axiomen der Mengenexistenz, Extensionalität, Paarmengen- und Vereinigungsbildung.

Ein wichtiges Ziel der Vorlesung ist der Nachweis der **relativen Konsistenz** des Auswahlaxioms **(AC)** über dem System **ZFC**: Wenn **ZF** widerspruchsfrei ist, so ist auch **ZFC** widerspruchsfrei.

4 Ordinalzahlen

Die Zahlbereiche der natürlichen und reellen Zahlen sind die klassischen Grundstrukturen der Mathematik. Wir wollen in diesem Kapitel einen mengentheoretischen Zahlbegriff einführen, der als Verallgemeinerung des Begriffs der natürlichen Zahl verstanden werden kann. Wir motivieren die sc Cantorschen **Ordinalzahlen** durch Beobachtungen der oben definierten natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \ldots$. Die Ordinalzahlen setzen die natürlichen Zahlen ins *Transfinite* fort. Wir zählen zunächst einige Eigenschaften der schon eingeführten „natürlichen Zahlen" $0, 1, 2, \ldots$ auf:

(a) Die $<$-Relation der natürlichen Zahlen wird dargestellt durch die $\in$-Relation. D.h., $m < n$ ist äquivalent zu $m \in n$.

(b) Jedes Element eines n ist auch Teilmenge von n, d.h., n ist unter $\in$-Vorgängern abgeschlossen („n ist transitiv").

(c) Die Menge n wird durch $\in$ strikt linear geordnet.

(d) Die Nachfolgerbildung der natürlichen Zahlen wird in V formalisiert durch die Operation $x \mapsto x \cup \{x\}$: Es ist $n + 1 = n \cup \{n\}$.

Wir untersuchen nun die Gesamtheit aller Mengen, die diesen Gesetzen genügt.

4.1 Die Klasse der Ordinalzahlen

Definition 4.1 Es seien A und R Klassenterme.

(a) Die $\in$-Formel $\text{Trans}(A) :\equiv \forall x, y((x \in y \wedge y \in A) \to x \in A)$ bedeutet: A ist **transitiv**, d.h., A ist gegenüber $\in$-Vorgängern seiner Elemente abgeschlossen: Jedes Element von A ist auch Teilmenge von A.

(b) Die Relation $\in\restriction A :\equiv \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in A \wedge x \in y\}$ ist die auf A eingeschränkte $\in$-Relation.

Definition 4.2 (a) Durch $\text{On} :\equiv \{x \mid \text{Trans}(x) \wedge \text{SLO}(x, \in\restriction x)\}$ ist die Klasse der **Ordinalzahlen** definiert.

(b) Mit x **ist eine Ordinalzahl** bezeichnen wir die $\in$-Formel $x \in \text{On}$.

(c) Für $x, y \in \text{On}$ setzen wir $x < y :\equiv x \in y$ und $x \leq y :\equiv (x < y \vee x = y)$.

Zur Notation: Wir verwenden kleine griechische Buchstaben als Variablen für Ordinalzahlen. Eine Formel wie $\forall\alpha\,\varphi$ ist zu lesen als $\forall\alpha\,(\alpha \in \text{On} \to \varphi)$ und eine Formel der Art $\exists\alpha\,\varphi$ ist zu lesen als $\exists\alpha\,(\alpha \in \text{On} \wedge \varphi)$.

Bemerkung 4.3 Für jede natürliche Zahl n ist $n \in \mathrm{On}$, wie man leicht verifiziert.

Die nächsten beiden Sätze zeigen, daß die Klasse On die definierende Bedingung von On erfüllt.

Satz 4.4 *Es gilt* Trans(On).

Beweis. Sei $x \in \alpha$ und $\alpha \in \mathrm{On}$. Es ist zu zeigen, daß x in On liegt, also die definierende Bedingung des Klassentermes On erfüllt.

(1) Es gilt Trans(x).

Beweis. Sei $u \in v \in x$. Es ist $u \in x$ zu zeigen. Aus $v \in x \in \alpha$ und der Transitivität von α folgt $v \subseteq \alpha$, so daß wir speziell $u \in \alpha$ haben. Aus $x, u \in \alpha$ und aus der Tatsache, daß α durch $<$ strikt linear geordnet wird, ergibt sich, daß genau eine der Aussagen $x \in u$ bzw. $x = u$ bzw. $u \in x$ erfüllt ist. Wäre $x \in u$, so hätten wir $x \in u \in v \in x$; wäre $x = u$, so hätten wir $x = u \in v \in x$. Da $\in$ keine Zykel hat, siehe 3.32, kann keine der beiden Aussagen richtig sein. Also muß $u \in x$ gelten. qed(1)

(2) Die Menge x wird durch $\in\restriction x$ strikt linear geordnet.

Beweis. Da α transitiv ist, ist $x \subseteq \alpha$, und da α strikt linear von $\in\restriction \alpha$ geordnet wird, folgt sofort die Behauptung (beachte, daß in SLO nur Allquantoren vorkommen). qed(2)

(1) und (2) implizieren $x \in \mathrm{On}$. QED

Corollar 4.5 *Es gilt* $\forall\alpha\ \alpha = \{\gamma \mid \gamma < \alpha\}$*; speziell:* $\forall\alpha, \beta\ (\alpha = \beta \longleftrightarrow \forall\gamma(\gamma < \alpha \leftrightarrow \gamma < \beta))$

Beweis. Da $\alpha \in \mathrm{On}$ und On transitiv ist, ist jedes Element von α eine Ordinalzahl $\gamma < \alpha$. QED

Satz 4.6 *Es gilt* SLO(On, $<$).

Beweis. Nach Definition gilt $< \subseteq \mathrm{On} \times \mathrm{On}$; da $\in$ keine Zykel hat, gilt $\alpha \not< \alpha$.

(1) Die Relation $<$ ist transitiv auf On.

Beweis. Es gelte $\alpha < \beta < \gamma$, d.h, $\alpha \in \beta$ und $\beta \in \gamma$. Aus der Transitivität von γ folgt dann $\alpha \in \gamma$, also $\alpha < \gamma$. qed(1)

(2) Je zwei Elemente von On sind bzgl. $<$ vergleichbar.

Beweis. Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann gibt es ein α, das die Eigenschaft

$$\varphi :\equiv \alpha \in \mathrm{On} \wedge \exists\beta(\beta \in \mathrm{On} \wedge \neg(\alpha = \beta \vee \alpha \in \beta \vee \beta \in \alpha))$$

erfüllt. Nach **(Fund)** (angewendet auf φ) existiert dann ein $<$-minimales α, das mit einem gewissen β $<$-unvergleichbar ist. Erneute Anwendung von **(Fund)**, diesmal auf die Formel

$$\psi :\equiv \beta \in \mathrm{On} \wedge \neg(\alpha = \beta \vee \alpha \in \beta \vee \beta \in \alpha),$$

liefert ein $<$-minimales $\beta \neq \alpha$, das zu α $<$-unvergleichbar ist. Wir zeigen $\alpha = \beta$ und erhalten so einen Widerspruch.

zu „$\subseteq$". Ist $\gamma < \alpha$, so ist (wegen der Minimalität von α) γ mit β noch $<$-vergleichbar. D.h., es gilt entweder $\beta < \gamma$ oder $\beta = \gamma$ oder $\gamma < \beta$. Im ersten Fall wäre $\beta < \gamma < \alpha$, wegen der Transitivität von $<$ also $\beta < \alpha$; im zweiten Fall wäre ebenfalls $\beta < \alpha$. Dies widerspricht aber der $<$-Unvergleichbarkeit von α und β. Also können diese beiden Fälle nicht eintreten, d.h., es gilt $\gamma < \beta$.

zu „$\supseteq$". Ist $\gamma < \beta$, so ist (wegen der Minimalität von β) γ noch mit α $<$-vergleichbar. Also $\alpha < \gamma$ oder $\alpha = \gamma$ oder $\gamma < \alpha$. Analog zum „$\subseteq$"-Beweis erhält man in den beiden ersten Fällen einen Widerspruch, so daß in der Tat $\gamma < \alpha$ gilt. qed(2)

Damit ist der Satz bewiesen. QED

Satz 4.7 *Die Klasse* On *ist eine echte Klasse:* $\mathrm{On} \notin V$.

BEWEIS. Angenommen, $\mathrm{On} \in V$. Da On transitiv ist und von $<$ strikt linear geordnet wird, wäre $\mathrm{On} \in \mathrm{On}$. Da $\in$ keine Zykel hat, ergibt sich ein Widerspruch. QED

Bemerkung 4.8 Die Tatsache, dass On die definierende Bedingung von On erfüllt (siehe 4.4 und 4.6) aber dennoch kein Element von On ist, wird manchmal als das **Paradoxon von** BURALI-FORTI[3] bezeichnet. BURALI-FORTI veröffentlicht im Jahr 1897 seine Entdeckung, dass die Bildung der Menge aller Ordinalzahlen zu einem Widerspruch führt. Dieses Resultat hat unabhängig von BURALI-FORTI auch CANTOR im Jahre 1895 gefunden.

4.2 Ein strikt formaler Beweis

Die elementaren Lemmas über Ordinalzahlen haben etwas unübersichtliche, aber kurze Beweise. Es ist möglich, diese Beweise strikt formal durchzuführen, z.B. unter Benutzung des Beweis-Prüfungssystems MIZAR (www.mizar.org). Im folgenden Beispiel werden Ordinalzahlen nur über Transitivität und Linearität der $\in$-Relation definiert. Man sieht leicht, dass das zur Ordinalzahl-Definition 4.1 äquivalent ist.

[3]CESARE BURALI-FORTI (13.8.1861, Arezzo–21.1.1931, Turin) 1884 Promotion in Mathematik an der Universität Pisa; ab 1887 an der Militärakademie, ab 1906 als ordentlicher Professor; daneben 1894–1896 als Assistent von PEANO an der Universität Turin. Hauptarbeitsgebiet von BURALI-FORTI ist die Vektoranalysis sowie die Theorie der linearen Transformationen und deren Anwendungen u.a. auf physikalische Fragestellungen. Seine Beschäftigung mit der Grundlagenmathematik fällt in die erste Hälfte seines Lebens; hierbei versucht er, PEANOs Beiträge zu diesem Gebiet zu popularisieren.

```
!! German MIZAR-MSE UNIX
!! Version 0.0.1 Arbeitsgruppe Logik, Universitaet Bonn
!! (German translation and other modifications) und
!! Dep of Comp Sci, Univ of Alberta (MIZAR-MSE)
!!

Axiome
======

Man benutze u,v,w,u',v',w',x,y,z fuer Mengen.
Man fixiere Null in Mengen.

Fundierung_1:
        Nicht (Es existieren u,v mit In[u,v] und In[v,u]).

Fundierung_2:
        Nicht (Es existieren u,v,w mit In[u,v] und In[v,w] und In[w,u]).

Definition_der_Transitivitaet:
        Fuer z ist (Trans[z] gdw
        (Fuer x,y mit In[x,y] und In[y,z] ist In[x,z])).

Strikte_Lineare_Ordnung:
        Fuer z ist (SLO[z] gdw
        (Fuer u,v mit In[u,z] und In[v,z]
        ist (In[u,v] oder u=v oder In[v,u]))).

Definition_von_Ordinalzahl:
        Fuer z ist (Ord[z] gdw Trans[z] und SLO[z]).

Folgerungen
===========

0: Nun betrachte man y,z.
Angenommen 1: In[y,z] und Ord[z].

  Behauptung: Fuer u,v in Mengen mit In[u,y] und In[v,y] ist
  In[u,v] oder u=v oder In[v,u]

  Beweis
  Man betrachte u,v aus Mengen.
  Angenommen 2: In[u,y].
  Angenommen 3: In[v,y].
```

```
  4: Trans[z] nach 1, Definition_von_Ordinalzahl.
  5: In[u,z] nach 1,2,4, Definition_der_Transitivitaet.
  6: In[v,z] nach 1,3,4, Definition_der_Transitivitaet.
  7: SLO[z] nach 1, Definition_von_Ordinalzahl.
  8: In[u,v] oder u=v oder In[v,u] nach 5,6,7, Strikte_Lineare_Ordnung.
  Also In[u,v] oder u=v oder In[v,u] nach 8.
  Ende.

Also SLO[y] nach Behauptung, Strikte_Lineare_Ordnung.
Ende.

== Somit haben wir bewiesen:

Theorem: Fuer y,z mit In[y,z] und Ord[z] ist SLO[y] nach 0.
!!
!! Danke, OK
!! ----------
```

4.3 Eigenschaften von Ordinalzahlen.

Wir definieren die Bildung des Nachfolgers einer Ordinalzahl als Verallgemeinerung +1-Operation auf den natürlichen Zahlen. Ordinalzahlen, die keine Nachfolgerordinalzahlen und von $\emptyset$ verschieden sind, werden **Limesordinalzahlen** genannt. Anders als bei den natürlichen Zahlen gibt es solche Limeszahlen in On.

Definition 4.9 Für jede Menge x setze $x + 1 \;:\equiv\; x \cup \{x\}$. Im Fall $x = \alpha \in \mathrm{On}$ heißt $\alpha + 1$ **direkter ordinaler Nachfolger** von α.

Bemerkung 4.10 Es gilt $x+1 = \bigcup\{x, \{x\}\} \in V$ wegen **(Paar)** und **($\bigcup$-Ax)**. Außerdem ist die +1-Operation injektiv: Wäre nämlich $x + 1 = y + 1$ und $x \neq y$, so wäre $x \in y$ wegen $x \in y \cup \{y\}$ und $y \in x$ wegen $y \in x \cup \{x\}$ im Widerspruch dazu, daß $\in$ keine Zykel hat.

Satz 4.11 *Sei* $\alpha \in \mathrm{On}$. *Dann gilt:*
(a) $\alpha + 1 \in \mathrm{On}$.
(b) $\alpha < \alpha + 1$.
(c) $\forall\beta\,(\beta > \alpha \to \beta \geq \alpha + 1)$.
Aus (a) bis (c) folgt, daß $\alpha + 1$ *die kleinste Ordinalzahl ist, die größer ist als* α.

Beweis. zu (a). Da $\alpha+1$ eine Teilmenge von On ist, genügt es, Trans$(\alpha+1)$ zu verifizieren, vgl. **??**. Gelte also $x \in y \in \alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$. Dann ist entweder $y \in \alpha$, und es gilt $x \in \alpha$ wegen der Transitivität von α; oder es ist $y = \alpha$, und wieder folgt $x \in \alpha$. Wegen $\alpha \subseteq \alpha+1$ folgt in beiden Fällen $x \in \alpha + 1$. Dies war zu zeigen.

zu (b). Dies ist klar.
zu (c). Sei $\beta < \alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$. Dann ist $\beta \in \alpha$ oder $\beta = \alpha$, also $\beta \leq \alpha$. QED

Lemma 4.12 *Auf den früher definierten natürlichen Zahlen n stimmt die oben definierte Nachfolgerbildung mit der üblichen Nachfolgerbildung überein.*

Definition 4.13 (a) Die $\in$-Formel $\mathrm{Succ}(x) :\equiv x \in \mathrm{On} \wedge (x = \emptyset \vee \exists y\,(x = y + 1))$ bedeutet: x ist eine **Nachfolgerordinalzahl** oder kurz **Nachfolger**.

(b) Die $\in$-Formel $\mathrm{Lim}(x) :\equiv x \in \mathrm{On} \wedge \neg\, \mathrm{Succ}(x)$ bedeutet: x ist eine **Limesordinalzahl** oder kurz **Limes**.

(c) Die $\in$-Formel $\mathrm{Ind}(x) :\equiv \emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \to y + 1 \in x)$ bedeutet: x ist **induktiv**.

Bemerkung 4.14 (a) Technische Gründe veranlassen uns dazu, $\emptyset$ als Nachfolger aufzufassen. Manche Autoren ziehen es dagegen vor, $\emptyset$ als Limes anzusehen.

(b) Ist $\beta \neq \emptyset$ und ein Nachfolger, so gibt es genau ein x mit $\beta = x+1$, und es ist $x \in \mathrm{On}$.

4.4 Die Klasse ω der natürlichen Zahlen.

In diesem Abschnitt setzen wir nicht das Unendlichkeitsaxiom vorsetzen. Es ist dann möglich, dass die natürlichen Zahlen eine echte Klasse bilden.

Definition 4.15 Definiere $\mathrm{Nat}(x) :\equiv (\mathrm{Succ}(x) \wedge \forall y\,(y \in x \to \mathrm{Succ}(y)))$ (d.h., x ist eine natürliche Zahl). $\omega = \{n \mid \mathrm{Nat}(n)\}$ sei die Klasse der **natürlichen Zahlen**.

Aus der Darstellung im letzten Lemma folgt durch metasprachliche Induktion leicht, dass ω die zuvor definierten n enthält und mit diesen „beginnt“:

Lemma 4.16 *Für jede konkret gegebene natürliche Zahl n ist $n \in \omega$. Ferner ist $0 = \min(\omega)$ und $n = \min(\omega \setminus \{0, \ldots, n-1\})$ im Fall $n > 0$.*

Satz 4.17 *Sei $S{:}\,\omega \to \omega$ die* **Nachfolgerfunktion**, *d.h, $S(n) = n + 1$ für alle $n \in \omega$. Dann gelten die* Peano-*Axiome:*

(P1) $S{:}\,\omega \xrightarrow{inj.} \omega$.

(P2) $0 \notin \mathrm{ran}(S)$.

(P3) *Für alle Terme A gilt:* $(A \subseteq \omega \wedge 0 \in A \wedge \forall x\,(x \in A \to S(x) \in A)) \longrightarrow A = \omega$.

Beweis. Die Gültigkeit von (P1) folgt aus der Injektivität der +1-Operation auf V, (P2) ist evident. (P3) folgt aus dem Fundierungsschema und der Definition von ω. QED

Bemerkung 4.18 Die Klasse ω wird durch die o.a. Peano-Axiome eindeutig festgelegt. Man beachte, dass die obige Version der Peano-Axiome eine Klassenversion ist. Unter der Annahme des Unendlichkeitsaxioms gelangen wir zu der üblichen Mengenversion.

Satz 4.19 *Im Axiomensystem* $\mathbf{ZF}^{-}-(\mathbf{Inf})$ *sind äquivalent:* $(\mathbf{Inf})$ *und die Aussage* $\omega \in V$.

Beweis. Offensichtlich ist $\omega \in V$ ein Zeuge für das Unendlichkeitsaxiom. Umgekehrt sei $x \in V$ Zeuge für das Unendlichkeitsaxiom, d.h. $0 \in x \ \wedge \forall n(n \in x \to n+1 \in x)$. Nach 4.20 für $A = \omega \cap x$ gilt $\omega \cap x = \omega$. Dann ist $\omega \subseteq x$ und $\omega \in V$. QED

In $\mathbf{ZF}^-$ erhalten wir dann die gewöhnliche Form der Peanoaxiome:

Satz 4.20 *Sei $S{:}\,\omega \to \omega$ die* **Nachfolgerfunktion**, *d.h, $S(n) = n+1$ für alle $n \in \omega$. Dann gelten die* Peano-*Axiome:*

(P1) $S{:}\,\omega \xrightarrow{inj.} \omega$.

(P2) $0 \notin \operatorname{ran}(S)$.

(P3) $\forall a((a \subseteq \omega \ \wedge\ 0 \in a \ \wedge\ \forall x\, (x \in a \to S(x) \in a)) \longrightarrow a = \omega)$.

Satz 4.21 *ω ist die kleinste Limesordinalzahl.*

Beweis.

(1) $\operatorname{Trans}(\omega)$.

Beweis. Sei $x \in y \in \omega$. Da $\operatorname{Nat}(y)$ ist $\operatorname{Succ}(x)$. Da $\operatorname{Trans}(y)$ ist $x \subseteq y$ und daher $\forall z(z \in x \to \operatorname{Succ}(z))$. Also ist $\operatorname{Nat}(x)$ und $x \in \omega$. qed(1)

(2) $\operatorname{SLO}(\omega, \in\restriction \omega)$

ist klar, denn $\omega \subseteq \mathrm{On}$ und die Ordinalzahlen sind durch $\in$ strikt linear geordnet.
Zusammen ergibt sich

(3) $\omega \in \mathrm{On}$.

(4) ω ist eine Limesordinalzahl.

Beweis. Andernfalls wäre $\operatorname{Succ}(\omega)$ und damit $\operatorname{Nat}(\omega)$. Aber dann ist $\omega \in \omega$ im Widerspruch zu Fundierung. qed(4)
Da alle Elemente von ω Nachfolgerzahlen sind, ist ω die kleinste Limesordinalzahl. QED

Damit sind die natürlichen Zahlen als Menge formalisiert. Im nächsten Kapitel definieren wir zudem die gewohnten arithmetischen Operationen auf $\mathbb{N} = \omega$ mit Hilfe der Rekursion.

5 Induktion und Rekursion.

In diesem Kapitel setzen wir – sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird – das System $\mathbf{ZF}^-$ voraus.

Induktion ist (in seiner einfachsten Form) ein Beweisprinzip für Aussagen über Ordinalzahlen. Es besagt, daß eine mathematische Eigenschaft φ für jede Ordinalzahl gilt, wenn man für jede Ordinalzahl α aus der Gültigkeit von φ für alle Vorgänger von α auf die Gültigkeit von φ für α selbst schließen kann.

Rekursion ist (in seiner einfachsten Form) ein Konstruktionsprinzip für funktionale Klassen $F\colon \mathrm{On} \to V$. Es besagt, daß F dann wohl- und eindeutig definiert ist, wenn es eine funktionale Klasse G gibt, die für jedes α aus den bereits berechneten Werten $(F(\beta)|\beta < \alpha)$ und der aktuellen Stelle α den Wert $F(\alpha)$ berechnet.

5.1 Ordinalzahlinduktion.

Satz 5.1 *Sei C ein Klassenterm.*

(a) *Gilt $C \subseteq \mathrm{On}$ und $\forall\alpha(\alpha \subseteq C \to \alpha \in C)$, so ist $C = \mathrm{On}$.*

(b) *Gelten $C \subseteq \mathrm{On}$ und $0 \in C$ sowie $\forall\alpha(\alpha \in C \to \alpha + 1 \in C)$ und $\forall\alpha((\mathrm{Lim}(\alpha) \wedge \alpha \subseteq C) \longrightarrow \alpha \in C)$, so ist $C = \mathrm{On}$.*

Beweis. zu (a). Wäre $C \neq \mathrm{On}$, so ist $\alpha :\equiv \min(\mathrm{On} \setminus C)$ wohldefiniert. Aus der Minimalität von α folgt $\alpha \subseteq C$, so daß nach Voraussetzung $\alpha \in C$ gilt. Dies widerspricht $\alpha \in \mathrm{On} \setminus C$. Also ist $C = \mathrm{On}$.

zu (b). Wir zeigen, daß die Voraussetzungen aus (a) erfüllt sind, so daß (b) aus (a) folgt. Sei also $\alpha \subseteq C$. Ist $\alpha = 0$, so ist nach Annahme in (b) $\alpha \in C$. Ist $\alpha \neq 0$ ein Nachfolger, so ist $\alpha = \beta + 1$ wobei $\beta \in C$ gilt wegen $\alpha \subseteq C$; nach Annahme in (b) ist dann $\beta + 1 \in C$, also $\alpha \in C$. Gilt $\mathrm{Lim}(\alpha)$, so liefert die Annahme in (b) unmittelbar $\alpha \in C$. QED

Da jeder Klassenterm $C \subseteq \mathrm{On}$ von der Form $C = \{\alpha \mid \varphi(\alpha, \vec{w})\}$ ist, liefert der Satz sofort die Richtigkeit des folgenden Induktionsschemas.

Satz 5.2 (Induktionsschema für On) *Sei $\varphi(x, \vec{w})$ eine $\in$-Formel. Dann gilt:*

(a) $\forall\alpha \in \mathrm{On}\ (\forall\beta < \alpha\ \varphi(\beta, \vec{w}) \to \varphi(\alpha, \vec{w})) \longrightarrow \forall\alpha \in \mathrm{On}\ \varphi(\alpha, \vec{w})$

(b) $\Big(\varphi(0, \vec{w}) \wedge \forall\alpha(\varphi(\alpha, \vec{w}) \to \varphi(\alpha{+}1, \vec{w})) \wedge \forall\alpha(\mathrm{Lim}(\alpha) \to (\forall\beta < \alpha\ \varphi(\beta, \vec{w}) \to \varphi(\alpha, \vec{w})))\Big) \longrightarrow \forall\alpha \in \mathrm{On}\ \varphi(\alpha, \vec{w})$

Wir formulieren die Aussage des letzten Satzes weniger formal. Es sei eine mathematische Eigenschaft φ vorgelegt. Es soll gezeigt werden, daß φ auf alle Ordinalzahlen zutrifft. Um dies durchzuführen, stehen zwei Strategien zur Verfügung:

Strategie 1. Betrachte eine beliebige Ordinalzahl α und nimm an, daß φ auf alle Ordinalzahlen $\beta < \alpha$ zutrifft; zeige, daß dann φ auf α zutrifft.

Strategie 2. Zeige zunächst, daß φ auf 0 zutrifft. Betrachte dann eine beliebige Ordinalzahl $\alpha > 0$ und unterscheide die Fälle $\alpha = \beta + 1$ und $\mathrm{Lim}(\alpha)$. Im Fall $\alpha = \beta + 1$ nimm an, daß φ auf β zutrifft und zeige, daß φ auf α zutrifft; im Fall $\mathrm{Lim}(\alpha)$ nimm an, daß φ auf alle $\beta < \alpha$ zutrifft und zeige, daß φ auf α zutrifft.

Wir können Induktion auch benutzen, um Aussagen über Anfangsstücke von On zu beweisen: Es seien eine mathematische Eigenschaft φ und eine Ordinalzahl γ vorgelegt; es soll gezeigt werden, daß φ auf alle $\alpha < \gamma$ zutrifft. Den Beweis kann man führen, indem man eine der oben angegebenen Strategien verfolgt, wobei man jeweils die Zusatzannahme $\alpha < \gamma$ hinzufügt. Diese Vorgehensweise ist korrekt: es wird hierdurch nämlich bewiesen, daß die mathematische Eigenschaft $\psi(x,\vec{w}) :\equiv (x < \gamma \to \varphi(x,\vec{w}))$ auf alle $\alpha \in \mathrm{On}$ zutrifft, was sofort die Gültigkeit von φ für jedes $\alpha < \gamma$ impliziert. Unter diese „Anfangsstück-Induktionen“ fallen z.B. die bekannten Induktionen über natürliche Zahlen ($\gamma = \omega$).

5.2 Ordinalzahlrekursion.

Wir wenden uns dem eingangs skizzierten Konstruktionsprinzip zu.

Satz 5.3 (Rekursionsschema für On) *Sei G ein Klassenterm. Dann können wir einen Klassenterm F angeben, so daß unter* $\mathbf{ZF}^-$ *folgendes gilt:*

(a) $G\colon V \to V \longrightarrow (F\colon \mathrm{On} \to V \wedge \forall\alpha\, F(\alpha) = G\,(F \restriction \alpha))$

(b) Ist F' ein weiterer Klassenterm, dann gilt:
$(G\colon V \to V \wedge F'\colon \mathrm{On} \to V \wedge \forall\alpha\, F'(\alpha) = G\,(F' \restriction \alpha)) \longrightarrow F = F'$

Der Klassenterm F heißt **der durch $<$-Rekursion auf On und die Rekursionsvorschrift G bestimmte kanonische Term**. *Falls $G\colon V \to V$ gilt, bezeichnen wir F auch als* **die durch $<$-Rekursion auf On und die Rekursionsvorschrift G bestimmte Funktion**.

Beweis. Wir approximieren die Funktion F durch Funktionen f, deren Definitionsbereiche Ordinalzahlen sind, und die sich auf ihren Definitionsbereichen gemäß der Rekursionsvorschrift G verhalten. Wir zeigen, daß je zwei solcher Approximationen *kompatibel* sind, d.h., auf dem gemeinsamen Teil ihres Definitionsbereiches übereinstimmen und daß jede Ordinalzahl als Definitionsbereich einer Approximation in Frage kommt. Den Klassenterm F erhalten wir durch Vereinigung all dieser Approximationen.
Definiere also

$$\mathrm{App}(f,G) :\equiv f\colon \mathrm{dom}(f) \to V \wedge \mathrm{dom}(f) \in \mathrm{On} \wedge \forall\alpha \in \mathrm{dom}(f)\ f(\alpha) = G\,(f \restriction \alpha)$$

und setze

$$F :\equiv \bigcup\{f \mid \mathrm{App}(f,G)\}.$$

Hiermit haben wir F effektiv aus G konstruiert. Es gelte nun $\mathbf{ZF}^-$.
(a). Sei $G\colon V \to V$

(1) Je zwei Approximationen sind kompatibel:
$\mathrm{App}(f,G) \wedge \mathrm{App}(g,G) \wedge \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g) \longrightarrow g \restriction \mathrm{dom}(f) = f$.
Speziell: Gilt $\mathrm{App}(f,G)$ und $\mathrm{App}(f,G)$ sowie $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$, so ist $f = g$.

Beweis. Wäre $g \restriction \mathrm{dom}(f) \neq f$, so gäbe es ein kleinstes $\alpha \in \mathrm{dom}(f)$ mit $f(\alpha) \neq g(\alpha)$. Wegen der Minimalität von α ist $f \restriction \alpha = g \restriction \alpha$ und damit, weil G funktional ist, auch $G(f \restriction \alpha) = G(g \restriction \alpha)$. Wegen $\mathrm{App}(f,G)$ und $\mathrm{App}(g,G)$ haben wir aber andererseits $f(\alpha) = G(f \restriction \alpha)$ und $g(\alpha) = G(g \restriction \alpha)$, so daß doch $f(\alpha) = g(\alpha)$ sein muß, Widerspruch.
qed(1)

(2) $\quad \forall \alpha \in \mathrm{On}\, \exists f\, (\mathrm{App}(f, G) \wedge \mathrm{dom}(f) = \alpha)$.

Beweis. Wir führen einen Induktionsbeweis.

$\alpha = 0$. Für $f :\equiv \emptyset$ gilt $f\colon 0 \to V$ und $\mathrm{App}(f, G)$.

$\alpha = \beta + 1$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert $g\colon \beta \to V$ mit $\mathrm{App}(g, G)$. Setze $f :\equiv g \cup \{(\beta, G(g))\}$. Dann gilt $f\colon \alpha \to V$, und man verifiziert leicht $\mathrm{App}(f, G)$. Beachte hierbei, daß für $\gamma \leq \beta$ gilt $f \restriction \gamma = g \restriction \gamma$.

$\mathrm{Lim}(\alpha)$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert für jedes $\beta < \alpha$ ein $f_\beta\colon \beta \to V$ mit $\mathrm{App}\,(f_\beta, G)$. Nach (1) ist f_β eindeutig bestimmt, so daß wir $f_\beta = \bigcap\{g \mid \mathrm{App}(g, G) \wedge \mathrm{dom}(g) = \beta\}$ haben, d.h., zur Definition von f_β wird **(AC)** nicht benötigt. Durch $f :\equiv \bigcup\{f_\beta \mid \beta < \alpha\}$ ist, weil Approximationen paarweise kompatibel sind, eine Funktion $f\colon \alpha \to V$ gegeben (beachte, daß $\{f_\beta \mid \beta < \alpha\}$ nach **(Ers)** eine Menge ist, also wegen **($\bigcup$-Ax)** $f \in V$ gilt). Für $\beta < \alpha$ hat man außerdem $f \restriction \beta = f_{\beta+1} \restriction \beta$. Wegen $\mathrm{App}\,(f_{\beta+1}, G)$ folgt hieraus $f(\beta) = f_{\beta+1}(\beta) = G\,(f_{\beta+1} \restriction \beta) = G\,(f \restriction \beta)$. Somit gilt $\mathrm{App}(f, G)$. qed(2)

Aus (1), (2) und der Definition von F ergibt sich sofort $F\colon \mathrm{On} \to V$. Analog zu der parallelen Stelle im Induktionsbeweis von (2) für den Limesfall sieht man, daß F die Rekursionsgleichung $\forall \beta\, F(\beta) = G\,(F \restriction \beta)$ erfüllt. Damit ist (a) bewiesen.

zu (b). Der Beweis verläuft genau so wie der Beweis der Kompatibilität zweier Approximationen, siehe (1). QED

Bemerkung 5.4 Der kanonische Term F im Rekursionsschema ist G eindeutig zugeordnet; seine Definition ist dem obigen Beweis zu entnehmen. Der Term F ist auch dann definiert, wenn G nicht funktional ist. In diesem Fall macht das Rekursionsschema jedoch keine Aussage über die Eigenschaften von F.

Das Rekursionsschema wird oft in der folgenden Form angewendet: Für die zu definierende Funktion $F\colon \mathrm{On} \to V$ wird folgendes vorgegeben:

(i) der Funktionswert an der Stelle 0,

(ii) eine m.H. eines Klassentermes formulierbare „Vorschrift", wie aus dem Funktionswert an einer Stelle α der Funktionswert an der Stelle $\alpha + 1$ ausgerechnet werden kann,

(iii) eine ebensolche „Vorschrift", wie an Limesstellen α aus den Funktionswerten an den kleineren Stellen der Funktionswert an der Stelle α bestimmt werden kann.

Formal bedeutet dies, daß ein $x_0 \in V$ sowie Klassenterme G_{succ} und G_{lim} mit $G_{succ}, G_{lim}\colon V \to V$ vorgegeben sind, so dass die rekrusive Funktion F erfüllt:

(i) $F(0) = x_0$,

(ii) $F(\alpha + 1) = G_{succ}(F(\alpha))$,

(iii) $F(\alpha) = G_{lim}\,(F \restriction \alpha)$, falls $\mathrm{Lim}(\alpha)$.

Das Rekursionsschema liefert uns die Existenz der gewünschten Funktion F, wenn wir die Fallunterscheidungen auflösen, indem wir setzen:

$$G :\equiv \{\, (f, x_0) \mid f\colon 0 \to V\} \,\cup$$

$$\{(f,y)|\exists\alpha\, f\colon \alpha+1\to V \,\wedge\, y = G_{succ}(f(\alpha))\}\cup$$
$$\{\,(f, G_{lim}(f))\,|\exists\alpha\ \mathrm{Lim}(\alpha)\,\wedge\, f\colon\alpha\to V\}\cup$$
$$\{(f,0)|\neg(\exists\alpha\, f\colon\alpha\to V)\}.$$

Dann gilt $G\colon V\to V$ und die obigen Aussagen (i)–(iii) sind gleichwertig mit $\forall\alpha\, F(\alpha) = G\,(F\restriction\alpha)$, wie für das Rekursionsschema benötigt. Wir stellen nun einige wichtige Anwendungen des Rekursionsschemas vor.

5.3 Ordinalzahlarithmetik.

Wir übertragen die für die gewöhnlichen natürlichen Zahlen gegebenen Operationen Addition, Multiplikation und Exponentiation auf die gesamten Ordinalzahlen.

Definition 5.5 Definiere für $\alpha\in\mathrm{On}$ durch $<$-Rekursion auf On die Abbildung $\alpha+ : \mathrm{On}\to V$ mit

(i) $\alpha+0 :\equiv \alpha$,

(ii) $\alpha+(\beta+1) :\equiv (\alpha+\beta)+1$,

(iii) $\alpha+\delta :\equiv \bigcup\{\alpha+\beta\,|\,\beta<\delta\}$ $(=\sup_{\beta<\delta}\alpha+\beta)$, für $\mathrm{Lim}(\delta)$.

Die Funktion $+$ heißt **Ordinalzahladdition**.

Der nächste Satz zeigt, daß die Ordinalzahladdition nicht aus On herausführt und stellt einige Regeln für die Ordinalzahladdition zusammen.

Satz 5.6 *Es gilt:*

(a) $\forall\alpha,\beta\ \alpha+\beta\in\mathrm{On}$.

(b) $\beta<\gamma \longrightarrow \alpha+\beta<\alpha+\gamma$

(c) Die Ordinalzahladdition ist assoziativ: $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$.

(d) Die Ordinalzahladdition ist i.a. ***nicht*** *kommutativ.*

Beweis. (a)–(c) beweist man leicht durch $<$-Induktion. Zum Beispiel zeigt man (a) durch Induktion über β bei fixiertem α. Für (d) geben wir ein Gegenbeispiel an: Fixiere n mit $0<n<\omega$. Dann gilt $n+\omega = \sup_{m<\omega} n+m = \omega < \omega+n$. QED

Satz 5.7 *Jede Ordinalzahl* α *ist eindeutig darstellbar in der Form* $\alpha=\delta+n$, *wobei* $n<\omega$ *und* $\delta=0$ *oder* $\mathrm{Lim}(\delta)$ *gilt.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Angenommen, es wäre $\alpha=\delta_1+n_1=\delta_2+n_2$. Dann gilt

(1) $\delta_1=\delta_2\,(\equiv\colon\,\delta)$.

Beweis. Angenommen $\delta_1<\delta_2$. Durch Induktion nach n zeigen wir $\delta_1+n<\delta_2$ für alle $n<\omega$:

$n=0$. klar wegen $\delta_1+0=\delta_1$.

$n = m + 1$. Es gelte $\delta_1 + m < \delta_2$. Dann ist zunächst $\delta_1 + n = (\delta_1 + m) + 1 \leq \delta_2$, und da δ_2 ein Limes ist, muß sogar $\delta_1 + n < \delta_2$ sein.

Speziell ergibt sich nun $\delta_1 + n_1 < \delta_2 \leq \delta_2 + n_2$, im Widerspruch dazu, daß die außenstehenden Terme der Ungleichungskette mit α übereinstimmen. qed(1)

Wäre schließlich etwa $n_1 < n_2$, so hätten wir $\delta + n_1 < \delta + n_2$ im Widerspruch dazu, daß beide Werte mit α übereinstimmen. Damit ist die Eindeutigkeit der Darstellung nachgewiesen.

Die Existenz der gewünschten Darstellung zeigen wir durch Induktion nach α:

$\alpha = 0$. Es ist $\alpha = 0 + 0$.
$\alpha = \beta + 1$. Wenn β die Darstellung $\beta = \delta + n$ hat, dann hat α die Darstellung $\alpha = (\delta + n) + 1 = \delta + (n + 1)$.
$\mathrm{Lim}(\alpha)$. Es ist $\alpha = \alpha + 0$.

Damit ist der Satz bewiesen. QED

Definition 5.8 Definiere für $\alpha \in \mathrm{On}$ durch $<$-Rekursion auf On die Abbildung $\alpha\cdot : \mathrm{On} \to V$ mit

(i) $\alpha \cdot 0 \;:\equiv\; 0,$
(ii) $\alpha \cdot (\beta + 1) \;:\equiv\; (\alpha \cdot \beta) + \alpha,$
(iii) $\alpha \cdot \delta \;:\equiv\; \bigcup\{\alpha \cdot \beta \mid \beta < \delta\}(= \sup_{\beta<\delta} \alpha \cdot \beta)$, für $\mathrm{Lim}(\delta)$.

Die Funktion $\cdot$ heißt **Ordinalzahlmultiplikation**.

Satz 5.9 *Es gilt:*

(a) $\forall \alpha, \beta\ \alpha \cdot \beta \in \mathrm{On}$.
(b) $\beta < \gamma \wedge \alpha \neq 0 \longrightarrow \alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$.
(c) $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$.
(d) Es gilt das folgende Distributivgesetz: $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.
(e) Die Ordinalzahlmultiplikation ist assoziativ: $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.
(f) Die Ordinalzahlmultiplikation ist i.a. ***nicht*** *kommutativ.*

Beweis. Wir geben hier nur ein Gegenbeispiel für (f) an: Fixiere n mit $1 < n < \omega$. Dann gilt $n \cdot \omega = \sup_{m<\omega} n \cdot m = \omega < \omega \cdot n$. QED

Wir beschließen unseren kurzen Ausflug in die Ordinalzahlarithmetik mit der Definition der ordinalen Exponentiation.

Definition 5.10 Definiere für $\alpha \in \mathrm{On}$ durch $<$-Rekursion auf On die Abbildung $\exp(\alpha, \cdot) : \mathrm{On} \to V$ mit

(i) $\exp(\alpha, 0) \;:\equiv\; 1,$
(ii) $\exp(\alpha, \beta + 1) \;:\equiv\; \exp(\alpha, \beta) \cdot \alpha,$
(iii) $\exp(\alpha, \delta) \;:\equiv\; \bigcup\{\exp(\alpha, \beta) \mid \beta < \delta\}(= \sup_{\beta<\delta} \exp(\alpha, \beta))$, für $\mathrm{Lim}(\delta)$.

Die Funktion exp heißt **Ordinalzahlexponentiation**. Wir schreiben meist α^β statt $\exp(\alpha, \beta)$.

Die rekursiven Definitionen der arithmetischen Operationen entsprechen den gewohnten Operationen auf den natürlichen Zahlen. Durch Einschränkung auf die Menge $\mathbb{N}$ erhalten wir die vertraute arithmetische Struktur der natürlichen Zahlen: $(\mathbb{N}, + \restriction \mathbb{N}, \cdot \restriction \mathbb{N}, \exp \restriction \mathbb{N}, 0, 1)$. Aus dieser lassen sich die größeren Zahlbereiche $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ auf gewohnte Weise aufbauen.

5.4 Die von Neumann – Hierarchie $(V_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{On}}$.

Mit Hilfe des Rekursionsschemas definieren wir die VON NEUMANN-Hierarchie, eine echt aufsteigende Folge von Mengen, die das gesamte Mengenuniversum ausschöpft. **Hierzu setzen wir von nun an ZF voraus.**

Definition 5.11 Definiere die **VON NEUMANN-Hierarchie** $(V_\alpha \,|\, \alpha \in \mathrm{On})$ durch $<$-Rekursion auf On wie folgt:

(i) $V_0 :\equiv \emptyset$.

(ii) $V_{\alpha+1} :\equiv \mathcal{P}(V_\alpha)$.

(iii) $V_\delta :\equiv \bigcup_{\alpha<\delta} V_\alpha$ für $\mathrm{Lim}(\delta)$.

Satz 5.12 *Es gilt:*

(a) Die Menge V_α ist transitiv.

(b) $\beta < \alpha \longrightarrow V_\beta \in V_\alpha$.

(c) $\beta \leq \alpha \longrightarrow V_\beta \subseteq V_\alpha$.

(d) $V_\alpha \cap \mathrm{On} = \alpha$. Speziell: $\alpha \in V_{\alpha+1}$.

BEWEIS. zu (a). Wir führen eine Induktion über α durch:
$\alpha = 0$. Die Menge $V_0 = \emptyset$ ist transitiv.
$\alpha = \beta + 1$. Sei $x \in y \in V_\alpha$. Nach Definition von V_α im Nachfolgerfall ist $V_\alpha = \mathcal{P}(V_\beta)$, d.h., $y \in V_\alpha$ impliziert $y \subseteq V_\beta$, und somit ist $x \in V_\beta$. Da V_β nach Induktionsvoraussetzung transitiv ist, ergibt sich $x \subseteq V_\beta$, also $x \in V_{\beta+1}$.
$\mathrm{Lim}(\alpha)$. Als Vereinigung transitiver Mengen ist V_α transitiv.

zu (b). Durch Induktion nach α verifiziert man leicht $\forall \beta < \alpha \; V_\beta \in V_\alpha$.

zu (c). Dies folgt unmittelbar aus (a) und (b).

zu (d). Wir führen eine Induktion nach α durch.
$\alpha = 0$. Wegen $V_0 = \emptyset$ ist $V_0 \cap \mathrm{On} = \emptyset$.
$\alpha = \beta + 1$. Es gelte $V_\beta \cap \mathrm{On} = \beta$. Es ist $V_{\beta+1} \cap \mathrm{On} = \beta + 1$ zu zeigen.
zu „$\subseteq$“. Ist $\gamma \in V_{\beta+1}$, so gilt $\gamma \subseteq V_\beta$ nach Definition von $V_{\beta+1}$. Indem man die Induktionsvoraussetzung anwendet, folgt dann $\gamma \subseteq \beta$, d.h., $\gamma \in \beta + 1$.
zu „$\supseteq$“. Sei $\gamma < \beta + 1$. Ist $\gamma < \beta$, so folgt aus der Induktionsvoraussetzung $\gamma \in V_\beta$, also $\gamma \in V_{\beta+1}$. Da schließlich die Induktionsvoraussetzung und die Definition von $V_{\beta+1}$ implizieren, daß $\beta \in V_{\beta+1}$ gilt, folgt $\gamma \in V_{\beta+1}$ auch im Fall $\gamma = \beta$.

Damit ist der Nachfolgerfall abgehandelt.
Lim(α). Ist $\gamma \in V_\alpha$, so ist nach Definition von V_α schon $\gamma \in V_\beta$ für ein $\beta < \alpha$; nach Induktionsvoraussetzung ist dann $\gamma < \beta$, also $\gamma < \alpha$. Ist andererseits $\gamma < \alpha$, so ist nach Induktionsvoraussetzung $\gamma \in V_{\gamma+1}$, wegen $V_{\gamma+1} \subseteq V_\alpha$ also $\gamma \in V_\alpha$. Damit ist auch der Limesfall abgehandelt, und (d) ist bewiesen. QED

Im letzten Satz wurde gezeigt, daß die Mengen V_α ($\alpha \in \mathrm{On}$) eine im Sinne der Inklusion von Mengen aufsteigende Folge bilden, und daß V_α in der Klasse On gerade bis zur Zahl α reicht (man sagt, V_α hat *ordinale Höhe* α). Der nächste Satz zeigt, daß jede Menge aus V „schließlich“, d.h., für hinreichend großes α in V_α liegt. Die von Neumann-Hierarchie gliedert also unser Mengenuniversum in sich erweiternde Stufen, wobei die „obere Grenze“ der α-ten Stufe V_α gerade in Höhe der Ordinalzahl α liegt, siehe Abbildung 2. Die

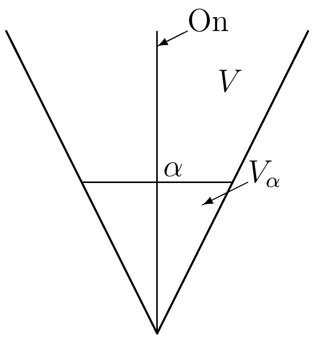


Abbildung 2: V_α

V_α können somit in gewisser Weise als Anfangsstücke des Mengenuniversums aufgefaßt werden.

Satz 5.13 *Es gilt* $V = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$.

Beweis. Angenommen, $V \neq \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$. Dann existiert $x \in V \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$. Nach **(Fund)** gibt es ein $\in$-minimales x mit dieser Eigenschaft. Wegen der Minimalität von x ist $x \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$. Also ist durch

$$y \mapsto f(y) :\equiv \min\{\alpha \mid y \in V_\alpha\}$$

eine Funktion $f\colon x \to \mathrm{On}$ definiert. Nach **(Ers)** gilt $f[x] \in V$; also ist $\alpha :\equiv \bigcup f[x] \in \mathrm{On}$. Aus der Definition von f folgt $x \subseteq V_\alpha$. Dann gilt aber $x \in V_{\alpha+1}$, und dies widerspricht der Wahl von x. QED

Mit Hilfe der V_α können wir anschaulich charakterisieren, wann ein Klassenterm A eine echte Klasse definiert:

Satz 5.14 *Sei A ein Klassenterm. Dann gilt:*
(a) $A \notin V \longleftrightarrow \forall\alpha\exists\beta(\beta > \alpha \wedge A \cap (V_\beta \setminus V_\alpha) \neq \emptyset)$.

(b) $A \in V \longleftrightarrow \exists\alpha\, A \subseteq V_\alpha$.
Mit anderen Worten: Echte Klassen reichen „bis an den oberen Rand“ des Mengenuniversums V heran, ihre ordinale Höhe ist nicht beschränkt, wohingegen jede Menge schon Teil eines Anfangsstücks von V ist, siehe Abbildung 3.

BEWEIS. Da V von den V_α aufsteigend ausgeschöpft wird, folgt (a) leicht aus (b). Ist nun $A \in V$, so ist $A \in V_\alpha$ für ein $\alpha \in \mathrm{On}$. Wegen der Transitivität von V_α folgt $A \subseteq V_\alpha$. Ist umgekehrt $A \subseteq V_\alpha$, so ist $A \in V$ wegen **(Aus)**. QED

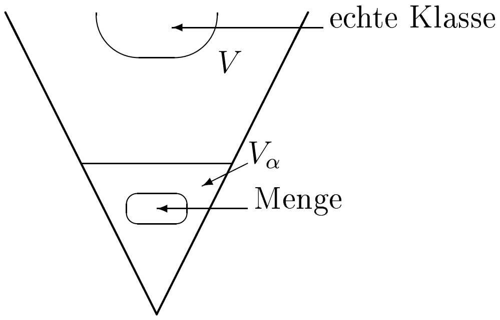


Abbildung 3: Mengen und echte Klassen

6 Äquivalenzen des Auswahlaxioms.

Das Auswahlaxiom ist zu zahlreichen anderen „Auswahlprinzipien“ äquivalent. Wir zeigen einige dieser Äquivalenzen.

Satz 6.1 *Unter* **ZF** *sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) **(AC)**.

(ii) Jede Äquivalenzrelation auf einer Menge hat ein vollständiges Repräsentantensystem.

(iii) Jedes Produkt nicht-leerer Mengen ist nicht leer.

(iv) Zu jeder Menge gibt es eine **Auswahlfunktion**, *die aus jedem nicht-leeren Element dieser Menge ein Element auswählt:* $\forall a\, \exists f\ (f\colon a \to V \ \wedge\ \forall u\, ((u \in a \wedge u \neq \emptyset) \longrightarrow f(u) \in u))$.

(v) **Wohlordnungssatz von Zermelo.** *Jede Menge läßt sich wohlordnen:* $\forall a\, \exists r\ \mathrm{WO}(a, r)$.

(vi) Jede Menge ist zu einer Ordinalzahl gleichmächtig: $\forall a\, \exists f\, \exists \alpha\, f\colon \alpha \xrightarrow{bij.} a$.

(vii) **Lemma von Zorn.**[4] *Jede induktiv geordnete Menge hat ein maximales Element:*

[4] MAX AUGUST ZORN (geb. 6.6.1906, Hamburg) 1930 Promotion an der Hansischen Universität Hamburg; 1933 Emigration in die USA; dort Professor für Mathematik zunächst an der Yale University in

$$\forall a \forall r\, ((\mathrm{PO}(a,r) \wedge \forall b \exists c((b \subseteq a \wedge b \textit{ ist } r\textit{-Kette}) \to c \textit{ ist obere Schranke von } b)) \\ \longrightarrow \exists c\, (c \in a \wedge c \textit{ ist } r\textit{-maximal})).$$

Beweis. Zur Äquivalenz von (i), (ii) und (iii) siehe 3.34.

„(iii)⇒(iv)". Sei $a \in V$. Wir können o.E. annehmen, daß $\emptyset \notin a$ gilt. Definiere $g\colon a \to V$ durch $g(u) :\equiv u$ für $u \in a$. Nach (iii) ist $\bigtimes_{u \in x} g(u) \neq \emptyset$. Jedes $f \in \bigtimes_{u \in x} g(u)$ ist von der Art, wie für (iv) benötigt.

„(iv)⇒(i)". Sei a eine Menge nicht-leerer, disjunkter Mengen. Nach (iv) existiert $f\colon a \to V$ mit $f(u) \in u$ für alle $u \in a$. Da die Elemente von a disjunkt sind, ist $\mathrm{ran}(f)$ eine Menge, die jedes Element von a in genau einem Punkt trifft.

„(iv)⇒(vi)". Sei $a \in V$ beliebig. Idee: Wir wählen Elemente

$$F(0) \in a, \quad F(1) \in a\backslash\{F(0)\}, \quad F(2) \in a\backslash\{F(0), F(1)\}, \ \ldots\ , \ F(\alpha) \in a\backslash\{F(\beta) \mid \beta < \alpha\}, \ldots$$

solange, bis wir a ganz ausgeschöpft haben, und wählen für α den Zeitpunkt, an dem der Prozeß abbricht, d.h., für den $a = \{F(\beta) \mid \beta < \alpha\}$ gilt. Formal gehen wir so vor: Nach (iv) existiert eine Auswahlfunktion g für $\mathcal{P}(a)$, also $g\colon \mathcal{P}(a) \to V$ mit $g(u) \in u$ für $\emptyset \neq u \subseteq a$. Wir können o.E. $g(\emptyset) = a$ annehmen. Definiere rekursiv ein $F\colon \mathrm{On} \to a \cup \{a\}$ mit $F(\alpha) = g(a \setminus \{F(\beta) \mid \beta < \alpha\})$.

(1) $\exists \alpha\, F(\alpha) = a$.

Beweis. Angenommen, es gilt $F(\alpha) \neq a$ für alle $\alpha \in \mathrm{On}$. Dann gilt $F(\alpha) \in a\backslash\{F(\beta) \mid \beta < \alpha\}$ für alle α nach Definition von g, d.h., $F\colon \mathrm{On} \xrightarrow{inj.} a$. Wegen $\mathrm{ran}(F) \subseteq a$ ist $\mathrm{ran}(F) \in V$ nach **(Aus)**, und es gilt $F^{-1}\colon \mathrm{ran}(F) \xrightarrow{surj.} \mathrm{On}$. Aus letzterem folgt $\mathrm{On} \in V$ wegen **(Ers)**. Da $\mathrm{On} \notin V$ gilt, ergibt sich ein Widerspruch. qed(1)

Sei α minimal mit $F(\alpha) = a$.[5] Dann ist $F \restriction \alpha$ eine Funktion $f\colon \alpha \to a$. Diese ist bijektiv: Wegen $F(\alpha) = a$ ist

$$a \setminus \underbrace{\{F(\beta) \mid \beta < \alpha\}}_{=\mathrm{ran}(f)} = \emptyset,$$

also $a = \mathrm{ran}(f)$, d.h., f ist surjektiv; für $\gamma < \beta < \alpha$ ist $F(\beta) \in a \setminus \{F(\delta) \mid \delta < \beta\}$, also speziell $f(\beta) = F(\beta) \neq F(\gamma) = f(\gamma)$, d.h., f ist injektiv.

„(vi)⇒(v)". Sei $\alpha \in \mathrm{On}$ und $f \in V$ mit $f\colon a \xrightarrow{bij.} \alpha$. Dann ist $\{(x,y) \mid x \in a \wedge y \in a \wedge f(x) < f(y)\}$ eine Wohlordnung r auf a.

„(v)⇒(iv)". Sei $a \in V$. Sei r eine Wohlordnung auf $\bigcup a$. Wir definieren f derart, daß f aus jedem $u \in a$ das r-kleinste Element auswählt. Formal gehen wir dabei so vor: Da r eine Wohlordnung von $\bigcup a$ ist, ist durch

$$F :\equiv \{(u,y) \mid u \in a \wedge y \in u \wedge \forall x\, ((x \in u \wedge x \neq y) \to yrx)\} \cup \{(u,\emptyset) \mid u \in a \wedge u = \emptyset\}$$

New Haven (Conn.), dann an der Indiana University in Bloomington. Zorn veröffentlicht neben Arbeiten zur Algebra und Mengenlehre auch solche zur Analysis und Funktionalanalysis. Das nach ihm benannte Lemma wurde übrigens erstmals von Kuratowski formuliert und bewiesen und erst zwanzig Jahre später von Zorn wiederentdeckt.

[5] also $\alpha :\equiv \bigcap\{\beta \mid F(\beta) = a\}$: Zur Wahl von α wird **(AC)** *nicht* benötigt.

eine funktionale Klasse $F: a \to V$ definiert.[6] Für $u \in a$ mit $u \neq \emptyset$ gilt $F(u) \in u$. Wegen $\mathrm{dom}(F) \in V$ ist $F \in V$ nach 3.30, also eine Funktion wie für (iv) benötigt.

„(iv)$\Rightarrow$(vii)“. Die Menge a sei durch r induktiv geordnet.[7] Wir wollen eine r-Kette b konstruieren, die alle ihre oberen Schranken als Elemente enthält. Ist dann $c \in a$ irgendeine obere Schranke von b (wegen der Induktivität der Ordnung existiert ein solches c), so ist c r-maximales Element von a: ist nämlich $x \in a$ und crx, so ist x eine obere Schranke von b und nach Wahl von b gilt $x \in b$. Weil c obere Schranke von b ist, ergibt sich xrc. Insgesamt haben wir crx und xrc, was wegen der Antisymmetrie von r auf $c = x$ führt. Also ist c in der Tat r-maximal in a. Zu einer r-Kette der gewünschten Art kommen wir, indem wir mit der r-Kette $\emptyset$ starten und dann in jedem Schritt der Konstruktion zu der bereits konstruierten Kette eine ihrer oberen r-Schranken hinzunehmen solange, bis dieser Prozeß terminiert, d.h., zu keiner echten Erweiterung mehr führt. Formal gehen wir so vor: Nach (iv) existiert eine Auswahlfunktion g für $\mathcal{P}(a)$, also $g: \mathcal{P}(a) \to a \cup \{a\}$ mit $g(u) \in u$, falls $\emptyset \neq u \subseteq a$, und (o.E.) $g(\emptyset) = a$. Definiere rekursiv eine Funktion $F : \mathrm{On} \to a \cup \{a\}$ mit

$$F(\alpha) = g\Big(\{z \,|\, z \in a \setminus \{F(\beta) \,|\, \beta < \alpha\} \,\wedge\, z \text{ ist obere } r\text{-Schranke von } \{F(\beta) \,|\, \beta < \alpha\}\}\Big).$$

Dieselben Argumente, die zu (1) führen, zeigen, daß es $\alpha \in \mathrm{On}$ gibt mit $F(\alpha) = a$. Wähle α minimal mit $F(\alpha) = a$. (Im Beweis von (vi) haben wir gesehen, daß dies ohne **(AC)** möglich ist.) Dann ist $\{F(\beta) \,|\, \beta < \alpha\}$ eine r-Kette b: Ist nämlich $\gamma < \beta < \alpha$, so ist nach Konstruktion $F(\beta)$ eine obere r-Schranke von $\{F(\delta) \,|\, \delta < \beta\}$, speziell also $F(\gamma) r F(\beta)$. Aus $F(\alpha) = a$ folgt

$$\{z | z \in a \setminus \{F(\beta) \,|\, \beta < \alpha\} \,\wedge\, z \text{ ist obere } r\text{-Schranke von } \{F(\beta) \,|\, \beta < \alpha\}\} = \emptyset$$

und dies impliziert, daß b alle seine oberen r-Schranken als Element enthält. Also ist b wie benötigt.

„(vii)$\Rightarrow$(iv)“.[8] Sei $x \in V$. Sei

$$\begin{aligned} A :\equiv \ & \{g \mid g: \mathrm{dom}(g) \to V \,\wedge\, \mathrm{dom}(g) \subseteq x \\ & \wedge \forall u (u \in \mathrm{dom}(g) \to ((u \neq \emptyset \to g(u) \in u) \,\wedge\, (u = \emptyset \to g(u) = \emptyset)))\}. \end{aligned}$$

Dann ist $A \subseteq \mathcal{P}(x \times (\{\emptyset\} \cup \bigcup x))$, also $A \in V$. Die Menge A wird durch $\subseteq$ induktiv geordnet: Ist $b \subseteq A$ eine $\subseteq$-Kette, so ist $\bigcup b \in A$ und eine obere $\subseteq$-Schranke von b. Nach Zorn existiert somit ein $\subseteq$-maximales $f \in A$. Dann ist $f: \mathrm{dom}(f) \to V$ mit $f(u) \in u$ für alle $u \in \mathrm{dom}(f)$ mit $u \neq \emptyset$, und es gilt $\mathrm{dom}(f) \subseteq x$. Es bleibt $\mathrm{dom}(f) = x$ zu zeigen. Wäre $x \neq \mathrm{dom}(f)$, so gäbe es $u \in x \setminus \mathrm{dom}(f)$. Ist $u = \emptyset$ so ist $f' :\equiv f \cup \{(u, \emptyset)\}$ in A und eine echte Erweiterung von f; ist $u \neq \emptyset$, so ist $\emptyset \neq \{f \cup \{(u, y)\} \mid y \in u\} \subseteq A$ und jedes $f' \in \{f \cup \{(u, y)\} \mid y \in u\}$ ist eine echte Erweiterung von f in A. Dies widerspricht der $\subseteq$-Maximalität von f. Also gilt $x = \mathrm{dom}(f)$.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. QED

[6] Im Fall $u \in a$ und $u \neq \emptyset$ ist $F(u)$ das r-kleinste Element von u.

[7] vgl. 3.16

[8] Der folgende Beweis ist typisch für den Nachweis von Existenzaussagen m.H. des Lemmas von Zorn.

Bemerkung 6.2 Punkt (vi) des Satzes erlaubt es uns, jede Menge a mit Hilfe von Ordinalzahlen zu „zählen“. Dies ist der Grundstein für die Theorie der Kardinalzahlen, die wir im übernächsten Kapitel entwickeln werden. Einen ersten korrekten Beweis des Wohlordnungssatzes gab ZERMELO im Jahre 1904.

7 Kardinalzahlen.

7.1 Größenvergleiche bei Mengen.

Wann haben zwei Mengen x und y gleich viele Elemente? Eine vernünftige, erstmals von CANTOR (1878)[9] gegebene Antwort auf diese Frage ist: Die Mengen x und y haben gleich viele Elemente, wenn man den Elementen von x *umkehrbar eindeutig* die Elemente von y zuordnen kann. Eine Menge x hat „höchstens soviele Elemente“ wie eine Menge y, wenn man jedem Element von x ein Element von y derart zuordnen kann, daß je zwei verschiedenen Elementen von x auch verschiedene Elemente von y zugewiesen werden. Wir definieren deshalb:

Definition 7.1 Wir definieren:
(a) x und y sind **gleichmächtig** $:\equiv x \sim y :\equiv \exists f\, f\colon x \xrightarrow{bij.} y$.
(b) x **hat höchstens die Mächtigkeit von** $y :\equiv x \preceq y :\equiv \exists f\, f\colon x \xrightarrow{inj.} y$.

Man zeigt leicht die folgenden Eigenschaften von $\sim$ und $\preceq$:

Lemma 7.2 *Unter* **ZF** *gelten die folgenden Aussagen:*
(a) $\sim$ *ist eine Äquivalenzrelation auf* V.
(b) $\forall x, y\, (x \sim y \rightarrow (x \preceq y \wedge y \preceq x))$.
(c) $\preceq$ *ist reflexiv:* $\forall x\, x \preceq x$.
(d) $\preceq$ *ist transitiv:* $\forall x, y, z\, ((x \preceq y \wedge y \preceq z) \rightarrow x \preceq z)$.
(e) $\forall x, y\, (x \subseteq y \rightarrow x \preceq y)$.

Wir erwarten intuitiv, daß auch die Umkehrung von (b) gilt. CANTOR äußert eine dementsprechende Vermutung, FELIX BERNSTEIN[10] (noch Gymnasiast zu dieser Zeit) trägt 1897

[9] siehe [?], p.119

[10] FELIX BERNSTEIN (24.2.1878, Halle–3.12.1956, Zürich) ab 1896 Studium der Philosophie, Archäologie und Kunstgeschichte in Pisa und Rom sowie der Mathematik in München, Halle, Berlin und Göttingen; 1901 Promotion in Göttingen bei HILBERT und FELIX KLEIN; 1903 Habilitation in Halle; 1903–1907 Privatdozent; 1907 Leiter der mathematischen Klasse des ersten deutschen Seminars für Versicherungsmathematik in Göttingen; 1911 außerordentlicher Professor für Statistik in Göttingen; 1918 Direktor des von ihm gegründeten Instituts für mathematische Statistik; 1921 ordentlicher Professor für Versicherungsmathematik und mathematische Statistik an der Universität Göttingen; 1933 Visiting Professor an der Columbia-Universität New York; 1936 Ordinarius für Biometrie. BERNSTEIN nimmt schon als Gymnasiast in Halle am Seminar CANTORs teil, siehe Haupttext. Nach seiner Dissertation verlegt BERNSTEIN sein Arbeitsgebiet von der Mengenlehre hin zur praktischen Mathematik. Er untersucht auch außermathematische Fragen: Im Jahre 1924 entdeckt er den Vererbungsmechanismus der Blutgruppen A, B und 0.

einen Beweis dieser Vermutung in Cantors Seminar in Halle vor. Etwa gleichzeitig unternimmt Ernst Schröder[11] einen Beweisversuch, der jedoch Fehler aufweist.

Satz 7.3 (Satz von Cantor-Bernstein) *Unter* **ZF** *gilt* $\forall x, y\ ((x \preceq y \wedge y \preceq x) \longrightarrow x \sim y)$.

Beweis. Es genügt zu zeigen. daß gilt

(1) $\forall a, b, c\ ((a \subseteq b \wedge b \subseteq c \wedge a \sim c) \longrightarrow b \sim c)$.

Sind dann nämlich $f\colon x \xrightarrow{inj.} y$ und $g\colon y \xrightarrow{inj.} x$, so gilt $g \circ f[x] \subseteq g[y] \subseteq x$ und $x \sim g \circ f[x]$, was wegen (1) auf $x \sim g[y]$ führt. Da g injektiv ist, ist $g\colon y \xrightarrow{bij.} g[y]$, also $y \sim g[y]$. Aus $x \sim g[y]$ und $y \sim g[y]$ folgt $x \sim y$.

Beweis von (1). Sei $f\colon c \xrightarrow{bij.} a$ und d sei der Abschluß von $c \setminus b$ unter f, also $d = \bigcup_{n<\omega} f^n[c \setminus b]$, wobei die Funktionenfolge $(f^n \mid n < \omega)$ rekursiv definiert ist durch $f^0 :\equiv \mathrm{id} \restriction c$ und $f^{n+1} :\equiv f \circ f^n$, siehe Abbildung 8. Wegen $\mathrm{ran}(f) \subseteq a$ gilt

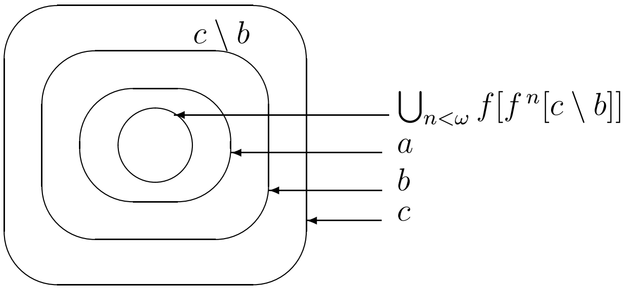


Abbildung 4: zum Beweis von 7.3

(∗) $$d = (c \setminus b) + \underbrace{\bigcup_{n<\omega} f[f^n[c \setminus b]]}_{\subseteq a \subseteq b}.^{12}$$

Definiere g durch

$$g(u) :\equiv \begin{cases} f(u), & \text{falls } u \in d \\ u, & \text{falls } u \in c \setminus d. \end{cases}$$

[11]Ernst Schröder (25.11.1841, Mannheim–16.6.1902, Karlsruhe) Studium der Mathematik und der Physik in Heidelberg, u.a. bei Ludwig Otto Hesse (22.4.1811, Königsberg–4.8.1874, München), Gustav Robert Kirchhoff (12.3.1824, Königsberg–17.10.1887, Berlin) und Karl Freiherr von Bunsen (25.8.1791, Korbach–28.11.1860, Bonn); 1862 Promotion, dann weitere Studien in Königsberg bis 1864; Habilitation in Zürich, danach als Lehrer in Pforzheim und Baden-Baden; ab 1876 ordentlicher Professor für Arithmetik, Trigonometrie und höhere Analysis an der TH Karlsruhe. Während seiner Zeit als Lehrer beschäftigt sich Bernstein hauptsächlich mit arithmetischen, analytischen und algebraischen Fragestellungen; in seine Professorenzeit fallen dann umfangreiche Untersuchungen zur algebraischen Logik.

[12]Das Symbol + bezeichnet hier die Vereinigung disjunkter Mengen.

Wir zeigen $g\colon c \xrightarrow{bij.} b$, was (1) beweist. Aus $(*)$ folgt zunächst $g\colon c \to b$. Die Funktion g ist injektiv, da $g \restriction d$ und $g \restriction c \setminus d$ injektive Funktionen mit disjunktem Wertebereich sind. Die Funktion g ist surjektiv. Um dies zu sehen, fixiere $v \in b$. Ist $v \in b \setminus d \subseteq c \setminus d$ so ist $v = g(v)$; ist $v \in b \cap d$, so existiert ein $u \in c \setminus b$ mit

$$v = f^{n+1}(u) = f(\underbrace{f^n(u)}_{\equiv:\, u' \in d}).$$

Also ist $v = g(u')$. In beiden Fällen gilt somit $v \in \operatorname{ran}(g)$, d.h., g ist surjektiv. Damit ist (1) bewiesen. qed(1)

Dies vervollständigt den Beweis des Satzes von Cantor-Bernstein. QED

7.2 Messung von Mächtigkeiten.

Die Familie der $\sim$-Äquivalenzklassen ist ein natürlicher Parameter für Größenunterscheidungen bei Mengen. Allerdings sind die $\sim$-Äquivalenzklassen i.a. echte Klassen.[13] Dieses Problem wäre gelöst, wenn wir aus jeder $\sim$-Äquivalenzklasse ein „ausgezeichnetes“ Objekt als Repräsentanten dieser Klasse auswählen könnten. Ein zweites Problem tritt auf, wenn wir versuchen, Größen von Mengen zu vergleichen. Wir wollen, daß die Größen von je zwei Mengen vergleichbar sind, daß also für Mengen x und y stets $x \preceq y$ oder $y \preceq x$ gilt. Dies ist, wenn wir nur **ZF** voraussetzen, i.a. nicht der Fall. Die Hinzunahme des Auswahlaxiomes löst unsere Probleme jedoch mit einem Schlag. Da nämlich in **ZFC** nach 6.1 jede Menge bijektiv auf eine Ordinalzahl abgebildet werden kann, haben wir einerseits einen kanonischen Repräsentanten für jede $\sim$-Äquivalenzklasse $[x]_\sim$, nämlich die kleinste Ordinalzahl, die zu $[x]_\sim$ gehört, und können andererseits je zwei Mengen größenmäßig vergleichen, indem wir die den entsprechenden $\sim$-Äquivalenzklassen zugeordneten Ordinalzahlrepräsentanten vergleichen.[14] **Wir setzen deshalb von nun an ZFC voraus.** Im Licht der eben gemachten Überlegungen definieren wir:

Definition 7.4 Die Ordinalzahl $\overline{\overline{x}} :\equiv \operatorname{card}(x) :\equiv \min([x]_\sim \cap \mathrm{On}) = \min\{\alpha \mid x \sim \alpha\}$ heißt die **Kardinalität** oder auch **Mächtigkeit** von x.

Definition 7.5 (a) Wir definieren: α ist eine **Kardinalzahl** $:\equiv \exists x\, \overline{\overline{x}} = \alpha$.

(b) Die Klasse $\mathrm{Cd} :\equiv \{\alpha \mid \alpha \text{ ist eine Kardinalzahl}\}$ ist die **Klasse der Kardinalzahlen**, $\mathrm{Card} :\equiv \{\alpha \mid \alpha \in \mathrm{Cd} \wedge \alpha \geq \omega\}$ ist die **Klasse der unendlichen Kardinalzahlen**.

[13] z.B. $[1]_\sim \supseteq \{\{V_\alpha\} \mid \alpha \in \mathrm{On}\} \notin V$.

[14] Um auch in **ZF** den Begriff der Kardinalzahl zu definieren, „verkleinert“ man die $\sim$-Äquivalenz*klassen* zu Äquivalenz*mengen*, indem man mit $\alpha(x) :\equiv \min\{\alpha \mid [x]_\sim \cap V_\alpha \neq \emptyset\}$ von $[x]_\sim$ übergeht zu $[x]_\sim \cap V_{\alpha(x)}$. Dieses Verfahren wird manchmal „Scotts Trick“ genannt und oft angewendet, um echte Klassen in Mengen zu transformieren. Die hier angegebene Definition geht zurück auf Dana Stewart Scott (geb. 11.10.1932, Berkeley, Ca.) (1955), vgl. etwa die Einleitung zu [?] (p.8). Natürlich hat dieser Kardinalzahlbegriff weitaus weniger angenehme Eigenschaften als der in **ZFC** zur Verfügung stehende.

(Unendliche) Kardinalzahlen bezeichnen wir i.a. mit den Buchstaben $\kappa, \lambda, \mu, \nu$. Kardinalzahlen sind gerade diejenigen Ordinalzahlen, die nicht auf eine kleinere Ordinalzahl bijektiv abgebildet werden können. (Solche Ordinalzahlen werden manchmal als „initiale Ordinalzahlen" bezeichnet.) Dieses und weitere fundamentale Resultate über Kardinalzahlen sind in folgendem Lemma zusammengestellt.

Lemma 7.6 *Es gilt:*
(a) $\alpha \in \mathrm{Cd} \longleftrightarrow \forall \beta < \alpha \neg \beta \sim \alpha.$
(b) $\alpha \in \mathrm{Cd} \longleftrightarrow \alpha = \overline{\overline{\alpha}}.$
(c) $\alpha \in \mathrm{Card} \longrightarrow \mathrm{Lim}(\alpha).$

Beweis. zu (a). „$\Rightarrow$". Sei $\alpha = \overline{\overline{x}}$. Gäbe es $\beta < \alpha$ mit $\beta \sim \alpha$, so wäre $\beta \sim x$ im Widerspruch zu $\alpha = \min\{\gamma \mid x \sim \gamma\}$.
„$\Leftarrow$". Es ist $\alpha = \min\{\beta \mid \alpha \sim \beta\}$.
zu (b). Dies folgt leicht aus (a).
zu (c). Wäre $\alpha = \beta + 1$, so wäre durch

$$f(\gamma) :\equiv \begin{cases} \gamma + 1, & \text{falls } \gamma \in \omega \\ \gamma, & \text{falls } \omega \leq \gamma < \beta \\ 0, & \text{falls } \gamma = \beta \end{cases}$$

eine Bijektion $f\colon \alpha \xrightarrow{bij.} \beta$ gegeben. Dies widerspricht (a).
Damit ist das Lemma bewiesen. QED

Die Aussagen des nächsten Lemmas setzen die Kardinalitäten von zwei Mengen in Verbindung mit der Existenz von Abbildungen zwischen diesen Mengen.

Lemma 7.7 *Seien $x, y \in V$. Dann gilt:*
(a) $\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}} \longleftrightarrow x \sim y.$
(b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent
  (i) $\overline{\overline{x}} \leq \overline{\overline{y}}.$
  (ii) $\exists f\, f\colon x \xrightarrow{inj.} y$, *d.h.*, $x \preceq y.$
  (iii) $\exists f\, f\colon y \xrightarrow{surj.} x.$

Beweis. zu (a). „$\Rightarrow$". Es gilt $x \sim \overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}} \sim y$, also $x \sim y$ wegen der Transitivität von $\sim$.
„$\Leftarrow$". Es ist $x \sim y$ gleichwertig mit $[x]_\sim = [y]_\sim$, also $\overline{\overline{x}} = \min([x]_\sim \cap \mathrm{On}) = \min([y]_\sim \cap \mathrm{On}) = \overline{\overline{y}}$.
zu (b). „(i)$\Rightarrow$(ii)". Sei $g\colon x \xrightarrow{bij.} \overline{\overline{x}}$ und $h\colon \overline{\overline{y}} \xrightarrow{bij.} y$. Setze $f :\equiv h \circ g$. Dann ist $f\colon x \xrightarrow{inj.} y$.
„(ii)$\Rightarrow$(iii)". Sei $g\colon x \xrightarrow{inj.} y$. Ist $x = \emptyset$, so ist $\emptyset\colon y \xrightarrow{surj.} x$. Sei also $x \neq \emptyset$ vorausgesetzt. Setze $a :\equiv \mathrm{ran}(g)$. Dann ist $g^{-1}\colon a \xrightarrow{bij.} x$, so daß $f :\equiv g^{-1}$ im Fall $a = y$ das Gewünschte leistet. Im Fall $a \neq y$ wähle mit **(AC)** ein $v_0 \in x$ und setze

$$f(u) :\equiv \begin{cases} g^{-1}(u), & \text{falls } u \in a \\ v_0, & \text{falls } u \in y \setminus a. \end{cases}$$

Dann gilt $f\colon y \overset{surj.}{\longrightarrow} x$.
„(iii)⇒(ii)". Sei $g\colon y \overset{surj.}{\longrightarrow} x$. Wir definieren f so, daß f jedem $u \in x$ ein Urbild von u unter g zuordnet. (Ein solches existiert, da $\mathrm{ran}(g) = x$ ist.) Formal geschieht das wie folgt: $a :\equiv \{g^{-1}[\{u\}] \mid u \in x\}$ ist eine Menge paarweise disjunkter Mengen, die wegen der Surjektivität von g sämtlich nicht leer sind. Sei h eine Auswahlfunktion für a. D.h., es ist $h\colon a \to y$ mit $h(z) \in z$ für alle $z \in a$. Definiere $f\colon x \to y$ durch $f(u) :\equiv h(g^{-1}[\{u\}])$. Man sieht leicht, daß f injektiv ist.
„(ii)⇒(i)". Sei $f\colon x \overset{inj.}{\longrightarrow} y$. Sei $g\colon y \overset{bij.}{\longrightarrow} \overline{\overline{y}}$. Dann ist $h :\equiv g \circ f\colon x \overset{inj.}{\longrightarrow} \overline{\overline{y}}$. Es sei $\beta :\equiv \mathrm{otp}(\mathrm{ran}(h))$ und $\pi\colon \mathrm{ran}(h) \overset{bij.}{\longrightarrow} \beta$ sei der Mostowski-Isomorphismus. Wegen $\mathrm{ran}(h) \subseteq \overline{\overline{y}}$ ist $\beta \leq \overline{\overline{y}}$, siehe **??**. Dann ist $h' :\equiv \pi \circ h\colon x \overset{g\circ f=h}{\longleftrightarrow} \mathrm{ran}(h) \overset{\pi}{\longleftrightarrow} \beta$ eine Bijektion von x auf β. Nach Definition von $\overline{\overline{x}}$ muß dann $\overline{\overline{x}} \leq \beta$ sein. Da, wie gesehen, $\beta \leq \overline{\overline{y}}$ ist, folgt insgesamt folgt $\overline{\overline{x}} \leq \overline{\overline{y}}$.
Damit ist das Lemma bewiesen. QED

Corollar 7.8 *Es gilt* $\alpha < \beta \longrightarrow \overline{\overline{\alpha}} \leq \overline{\overline{\beta}}$.

Die Klasse der Kardinalzahlen ist unter der Vereinigung von Teilmengen abgeschlossen:

Lemma 7.9 *Es gilt:*
(a) $x \subseteq \mathrm{Cd} \longrightarrow \bigcup x \in \mathrm{Cd}$.
(b) $(x \subseteq \mathrm{Card} \wedge x \neq \emptyset) \longrightarrow \bigcup x \in \mathrm{Card}$.

Beweis. zu (a). Wir zeigen zunächst, daß $\bigcup x$ eine Ordinalzahl ist. Da $\bigcup x \in V$ gilt und die einzigen transitiven Teilmengen von On die Ordinalzahlen sind, siehe **??**, genügt es zu zeigen, daß $\bigcup x$ transitiv ist. Hierzu fixiere $u \in v \in \bigcup x$. Dann existiert eine Ordinalzahl $\alpha \in x$ mit $u \in v \in \alpha$. Da α transitiv ist, folgt $u \in \alpha$ und somit $u \in \bigcup x$. Also ist $\bigcup x$ eine Ordinalzahl λ. Wir zeigen $\lambda \in \mathrm{Cd}$, indem wir $\lambda = \overline{\overline{\lambda}}$ nachweisen.
zu $\geq$. Dies ist klar.
zu $\leq$. Sei $\alpha < \lambda$. Nach Definition von λ existiert dann eine Kardinalzahl $\kappa \in x$ mit $\alpha < \kappa$. Wegen $\kappa \in x$ ist $\kappa \leq \lambda$. Also ergibt sich $\alpha < \kappa = \overline{\overline{\kappa}} \leq \overline{\overline{\lambda}}$.
zu (b). Nach (a) ist $\bigcup x \in \mathrm{Cd}$. Wegen $x \neq \emptyset$ existiert $\kappa \in x$. Dann gilt $\kappa \geq \omega$ (wegen $x \subseteq \mathrm{Card}$) und $\kappa \leq \bigcup x$. Also ist $\omega \leq \bigcup x$.
Damit ist das Lemma bewiesen. QED

Wir können nun bereits gewisse Ordinalzahlen als Kardinalzahlen identifizieren:

Satz 7.10 *Es gilt:*
(a) $\omega \subseteq \mathrm{Cd}$.
(b) $\omega \in \mathrm{Card}$.

Beweis. zu (a). Wir zeigen durch Induktion nach $n < \omega$:

(1) $\forall m < n\, \neg\, m \sim n$.

$n = 0$. Dies ist klar.
$n = l + 1$. Angenommen es wäre $f: m \xrightarrow{bij.} n$ für ein $m < n$. Wegen $n \neq 0$ ist $m \neq 0$, d.h., es existiert ein $k < \omega$ mit $m = k + 1$. Es ist $k < l < n$ wegen $m < n = l + 1$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:
Fall 1. $f(k) = l$. In diesem Fall ist $f \restriction k: k \xrightarrow{bij.} l$, was der Induktionsvoraussetzung widerspricht.
Fall 2. $f(i_0) = l$ für ein $i_0 < k$. Durch

$$g(i) :\equiv \begin{cases} f(i), & \text{falls } i < k,\ i \neq i_0 \\ f(k), & \text{falls } i = i_0 \end{cases}$$

ist dann eine Bijektion $g: k \xrightarrow{bij.} l$ gegeben, was der Induktionsvoraussetzung widerspricht.

Somit ist (1) und damit auch (a) bewiesen.

zu (b). Weil $\omega \subseteq \mathrm{Cd}$ und Cd unter Vereinigung von Teilmengen abgeschlossen ist, folgt (b) aus

(2) $\quad \bigcup \omega = \omega$.

Beweis. „$\subseteq$“. Sei $u \in \bigcup \omega$. Dann ist $u \in n$ für ein $n \in \omega$. Da ω transitiv ist, folgt hieraus $u \in \omega$.
„$\supseteq$“. Ist $n \in \omega$, so ist $n \in n + 1 \in \omega$ und deshalb $n \in \bigcup \omega$. qed(2)

Damit ist der Satz bewiesen. QED

7.3 Endliche, abzählbare und überabzählbare Mengen.

Wir nennen eine Menge a endlich, wenn es eine natürliche Zahl n gibt, so daß a genau n Elemente enthält; a ist abzählbar, wenn a gleichmächtig zur Menge der natürlichen Zahlen ist, und überabzählbar, wenn a weder endlich noch abzählbar ist.

Definition 7.11 Sei $a \in V$. Definiere

(a) a ist **endlich** $:\equiv \overline{\overline{a}} < \omega$.

(b) a ist **unendlich** $:\equiv \overline{\overline{a}} \geq \omega$.

(c) a ist **abzählbar** $:\equiv \overline{\overline{a}} = \omega$.

(d) a ist **höchstens abzählbar** $:\equiv \overline{\overline{a}} \leq \omega$.

(e) a ist **überabzählbar** $:\equiv \overline{\overline{a}} > \omega$.

Lemma 7.12 *Seien a und b endliche Mengen und es sei $x \in V$. Dann gilt:*

(a) Die Mengen $a \cup \{x\}$ und $a \cup b$ sowie $a \cap b$ und $a \times b$ sowie $a \setminus b$ und $\mathcal{P}(a)$ sind endlich. Es ist $\overline{\overline{\mathcal{P}(a)}} = 2^{\overline{\overline{a}}}$.

(b) Wenn gilt $\forall z(z \in a \to z$ ist endlich$)$, so sind $\bigcup a$ und $\mathsf{X}_{z \in a}\, z$ endlich.

(c) Jede Teilmenge einer endlichen Menge ist endlich.

Beweis. zu (a). Ist $x \in a$, so ist $\overline{\overline{a \cup \{x\}}} = \overline{\overline{a}} < \omega$. Ist $x \notin a$ und $f\colon a \xrightarrow{bij.} \overline{\overline{a}}$, so ist durch

$$g(u) :\equiv \begin{cases} f(u), & \text{falls } u \in a \\ \overline{\overline{a}}, & \text{falls } u = x \end{cases}$$

eine Bijektion zwischen $a \cup \{x\}$ und $\overline{\overline{a}} + 1$ gegeben; hieraus folgt $\overline{\overline{a \cup \{x\}}} \leq \overline{\overline{a}} + 1 < \omega$.
Die Endlichkeit von $a \cup b$ wird durch Induktion nach $\overline{\overline{b}} < \omega$ bewiesen: Ist $\overline{\overline{b}} = 0$, so ist $b = \emptyset$ und $a \cup b = a$ ist endlich. Ist $\overline{\overline{b}} > 0$, so wähle $x_0 \in b$. Dann ist $\overline{\overline{b \setminus \{x_0\}}} < \overline{\overline{b}}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $a \cup (b \setminus \{x_0\})$ endlich, so daß nach dem bereits bewiesenen $a \cup b = (a \cup (b \setminus \{x_0\})) \cup \{x_0\}$ endlich ist.
Die Endlichkeit von $a \times b$ wird unter Benutzung des bereits gezeigten ebenfalls durch Induktion nach $\overline{\overline{b}}$ bewiesen. Beachte $a \times \emptyset = \emptyset$ und $a \times b = (a \times (b \setminus \{x_0\})) \cup (a \times \{x_0\})$, falls $x_0 \in b$.
Die Aussagen über die Endlichkeit der Komplementmenge und der Schnittmenge folgen aus (c).
Um die Aussage über die Kardinalität der Potenzmenge zu zeigen, genügt es, durch Induktion nach $n < \omega$ zu verifizieren:

(1) $\overline{\overline{\mathcal{P}(n)}} = 2^n$.

Dies ist richtig für $n = 0$ ($\mathcal{P}(0) = \{\emptyset\}$). Im Fall $n = k+1$ ist $\mathcal{P}(n) = \mathcal{P}(k) \cup \{u \cup \{k\} \mid u \in \mathcal{P}(k)\}$, und man sieht leicht, daß die Menge auf der rechten Seite des $=$-Zeichens die Kardinalität $2^k + 2^k = 2^{k+1} = 2^n$ hat.

zu (b). Durch Induktion über $\overline{\overline{a}}$ folgt die Endlichkeit von $\bigcup a$: Ist $\overline{\overline{a}} = 0$, so ist $a = \bigcup a = \emptyset$. Ist $\overline{\overline{a}} > 0$, so sei $x_0 \in a$. Es ist $\overline{\overline{a \setminus \{x_0\}}} < \overline{\overline{a}}$ und $\bigcup a = \bigcup(a \setminus \{x_0\}) \cup x_0$ ist wegen der Induktionsvoraussetzung eine Vereinigung von zwei endlichen Mengen, also nach (a) endlich.
Die Aussage über $\bigtimes_{z \in a} z$ folgt wegen

$$\bigtimes_{z \in a} z = \{f \mid f\colon a \to \bigcup a \wedge \forall z(z \in a \to f(z) \in z)\} \subseteq \mathcal{P}(a \times \bigcup a)$$

aus dem bereits bewiesenen und (c).

zu (c). Sei $u \subseteq a$. Durch die Inklusion ist dann eine injektive Funktion $u \xrightarrow{inj.} a$ gegeben. Also ist $\overline{\overline{u}} \leq \overline{\overline{a}} < \omega$.

Damit ist das Lemma bewiesen. QED

Wir charakterisieren die Endlichkeit einer Menge a durch Aussagen über den Zusammenhang zwischen der Injektivität und der Surjektivität von Abbildungen $a \to a$. Wir beginnen mit dem Nachweis notwendiger Bedingungen:

Satz 7.13 *Es gelte* **ZF**. *Sei $a \in V$ endlich. Dann gilt:*

(a) $\forall f\ (f\colon a \xrightarrow{inj.} a \longrightarrow f\colon a \xrightarrow{surj.} a)$. *In Worten: Jede Injektion von a in a ist surjektiv.*

(b) $\forall f\ (f{:}\,a \xrightarrow{surj.} a \longrightarrow f{:}\,a \xrightarrow{inj.} a)$. *In Worten: Jede Surjektion von a auf a ist injektiv.*

Beweis. zu (a). O.E. Sei $a = n < \omega$. Wir beweisen (a) durch Induktion nach n.
$n = 0$. In diesem Fall ist $f = \emptyset{:}\,\emptyset \to \emptyset$; also ist f surjektiv.
$n = k + 1$. Angenommen, f ist nicht surjektiv. Wir können dann o.E. annehmen, daß $k \notin \mathrm{ran}(f)$ ist. (Ansonsten wähle $k_0 \in n \setminus \mathrm{ran}(f)$ und gehe über von f zu f', das wie folgt definiert ist:

$$f'(i) :\equiv \begin{cases} f(i), & \text{falls } f(i) \neq k \\ k_0, & \text{falls } f(i) = k. \end{cases}$$

Dann gilt $f'{:}\,n \xrightarrow{inj.} n$ und es ist $k \notin \mathrm{ran}(f')$.) Nun ist $f \restriction k{:}\,k \xrightarrow{inj.} k$, also nach Induktionsvoraussetzung $\mathrm{ran}(f \restriction k) = k$. Wegen $k \notin \mathrm{ran}(f)$ ist $f(k) < k$, also $f(k) \in \mathrm{ran}(f \restriction k)$. Somit existiert ein $l < k$ mit $f(k) = f(l)$. Dies widerspricht der Injektivität von f. Also muß f doch surjektiv sein.

zu (b). Wir nehmen wieder o.E. $a = n \in \omega$ an und beweisen (b) durch Induktion nach n.
$n = 0$. Dann ist $f = \emptyset$ und injektiv.
$n = 1$. Die einzige Abbildung von $1 = \{0\}$ auf 1 ist die Identität; diese ist injektiv und surjektiv.
$n = k + 1$ mit $k \geq 1$. Angenommen, f ist nicht injektiv. Wir modifizieren f wie folgt: Definiere $f'{:}\,n \to n$ durch

$$f'(i) :\equiv \begin{cases} f(i), & \text{falls } f(i) \notin \{f(k), k\} \\ f(k), & \text{falls } f(i) = k \\ k, & \text{falls } f(i) = f(k). \end{cases}$$

Dann ist $f'(k) = k$, und mit f ist auch f' nicht injektiv. Ist $f'(l) \neq k$ für $l < k$, so ist $f' \restriction k{:}\,k \xrightarrow{surj.} k$ und nicht injektiv. Dies widerspricht der Induktionsvoraussetzung. Ist $f'(l) = k$ für ein $l < k$, so fixieren wir solches l und führen die folgende Modifikation durch: Definiere $f''{:}\,n \to n$ durch

$$f''(i) :\equiv \begin{cases} f'(i), & \text{falls } i \neq k \text{ und } f'(i) \neq k \\ 0, & \text{falls } i \neq k \text{ und } f'(i) = k \\ f'(k), & \text{falls } i = k. \end{cases}$$

Dann ist f'' surjektiv, $f''(i) < k$ für $i < k$ und $f''(l) = 0$ sowie $f''(k) = k$. Die Funktion $f'' \restriction k$ ist nicht injektiv: Um dies zu sehen wähle $i_0 < n$ mit $f'(i_0) = 0$. Dann ist $i_0 < k$ und $i_0 \neq l$ wegen $f'(l) = f'(k) = k > 0$. Aus der Definition von f'' folgt $f''(i_0) = 0$. Andererseits ist auch $f''(l) = 0$, also $f'' \restriction k$ nicht injektiv. Aus dem bisher über f'' gesagten folgt aber $f'' \restriction k{:}\,k \xrightarrow{surj.} k$. Dies widerspricht der Induktionsvoraussetzung.
Damit ist der Satz bewiesen. QED

Unter **ZFC** können wir auch die Umkehrung des letzten Satzes beweisen:

Satz 7.14 *Sei $a \in V$ unendlich. Dann gilt:*

(a) $\exists f\ f\colon \omega \xrightarrow{inj.} a$.

(b) $\exists f\ (f\colon a \xrightarrow{inj.} a \wedge \neg f\colon a \xrightarrow{surj.} a)$.

(c) $\exists f\ (f\colon a \xrightarrow{surj.} a \wedge \neg f\colon a \xrightarrow{inj.} a)$.

Beweis. zu (a). Die Unendlichkeit von a impliziert $\overline{\overline{\omega}} \leq \overline{\overline{a}}$ und dieses zieht $\omega \preceq a$ nach sich. Dies wird gerade in (a) behauptet.
zu (b), (c) Sei $\kappa :\equiv \overline{\overline{a}}$. Wir können o.E. $a = \kappa$ annehmen. Wegen $\kappa \geq \omega$ ist durch

$$f(\alpha) :\equiv \begin{cases} \alpha + 1, & \text{falls } \alpha < \omega \\ \alpha, & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine Injektion von a auf a gegeben, die nicht surjektiv ist und durch

$$g(\alpha) :\equiv \begin{cases} 0, & \text{falls } \alpha = 0 \text{ oder } \alpha = 1 \\ \alpha - 1, & \text{falls } 1 < \alpha < \omega \\ \alpha, & \text{sonst,} \end{cases}$$

ist eine Surjektion von a auf a gegeben, die nicht injektiv ist.
Damit ist der Satz bewiesen. QED

Insgesamt haben wir also unter **ZFC** das folgende Resultat:

Satz 7.15 *Sei $a \in V$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *a ist endlich.*

(ii) $\forall f\ (f\colon a \xrightarrow{inj.} a \longrightarrow f\colon a \xrightarrow{surj.} a)$.

(iii) $\forall f (f\colon a \xrightarrow{surj.} a \longrightarrow f\colon a \xrightarrow{inj.} a)$.

Bemerkung 7.16 Dieser Satz ermöglicht es, den Begriff der endlichen Menge ohne Bezug auf Kardinalzahlen zu definieren. Eine derartige Definition des Endlichkeitsbegriffes stammt von Dedekind (1888): Man nennt eine Menge a **Dedekind-endlich**, wenn jede Injektion $f\colon a \to a$ auch surjektiv ist, d.h., wenn (ii) des obigen Satzes gilt. Wir haben bewiesen, daß der Dedekindsche Endlichkeitsbegriff zu dem von uns gewählten äquivalent ist. Hierbei sind wir nicht ohne das Auswahlaxiom ausgekommen. In der Tat kann man zeigen, daß diese Äquivalenz auf der Basis **ZF** (also ohne Auswahlaxiom) *nicht* beweisbar ist.

Das folgende Resultat widerspricht unserer an endliche Objekte angepaßten Erfahrung, da es aussagt, daß im Bereich der unendlichen Mengen ein echter Teil eines Ganzen gleich groß sein kann wie das Ganze selbst.

Corollar 7.17 *Es gilt: a ist unendlich $\longleftrightarrow \exists u\, (u \subseteq a \wedge u \neq a \wedge u \sim a)$.*

Beweis. „⇒“. Sei $f\colon a \to a$ eine Injektion, die nicht surjektiv ist. Setze $u :\equiv f[a]$. Dann ist $u \subseteq a$ und $u \neq a$. Ferner ist $a \sim u$ wegen $f\colon a \xrightarrow{bij.} u$.
„⇐“. Eine Bijektion $f\colon a \xrightarrow{bij.} u$ kann als Injektion $f\colon a \xrightarrow{inj.} a$ aufgefaßt werden. Wegen $u \neq a$ ist f nicht surjektiv. QED

7.4 Die Klasse Card der Kardinalzahlen.

Bis jetzt wissen wir wenig über die Klassen Cd und Card. In der Tat haben wir bisher keine Aussage darüber, ob Card neben ω überhaupt noch irgendeine andere Ordinalzahl enthält. Daß dies der Fall ist, wird sich aus folgendem Satz ergeben, der die für endliche Mengen gezeigte Eigenschaft, daß die Potenzmenge einer endlichen Menge a nicht gleichmächtig zur Menge a selbst ist, auf unendliche Mengen verallgemeinert.

Satz 7.18 (Satz von Cantor) *Es gilt* $\forall x\, x \not\sim \mathcal{P}(x)$.

Beweis. Angenommen, es ist $x \sim \mathcal{P}(x)$. Dann existiert $f\colon x \xrightarrow{bij.} \mathcal{P}(x)$. Sei

$$u :\equiv \{y \mid y \in x \wedge y \notin f(y)\}.$$

Wegen $u \in \mathcal{P}(x)$ ist $u = f(y)$ für ein $y \in x$. Es ist $y \in f(y)$ gleichwertig mit $y \in u$, und dies ist äquivalent zu $y \notin f(y)$. Dieser Widerspruch zeigt, daß $x \sim \mathcal{P}(x)$ nicht gelten kann. QED

Bemerkung 7.19 Das im Satz von Cantor angewendete Beweisverfahren ist eine Version des Cantorschen Diagonalverfahrens, das Cantor im Jahre 1891 in einem Vortrag mit dem Titel „Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre“ vorstellte, siehe auch [?], pp.278–281. Um das *Diagonalargument* dieses Beweises zu verdeutlichen, stellen wir uns eine Matrix $A = (a_{y,z})_{y,z\in x}$ vor, wobei

$$a_{y,z} = \begin{cases} 1, & \text{falls } y \in f(z) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Die Funktion $\chi_z :\equiv (a_{y,z} \mid y \in x)$ ist also die charakteristische Funktion von $f(z)$.) Durch die *Diagonale* der Matrix ist die Funktion $\chi\colon y \mapsto a_{y,y} (= \chi_y(y))$ gegeben. Die Funktion $1-\chi$ ist charakteristische Funktion einer Teilmenge u von x. Wegen $1-\chi(z) = 1-\chi_z(z) \neq \chi_z(z)$ ist aber $1-\chi \neq \chi_z$ für jedes $z \in x$, und somit $u \notin \{f(z) \mid z \in x\}$, d.h., f ist nicht surjektiv.

Corollar 7.20 *Es gilt* $\forall x\, \overline{\overline{x}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(x)}}$.

Beweis. Da durch $i \mapsto \{i\}$ eine Injektion von x in $\mathcal{P}(x)$ definiert ist, ist $\overline{\overline{x}} \leq \overline{\overline{\mathcal{P}(x)}}$. Nach dem Satz von Cantor ist andererseits $\overline{\overline{x}} \neq \overline{\overline{\mathcal{P}(x)}}$. QED

Corollar 7.21 *Die Klasse der Kardinalzahlen ist nicht beschränkt in der Klasse der Ordinalzahlen:* $\forall\alpha \in \mathrm{On}\ \exists\kappa \in \mathrm{Card}\ \alpha < \kappa$. *Insbesondere ist* Card *eine echte Klasse.*

BEWEIS. O.E. sei $\alpha \geq \omega$ (sonst betrachte ω statt α). Sei $\kappa :\equiv \overline{\overline{\mathcal{P}(\alpha)}}$. Wäre $\kappa \leq \alpha$, so wäre $\kappa = \overline{\overline{\kappa}} \leq \overline{\overline{\alpha}}$, also $\overline{\overline{\mathcal{P}(\alpha)}} \leq \overline{\overline{\alpha}}$ im Widerspruch zu 7.20. Wäre schließlich $\mathrm{Card} \in V$, so wäre $\kappa :\equiv \bigcup \mathrm{Card} \in \mathrm{Cd}$ nach 7.9. Nach dem bereist gezeigten gibt es $\lambda \in \mathrm{Card}$ mit $\lambda > \kappa$. Aus $\lambda \in \mathrm{Card}$ folgt aber $\lambda \leq \bigcup \mathrm{Card} = \kappa$, ein Widerspruch. QED

Bemerkung 7.22 Wir bemerken ohne Beweis, daß 7.21 in Abwesenheit des Potenzmengenaxioms nicht gilt.

Da es zu jeder Ordinalzahl eine größere Kardinalzahl gibt, können wir von der kleinsten dieser Kardinalzahlen sprechen. Wir definieren:

Definition 7.23 Für jede Ordinalzahl α setze $\alpha^+ :\equiv \min\{\kappa \,|\, \kappa \in \mathrm{Card} \wedge \kappa > \alpha\}$. Im Fall $\alpha \in \mathrm{Card}$ heißt α^+ der **kardinale Nachfolger** von α.

Bemerkung 7.24 Für $\alpha < \omega$ ist $\alpha^+ = \omega$; für $\alpha \geq \omega$ ist $\alpha^+ > \alpha + 1,\ \alpha + \omega,\ \alpha + \alpha,\ \alpha \cdot \omega,\ \alpha \cdot \alpha,\ \alpha^\alpha, \ldots$. Hierbei bezeichnen $+$ und $\cdot$ sowie Exponentiation die jeweiligen Ordinalzahloperationen.

Ähnlich wie bei Ordinalzahlen können wir nun zwei verschiedene Arten von Kardinalzahlen unterscheiden, nämlich Nachfolgerkardinalzahlen und Limeskardinalzahlen:

Definition 7.25 Sei $\kappa \in \mathrm{Card}$. Definiere

(a) κ ist eine **Nachfolgerkardinalzahl** $:\equiv \exists\lambda \in \mathrm{Card}\ \kappa = \lambda^+$.

(b) κ ist eine **Limeskardinalzahl** $:\equiv \neg\,\exists\lambda \in \mathrm{Card}\ \kappa = \lambda^+$.

Bemerkung 7.26 Beachten Sie, daß auch eine Nachfolger*kardinal*zahl eine Limes*ordinal*zahl ist, siehe 7.6.

Beispiel 7.27 Die Ordinalzahl ω ist eine Limeskardinalzahl; für $\lambda \in \mathrm{Card}$ gilt nämlich $\lambda \geq \omega$ und somit $\lambda^+ > \omega$.

Das folgende Lemma rechtfertigt die Bezeichnung *Limes*kardinalzahl:

Lemma 7.28 *Sei* $\kappa \in \mathrm{Card}$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) κ *ist eine Limeskardinalzahl.*

(ii) $\kappa = \sup\{\lambda \,|\, \lambda \in \mathrm{Cd} \wedge \lambda < \kappa\}$.

BEWEIS. „(i)⇒(ii)“. Sei $\kappa \in \mathrm{Card}$ eine Limeskardinalzahl. Ist $\kappa = \omega$, so ist $\{\lambda \,|\, \lambda \in \mathrm{Cd} \wedge \lambda < \kappa\} = \omega$ und die Behauptung folgt aus $\omega = \sup \omega$. Ist $\kappa > \omega$, so ist $\omega \in \{\lambda \,|\, \lambda \in \mathrm{Cd} \wedge \lambda < \kappa\}$ und somit

$$\sup\{\lambda \,|\, \lambda \in \mathrm{Cd} \wedge \lambda < \kappa\} = \sup\{\lambda \,|\, \lambda \in \mathrm{Card} \wedge \lambda < \kappa\}.$$

Sei $x :\equiv \{\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Card} \wedge \lambda < \kappa\}$. Dann ist $\omega \in x$ und $\mu :\equiv \bigcup x \in \mathrm{Card}$, da Card nach 7.9 unter der Vereinigung von nicht-leeren Teilmengen abgeschlossen ist. Offenbar ist $\mu \leq \kappa$. Wäre $\mu < \kappa$, so wäre auch $\mu^+ < \kappa$, da κ eine Limeskardinalzahl ist. Also $\mu^+ \in x$, d.h., $\mu^+ \leq \mu$, ein Widerspruch. Damit ist $\mu = \kappa$ bewiesen, und dies war zu zeigen.

„(ii)$\Rightarrow$(i)“. Es ist $\kappa = \mu^+$ nur für $\mu < \kappa$ möglich. Falls $\kappa = \mu^+$ wäre also $\kappa = \sup\{\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Cd} \wedge \lambda < \kappa\} = \sup\{\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Cd} \wedge \lambda \leq \mu\} = \mu < \kappa$, ein Widerspruch. Also ist κ eine Limeskardinalzahl. QED

Mit Hilfe der Ordinalzahlen können wir die Klasse Card aufzählen. Dies wird von der $\aleph$-Hierarchie geleistet, die wir nun rekursiv definieren.[15] Definition und Bezeichnung der $\aleph$-Hierarchie gehen auf Cantor zurück.

Definition 7.29 Definiere rekursiv eine funktionale Klasse $\aleph \colon \mathrm{On} \to V$ mit

(i) $\aleph_0 = \omega$,

(ii) $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$,

(iii) $\aleph_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} \aleph_\alpha$, falls $\mathrm{Lim}(\delta)$.

Wir schreiben $\aleph_\alpha$ statt $\aleph(\alpha)$.

Satz 7.30 *Es gilt:*

(a) $\alpha < \beta \longrightarrow \aleph_\alpha < \aleph_\beta$.

(b) $\mathrm{Card} = \{\aleph_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{On}\}$.

Beweis. zu (a). Dies beweist man leicht durch Induktion nach β unter Benutzung der Ungleichung $\gamma^+ > \gamma$.

zu (b) „$\supseteq$“. Durch Induktion nach α zeigt man $\aleph_\alpha \in \mathrm{Card}$. Man benutzt $\kappa^+ \in \mathrm{Card}$ im Nachfolgerschritt und $\bigcup x \in \mathrm{Card}$ für $x \subseteq \mathrm{Card}$ im Limesschritt.

„$\subseteq$“. Sei $\kappa \in \mathrm{Card}$. Wir können $\kappa > \omega$ annehmen wegen $\aleph_0 = \omega$.

(1) $\exists \beta \in \mathrm{On}\ \aleph_\beta \geq \kappa$.

Beweis. Angenommen nicht. Dann ist $A :\equiv \{\aleph_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{On}\} \subseteq \kappa$, also nach **(Aus)** eine Menge. Andererseits ist durch $\alpha \mapsto \aleph_\alpha$ wegen (a) eine Bijektion $\aleph \colon \mathrm{On} \xrightarrow{bij.} A$ gegeben, so daß nach **(Ers)** $\mathrm{On} \in V$ gilt, was nicht der Fall ist. Also muß (1) doch richtig sein. qed(1)

Sei nun $\alpha :\equiv \min\{\beta \mid \aleph_\beta \geq \kappa\}$. Dann gilt

(2) $\kappa = \aleph_\alpha$.

Beweis. Angenommen nicht. Dann gilt

$(*)$ $\beta < \alpha \longrightarrow \aleph_\beta < \kappa < \aleph_\alpha$.

[15] $\aleph$, lies: alef [mit Betonung auf dem a], ist der erste Buchstabe des hebräischen Alphabetes.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:
Fall 1. $\alpha = \beta + 1$. Aus $(*)$ folgt dann $\aleph_\alpha = \aleph_\beta^+ \leq \kappa < \aleph_\alpha$, ein Widerspruch.
Fall 2. $\mathrm{Lim}(\alpha)$. In diesem Fall liefert $(*)$ $\aleph_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \aleph_\beta \leq \kappa < \aleph_\alpha$, ein Widerspruch.
Da $\alpha > 0$ gilt wegen $\kappa > \omega$, sind hiermit alle möglichen Fälle abgehandelt. Die sich ergebenden Widersprüche zeigen, daß (2) doch richtig sein muß. qed(2)

Damit ist der Satz bewiesen. QED

Bemerkung 7.31 Es ist auch die Bezeichnung ω_α für $\aleph_\alpha$ üblich.

Ist eine Kardinalzahl κ vorgegeben, so läßt sich anhand der Platznummer von κ in der $\aleph$-Hierarchie bestimmen, ob κ Nachfolger oder Limes ist:

Lemma 7.32 *Sei $\kappa \in$ Card. Dann gilt:*
(a) κ ist eine Nachfolgerkardinalzahl $\longleftrightarrow \exists \alpha\, \kappa = \aleph_{\alpha+1}$.
(b) κ ist eine Limeskardinalzahl $\longleftrightarrow \kappa = \aleph_0 \vee \exists \delta(\mathrm{Lim}(\delta) \wedge \kappa = \aleph_\delta)$.

Beweis. Es genügt, (a) zu beweisen.
„$\Rightarrow$“. Sei $\kappa = \lambda^+$. Wähle α mit $\lambda = \aleph_\alpha$. Dann ist $\kappa = \aleph_\alpha^+ = \aleph_{\alpha+1}$.
„$\Leftarrow$“. Es ist $\kappa = \aleph_\alpha^+$, also ein Nachfolger. QED

8 Das Hausdorffsche Paradoxon

9 Formale Sprachen.

Wir haben im vorangehenden Kapiteln gesehen, dass das Auswahlaxiom unintuitive Konsequenzen besitzt, die zu der Frage führen, ob das Axiom im Kontext der übrigen Axiome widerspruchsfrei ist. Die Widerspruchsfreiheit wäre besonders angesichts der guten Konsequenzen des Auswahlaxioms wünschenswert, die wir zum Beispiel im Kapitel über Kardinalzahlen kennengelernt haben.
Dies führt zu „axiomatischen Überlegungen“: Wir möchten die Konsistenz des Systems ZFC zeigen. Ohne auf Details einzugehen, besagt der zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz, dass diese Konsistenz nicht mit den üblichen mathematischen Mitteln bewiesen werden kann. Eine genügend ausdrucksreiche, durch Listen von Axiomen gegebene Theorie kann nicht ihre eigene Konsistenz beweisen. Dennoch konnte Gödel ein Resultat zeigen, das besagt, dass das System ZFC nicht widersprüchlicher als das einfachere System ZF ist. Gödel bewies durch die Konstruktion *innerer Modelle der Mengenlehre*: wenn das System ZF widerspruchsfrei ist, so ist auch das System ZFC widerspruchsfrei. Da die Axiome von ZF eine gute intuitive Begründung besitzen, ist dies in einem gewissen Sinn einen Widerspruchsfreiheitsbeweis von ZFC.
Wir wollen in den folgenden Kapiteln das Resultat von Gödel mit Hilfe der Klasse HOD der *erblich Ordinalzahl-definierbaren Mengen* zeigen (*hereditarily ordinal definable*).

Die *Ordinalzahl-definierbaren* Mengen sind diejenigen Mengen, die mit Hilfe einer Formel der Mengenlehre und Ordinalzahl-Parametern definiert werden können. Die *erblich* Ordinalzahl-definierbaren Mengen sind solche, die selbst und alle iterierten $\in$-Vorgänger Ordinalzahl-definierbar sind.
Diese Beschreibung der Klasse HOD ist informell, denn wir fragen, ob es für eine betrachtete Menge x eine $\in$-Formel gibt, die x definiert. Dies kann nur dann zu einer $\in$-Definition von HOD gemacht werden, wenn die Gesamtheit der $\in$-Formeln und ein Teil der Theorie der Definierbarkeit im System ZF selbst formalisiert ist. Dies wird die Aufgabe der folgenden Kapitel sein.
Generell kann man neben die arithmetischen und geometrischen Grundstrukturen die logischen Grundstrukturen stellen. Elektronische Datenverarbeitung ist weniger elektronische *Arithmetik* als die elektronische Verarbeitung von *logischen* Entitäten wie Symbolen und daraus gebildete Wörtern. Eine umfassende Formalisierung der Mathematik, die auch die Grundstrukturen der Informatik umfasst, innerhalb des Systems ZF erfordert daher auch die Formalisierung von Logik. Wir arbeiten in diesem Kapitel im Axiomensystem ZF.

9.1 Alphabete, Zeichenreihen und Sprachen.

Definition 9.1 Ein **Alphabet** A ist eine nicht-leere Menge. Jedes Element von A wird als **Zeichen aus** A bezeichnet. Es sei $A^* :\equiv {}^{<\omega}A :\equiv \bigcup_{n<\omega} {}^nA \equiv \{f \mid \exists n < \omega\ f\colon n \to A\}$. Jedes Element $w \in A^*$ heißt **Zeichenreihe** (oder auch **String** bzw. **Wort**) über A, die natürliche Zahl $|w| :\equiv \mathrm{dom}(w)$ heißt **Länge** von w. Es sei $\Box :\equiv \emptyset$ das **leere Wort**.

Bemerkung 9.2 Wir identifizieren das Zeichen $a \in A$ mit der Zeichenreihe $(a|i < 1) \in A^*$ und können so $A \subseteq A^*$ schreiben. Einen String $f = (f(i)|i < n) \in A^*$ schreiben wir manchmal auch in der Form $f(0)f(1)\ldots f(n-1)$.

Wir definieren die folgenden Operationen und Relationen auf Wörtern:

Definition 9.3 Seien $v, w \in A^*$.

(a) Wir definieren die **Verkettung** (auch: **Konkatenation**) von v und w durch $v^\frown w :\equiv vw :\equiv v \cup \{(|v| + i, w(i)) \mid i < |w|\}$.
Wir definieren das **Anhängen eines Zeichens** $a \in A$ an v durch $v^\frown a :\equiv va :\equiv v^\frown\{(0,a)\}$.

(b) Die Relation $v \sqsubseteq w :\equiv \exists m \leq \mathrm{dom}(w)\ v = w \restriction m$ besagt: v ist ein **Anfangsstück** von w.

Lemma 9.4 *Sei A ein Alphabet. Dann ist* $\overline{\overline{A^*}} = \overline{\overline{A}} + \aleph_0$.

9.2 Terme und Formeln.

Definition 9.5 Eine **(formale) Sprache** ist ein 4-Tupel (I, J, K, t), wobei I, J und K paarweise disjunkte Mengen sind und $t\colon I \cup J \to \omega$ gilt.

9.3 Terme und Formeln.

Fixiere eine Sprache $L = (I, J, K, t)$. Wir definieren ein zu dieser Sprache „passendes“ Alphabet A_L, wobei I, J, K als Indexmengen für Relations-, Funktions- und Konstantensymbole verwendet werden und t die Stellenzahl der Relations- und Funktionssymbole liefert.

Definition 9.6 Das **Alphabet** A_L **von** L ist diejenige Menge, die genau die folgenden Elemente enthält:

(i) **Klammern**: $\dot{(} \;:\equiv\; (0,0)$, $\dot{)} \;:\equiv\; (1,0)$;

(ii) **Variablen**: für jedes $n < \omega$ das Element $\dot{v}_n \;:\equiv\; (2,n)$;

(iii) **Junktoren**: $\dot{\wedge} \;:\equiv\; (3,0)$ (**und**, **Konjunktion**), $\dot{\neg} \;:\equiv\; (4,0)$ (**nicht**, **Negation**);

(iv) **Quantor**: $\dot{\forall} \;:\equiv\; (5,0)$;

(v) **Identität**: $\dot{=} :\equiv\; (6,0)$;

(vi) **Relationssymbole**: für jedes $i \in I$ das Element $\dot{R}_i \;:\equiv\; (7,i)$;

(vii) **Funktionssymbole**: für jedes $j \in J$ das Element $\dot{f}_j \;:\equiv\; (8,j)$;

(viii) **Konstantensymbole**: für jedes $k \in K$ das Element $\dot{c}_k \;:\equiv\; (9,k)$.

Hier wird ein Alphabet erklärt, dessen Symbole bestimmte Aufgaben in einer Formalisierung der mathematischen Sprache übernehmen werden. Wie die Symbole im einzelnen festgelegt werden, ist unerheblich. Wichtig ist, dass sie eindeutig festgelegte und paarweise verschiedene Mengen sind. Die jeweiligen Mengen (= Symbole) werden als Klassenterme eingeführt, die wir mit Abkürzungen bezeichnen, die auf ihre spätere Verwendung hinweisen. So wird die Menge $(1,0)$ später die „Funktion“ einer rechten Klammer erfüllen: $\dot{)} \;:\equiv\; (1,0)$.
Wir formalisieren nun den sukzessiven Aufbau von mathematischen Formeln durch Terme, atomare Formeln und Formeln. Hierzu benötigen wir eine Verallgemeinerung der Konkatenationsfunktion $^\frown$:

Definition 9.7 Sei A ein Alphabet, $n < \omega$, $s: n \to A^*$ und $i \leq n$. Durch Rekursion nach $j \in \{-1\} \cup n$ definieren wir das Element $s(i)^\frown \cdots {}^\frown s(j)$ von A^*:
im Fall $j < i$ sei $s(i)^\frown \cdots {}^\frown s(j) \;:\equiv\; \Box$;
im Fall $j \geq i$ sei $s(i)^\frown \cdots {}^\frown s(j) \;:\equiv\; (s(i)^\frown \cdots {}^\frown s(j-1))^\frown s(j)$.
Wir schreiben auch $s(i) \ldots s(j)$ statt $s(i)^\frown \cdots {}^\frown s(j)$.

Definition 9.8 Die Menge $\mathrm{Tm}(L)$ der L**-Terme** ist die $\subseteq$-kleinste Teilmenge von A_L^*, für die gilt:

(T1) $\forall\, n < \omega\ \dot{v}_n \in \mathrm{Tm}(L)$;

(T2) $\forall\, k \in K\ \dot{c}_k \in \mathrm{Tm}(L)$;

(T3) $\forall\, j \in J\, \forall s\ (s: t(j) \to \mathrm{Tm}(L) \;\longrightarrow\; \dot{f}_j{}^\frown s(0)^\frown \cdots {}^\frown s(t(j)-1) \in \mathrm{Tm}(L))$.

Bemerkung 9.9 (a) Es ist also $\mathrm{Tm}(L) = \bigcap\{x \subseteq A_L^* \mid x \text{ erfüllt (T1), (T2) und (T3)}\}$; diese Menge existiert nach dem Aussonderungsaxiom angewendet auf die Menge A_L^*.

(b) Die von uns gewählte Schreibweise, in der die Operatoren vor den Operanden stehen, bezeichnet man als **polnische Notation**. Ausdrücke in polnischer Notation sind auch ohne Klammern eindeutig lesbar. In der Praxis benutzen wir allerdings meistens Terme, die nicht in polnischer Notation sind. So schreiben wir z.B. normalerweise $x+y$ statt $+xy$. Solche Terme lassen sich aber leicht in die polnische Notation umformen.

Definition 9.10 Die Menge der **atomaren Formeln**, $\mathrm{At}(L)$, ist definiert durch $\mathrm{At}(L) :\equiv \{s_1 \doteq s_2 \,|\, s_1 \in \mathrm{Tm}(L) \wedge s_2 \in \mathrm{Tm}(L)\} \cup \{\dot{R}_i{}^\frown s(0)^\frown \cdots {}^\frown s(t(i)-1) \,|\, i \in I \wedge s\colon t(i) \to \mathrm{Tm}(L)\}$.

Definition 9.11 Die Menge $\mathrm{Fml}(L)$ der **L-Formeln** ist die $\subseteq$-kleinste Teilmenge von A_L^*, für die folgendes gilt:

(F1) $\mathrm{At}(L) \subseteq \mathrm{Fml}(L)$;

(F2) $\forall \varphi, \psi \in \mathrm{Fml}(L)\ \dot{(}\varphi \dot{\wedge} \psi\dot{)} \in \mathrm{Fml}(L)$;

(F3) $\forall \varphi \in \mathrm{Fml}(L)\ \dot{\neg}\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$;

(F4) $\forall n < \omega\, \forall \varphi \in \mathrm{Fml}(L)\ \dot{\forall} \dot{v}_n \varphi \in \mathrm{Fml}(L)$.

Offensichtlich kann man die gewöhnlichen Formeln in dieser Formalisierung nachbilden. Allerdings muss überprüft werden, dass ein Element von $\mathrm{Fml}(L)$ „eindeutig lesbar" ist, damit es eine eindeutige Bedeutung im logischen Kontext hat. Hierzu ist eine detaillierte Untersuchung von Termen und Formeln erforderlich. Die eindeutige Lesbarkeit kann auf verschiedene Arten erreicht werden (polnische Notation, Klammersetzung) und ist intuitiv vertraut. Die Einzelheiten der Beweise der eindeutigen Lesbarkeit sind allerdings technisch und hängen von Details der Formalisierung ab, die für unsere Zwecke nicht entscheidend sind. Bei Bedarf könnte man die Syntax auch abändern, um Eindeutigkeitsbeweise zu vereinfachen.

Satz 9.12 (Eindeutige Lesbarkeit der Terme) *Terme sind auf eindeutige Weise in Subterme (Unterterme) zerlegbar. D.h., ist $s \in \mathrm{Tm}(L)$, so gilt genau eine der folgenden Aussagen:*

(i) Es gibt genau ein $n < \omega$, so daß $s = \dot{v}_n$;

(ii) Es gibt genau ein $k \in K$, so daß $s = \dot{c}_k$;

(iii) Es existiert genau ein $j \in J$ und genau ein $r\colon t(j) \to \mathrm{Tm}(L)$, so daß $s = \dot{f}_j{}^\frown r(0)^\frown \cdots {}^\frown r(t(j)-1)$ gilt.

Satz 9.13 (Eindeutige Lesbarkeit der Formeln) *Jede Formel kann auf eindeutige Weise in Subformeln zerlegt werden: $[(]^L) \cap \mathrm{Fml}(L) = \emptyset$ und für jedes $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$ gilt genau eine der folgenden Aussagen:*

(i) Es gibt genau ein $s_1 \in \mathrm{Tm}(L)$ und genau ein $s_2 \in \mathrm{Tm}(L)$, so daß $\varphi = s_1 \doteq s_2$.

(ii) Es gibt genau ein $i \in I$ und genau ein $s\colon t(i) \to \mathrm{Tm}(L)$, so daß $\varphi = \dot{R}_i s(0) \ldots s(t(i)-1)$.

(iii) Es gibt genau ein $\psi \in \mathrm{Fml}(L)$ und genau ein $\chi \in \mathrm{Fml}(L)$, so daß $\varphi = \dot{(}\psi \dot{\wedge} \chi\dot{)}$.

(iv) Es gibt genau ein $\psi \in \mathrm{Fml}(L)$, *so daß* $\varphi = \dot{\neg}\,\psi$.

(v) Es gibt genau ein $n < \omega$ *und genau ein* $\psi \in \mathrm{Fml}(L)$, *so daß* $\varphi = \dot{\forall}\dot{v}_n\psi$.

9.4 Induktion und Rekursion.

Die rekursive Natur von Termen und Formeln ermöglicht es, das Beweisprinzip *Induktion* und das Konstruktionsprinzip *Rekursion* auf Terme und Formeln zu übertragen.

Satz 9.14 (Induktion über den Termaufbau) *Sei* χ *eine* $\in$*-Formel. Es gelte:*

(i) $\forall n < \omega\ \chi(\dot{v}_n)$ *und* $\forall\, k \in K\ \chi(\dot{c}_k)$*;*

(ii) $\forall\, j \in J\, \forall s\colon t(j) \to \mathrm{Tm}(L)\ (\forall\, i < t(j)\ \chi(s(i)) \longrightarrow \chi(\dot{f}_j s(0) \ldots s(t(j)-1)))$.

Dann gilt $\forall s \in \mathrm{Tm}(L)\ \chi(s)$.

Beweis. $T :\equiv \{s \in \mathrm{Tm}(L) \mid \chi(s)\}$ erfüllt (T1), (T2) und (T3). Wegen der $\subseteq$-Minimalität von $\mathrm{Tm}(L)$ ist also $T = \mathrm{Tm}(L)$. QED

Eine mathematische Eigenschaft χ trifft also auf alle L-Terme zu, wenn sie auf alle Variablen und alle Konstantensymbole zutrifft, und wenn für jedes $j \in J$ aus der Gültigkeit von χ für je $t(j)$-viele Terme $s(0), \ldots, s(t(j)-1)$ die Gültigkeit von χ für $\dot{f}_j s(0) \ldots s(t(j)-1)$ folgt.

Satz 9.15 (Induktion über den Formelaufbau) *Sei* χ *eine* $\in$*-Formel. Es gelte:*

(i) $\forall \psi \in \mathrm{At}(L)\ \chi(\psi)$*;*

(ii) $\forall \psi, \chi \in \mathrm{Fml}(L)\ ((\chi(\psi) \wedge \chi(\chi)) \longrightarrow (\chi(\dot{(}\psi \dot{\wedge} \chi\dot{)}) \wedge \chi(\dot{\neg}\,\psi)))$*;*

(iii) $\forall \psi \in \mathrm{Fml}(L)\, \forall n < \omega\ (\chi(\psi) \longrightarrow \chi(\dot{\forall}\dot{v}_n\psi))$.

Dann gilt $\forall \psi \in \mathrm{Fml}(L)\ \chi(\psi)$.

Beweis. Analog zu Beweis des Induktionssatzes für Terme. QED

Satz 9.16 (Rekursion über den Termaufbau) *Seien* $G_{var}, G_{const}, G_{fun}\colon V \to V$. *Dann existiert genau ein* $H\colon \mathrm{Tm}(L) \to V$ *mit:*

(i) $\forall\, n < \omega\ H(\dot{v}_n) = G_{var}(\dot{v}_n)$*;*

(ii) $\forall\, k \in K\ H(\dot{c}_k) = G_{const}(\dot{c}_k)$*;*

(iii) $\forall\, j \in J\, \forall s\colon t(j) \to \mathrm{Tm}(L)\ H(\dot{f}_j s(0) \ldots s(t(j)-1)) = G_{fun}(j, s, (H(s(i)) | i < t(j)))$.

Beweis. Definieren wir $T_0 :\equiv \{\dot{v}_n \mid n < \omega\} \cup \{\dot{c}_k \mid k \in K\}$, $T_{n+1} :\equiv T_n \cup \{\dot{f}_j s(0) \ldots s(t(j)-1) \mid j \in J \wedge s\colon t(j) \to T_n\}$, so ist $\mathrm{Tm}(L) = \bigcup_{n<\omega} T_n$. Wegen der eindeutigen Lesbarkeit der Terme läßt sich $H \restriction T_n$ leicht rekursiv so definieren, daß (i), (ii) und (iii) gelten. Damit ist die Existenz von H gesichert. Die Eindeutigkeit folgt ebenfalls leicht aus der eindeutigen Lesbarkeit der Terme. QED

Satz 9.17 (Rekursion über den Formelaufbau) *Seien* $G_{at}, G_{\dot{\wedge}}, G_{\dot{\neg}}, G_{\dot{\forall}}\colon V \to V$. *Dann existiert genau ein* $H\colon \mathrm{Fml}(L) \to V$ *mit:*

(i) $\forall \varphi \in \mathrm{At}(L)\ H(\varphi) = G_{at}(\varphi)$;

(ii) $\forall \varphi, \psi \in \mathrm{Fml}(L)\ H(\dot{(}\varphi \dot{\wedge} \psi\dot{)}) = G_{\dot{\wedge}}(\varphi, \psi, H(\varphi), H(\psi))$;

(iii) $\forall \varphi \in \mathrm{Fml}(L)\ H(\dot{\neg}\varphi) = G_{\dot{\neg}}(\varphi, H(\varphi))$;

(iv) $\forall \varphi \in \mathrm{Fml}(L)\, \forall n < \omega\ H(\dot{\forall}\dot{v}_n\varphi) = G_{\dot{\forall}}(n, \varphi, H(\varphi))$.

Beweis. Dies beweist man ganz analog zum Rekursionssatz über den Termaufbau. QED

Beispiele für die Anwendung der Rekursionssätze liefern die folgenden Definitionen.

Definition 9.18 Für $t \in \mathrm{Tm}(L)$ definieren wir rekursiv die **Menge der Variablen** von t, $\mathrm{var}(t)$, durch $\mathrm{var}(\dot{v}_n) :\equiv \{\dot{v}_n\}$ und $\mathrm{var}(\dot{c}_k) = \emptyset$ sowie $\mathrm{var}(\dot{f}_j s(0) \dots s(t(j)-1)) = \bigcup_{i<t(j)} \mathrm{var}(s(i))$.

Bemerkung 9.19 Um diese Rekursion formal durchzuführen setzen wir
$G_{var} :\equiv \{(x, \{x\}) \mid x \in V\}$, $G_{const} :\equiv \{(x, \emptyset) \mid x \in V\}$
und $G_{fun} :\equiv \{((j, f, g), \bigcup \mathrm{ran}(g)) \mid j \in V \ \wedge\ f \in V \ \wedge\ g \in V\}$.

Definition 9.20 Für $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$ definieren wir rekursiv die **Menge der Variablen** von φ, $\mathrm{var}(\varphi)$, und die **Menge der freien Variablen** von φ, $\mathrm{fr}(\varphi)$, wie folgt:

(i) $\mathrm{var}(s_1 \doteq s_2) :\equiv \mathrm{fr}(s_1 \doteq s_2) :\equiv \mathrm{var}(s_1) \cup \mathrm{var}(s_2)$;

(ii) $\mathrm{var}(\dot{R}_i s(0) \dots s(t(i)-1)) :\equiv \mathrm{fr}(\dot{R}_i s(0) \dots s(t(i)-1)) :\equiv \bigcup_{j<t(i)} \mathrm{var}(s(j))$;

(iii) $\mathrm{var}(\dot{(}\varphi \dot{\wedge} \psi\dot{)}) :\equiv \mathrm{var}(\varphi) \cup \mathrm{var}(\psi)$ und $\mathrm{fr}(\dot{(}\varphi \dot{\wedge} \psi\dot{)}) :\equiv \mathrm{fr}(\varphi) \cup \mathrm{fr}(\psi)$;

(iv) $\mathrm{var}(\dot{\neg}\varphi) :\equiv \mathrm{var}(\varphi)$ und $\mathrm{fr}(\dot{\neg}\varphi) :\equiv \mathrm{fr}(\varphi)$;

(v) $\mathrm{var}(\dot{\forall}\dot{v}_n\varphi) :\equiv \mathrm{var}(\varphi) \cup \{\dot{v}_n\}$ und $\mathrm{fr}(\dot{\forall}\dot{v}_n\varphi) :\equiv \mathrm{fr}(\varphi) \setminus \{\dot{v}_n\}$.

Ist $\Phi \subseteq \mathrm{Fml}(L)$, so sei $\mathrm{fr}(\Phi) :\equiv \bigcup\{\mathrm{fr}(\varphi) \mid \varphi \in \Phi\}$ die Menge der freien Variablen von Φ.

Bemerkung 9.21 Die Menge $\mathrm{fr}(\varphi)$ besteht gerade aus denjenigen Variablen aus $\mathrm{var}(\varphi)$, die an mindestens einer Stelle von φ nicht „im Wirkungsbereich" eines Quantors stehen.

Manchmal ist es sinnvoll, sich auf bestimmte freie Variablen zu beschränken. Wir definieren deshalb:

Definition 9.22 Für $n < \omega$ sei $\mathrm{Fml}_n(L) :\equiv \{\varphi \in \mathrm{Fml}(L) \mid \mathrm{fr}(\varphi) \subseteq \{\dot{v}_i \mid i < n\}\}$. Dann ist $\mathrm{Fml}_0(L)$ die Menge aller Formeln, die keine freien Variablen haben, und heißt Menge der **L-Sätze**.

Wir vereinbaren, daß wir zukünftig statt der Variablen $\dot{v}_n$ auch die Buchstaben $x, y, z \dots$ (auch mit Indizes) schreiben werden. Die Schreibweise $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ bedeutet, dass $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$ ist mit $\mathrm{fr}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.

9.5 Die Kardinalität einer Sprache.

Definition 9.23 Sei $L = (I, J, K, t)$ eine Sprache. Die Kardinalzahl $\overline{\overline{L}} :\equiv \overline{\overline{I \cup J \cup K}} + \aleph_0$ heißt die **Kardinalität der Sprache** L.

Bemerkung 9.24 In der obigen Definition von $\overline{\overline{L}}$ wird $\aleph_0$ addiert, weil wir abzählbar viele Variablen haben, und diese als zur Sprache gehörend angesehen werden.

Lemma 9.25 *Sei L eine Sprache. Dann ist $\overline{\overline{L}} = \overline{\overline{\mathrm{Fml}(L)}}$.*

BEWEIS. Wegen $\mathrm{Fml}(L) \subseteq A_L^*$ folgt $\overline{\overline{\mathrm{Fml}(L)}} \leq \overline{\overline{A_L^*}} = \overline{\overline{A_L}} + \aleph_0 = \overline{\overline{L}}$. Da andererseits für jedes $i \in I$ und $j \in J$ sowie $k \in K$ und $n < \omega$ gilt $\dot{R}_i \dot{v}_0 \dots \dot{v}_0 \in \mathrm{Fml}(L)$ und $\dot{f}_j \dot{v}_0 \dots \dot{v}_0 \doteq \dot{f}_j \dot{v}_0 \dots \dot{v}_0 \in \mathrm{Fml}(L)$ sowie $\dot{c}_k = \dot{c}_k \in \mathrm{Fml}(L)$ und $\dot{v}_n \doteq \dot{v}_n \in \mathrm{Fml}(L)$, ergibt sich $\overline{\overline{L}} \leq \overline{\overline{\mathrm{Fml}(L)}}$. QED

Wir lassen im folgenden die Punkte über den Symbolbezeichnungen fort und schreiben $(,), \wedge, \forall, v_n, \dots$ statt $\dot{(}, \dot{)}, \dot{\wedge}, \dot{\forall}, \dot{v}_n, \dots$.

9.6 Die fehlenden Junktoren und Quantoren.

Wir führen die folgenden Junktoren und Quantoren als Abkürzungen für gewisse Zeichenreihen der Sprache der Logik erster Stufe ein. Mit ihrer Hilfe lassen sich viele Formeln einfacher schreiben.

Definition 9.26 Seien $\varphi, \psi \in \mathrm{Fml}(L)$. Wir setzen:
(a) $(\varphi \vee \psi) :\equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ (**oder**).
(b) $(\varphi \to \psi) :\equiv (\neg\varphi \vee \psi)$ (**Implikation**).
(c) $(\varphi \leftrightarrow \psi) :\equiv ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$ (**Äquivalenz, Biimplikation**).
(d) $\exists v_n \varphi :\equiv \neg\forall v_n \neg\varphi$ (**Existenzquantor**).

Folgende Abkürzungen sind ebenfalls sehr nützlich:

Definition 9.27 (a) Sei $n < \omega$ und seien $x_1, \dots, x_n \in \{v_i \,|\, i < \omega\}$ und $Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$. Ferner sei $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$. Wir definieren rekursiv $Q_n x_n \dots Q_1 x_1 \varphi \in \mathrm{Fml}(L)$ durch $Q_0 x_0 \dots Q_1 x_1 \varphi :\equiv \varphi$ und
$Q_{n+1} x_{n+1} \dots Q_1 x_1 \varphi :\equiv Q_{n+1} x_{n+1} Q_n x_n \dots Q_1 x_1 \varphi$.
(b) Sei $n < \omega$ und für $i < n$ sei $\varphi_i \in \mathrm{Fml}(L)$. Wir definieren rekursiv $\bigwedge_{i<n} \varphi_i$ bzw. $\bigvee_{i<n} \varphi_i$ durch
$\bigwedge_{i<0} \varphi_i :\equiv \forall v_0\, v_0 = v_0$ bzw. $\bigvee_{i<0} \varphi_i :\equiv \neg\forall v_0\, v_0 = v_0$,
$\bigwedge_{i<1} \varphi_i :\equiv \bigvee_{i<1} \varphi_i :\equiv \varphi_0$,
$\bigwedge_{i<n+1} \varphi_i :\equiv (\bigwedge_{i<n} \varphi_i \wedge \varphi_n)$ bzw. $\bigvee_{i<n+1} \varphi_i :\equiv (\bigvee_{i<n} \varphi_i \vee \varphi_n)$, falls $n \geq 1$.

10 Modelle.

Wir fixieren eine formale Sprache $L = (I, J, K, t)$. Die Intention dieser Sprache ist die Beschreibung von *Strukturen*, in denen die Relations-, Funktions- und Konstantensymbole des Alphabets A_L durch entsprechende Relationen, Funktionen und Konstanten interpretiert sind. Wir wenden uns damit der *Semantik* der formalen Sprache zu, d.h. ihrer Interpretation. Wir formalisieren zunächst den Begriff einer mathematischen Struktur.

10.1 Strukturen.

Definition 10.1 Eine $L-$**Struktur** ist ein 4-Tupel

$$\mathfrak{A} = (A, (R_i|i \in I), (f_j|j \in J), (c_k|k \in K)),$$

wobei folgendes gilt.

(i) A ist eine nicht-leere Menge; sie heißt **Trägermenge** oder auch **Universum** von $\mathfrak{A}$. Wir setzen $|\mathfrak{A}| :\equiv A$.

(ii) $\forall\, i \in I\ R_i \subseteq A^{t(i)}$. Das heißt, R_i ist eine $t(i)$**-stellige Relation** auf A.

(iii) $\forall\, j \in J\ f_j\colon A^{t(j)} \to A$. Das heißt, f_j ist eine $t(j)$**-stellige Funktion** auf A.

(iv) $\forall\, k \in K\ c_k \in A$. Das heißt, c_k ist eine **Konstante** aus A.

Die **Kardinalität** der Struktur $\mathfrak{A}$ ist $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} :\equiv \overline{\overline{A}}$.

Definition 10.2 Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur mit $L = (I, J, K, t)$.

(a) Die Struktur $\mathfrak{A}$ heißt **Algebra**, falls $I = \emptyset$ gilt.

(b) Die Struktur $\mathfrak{A}$ heißt **relationale Struktur**, falls $J = \emptyset$ gilt.

Eine Algebra besitzt also keine Relationen, eine relationale Struktur keine Funktionen.

Beispiel 10.3 Die Struktur der reellen Zahlen kann folgendermaßen als L-Struktur mit $L = (\{0\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{(0, 2), (1, 2), (2, 2)\})$ beschrieben werden:

$$(\mathbb{R}, \{(0, <_{\mathbb{R}})\}, \{(1, +_{\mathbb{R}}), (2, \cdot_{\mathbb{R}})\}, \{(3, 0), (4, 1)\})$$

wobei wir $I :\equiv \{0\}$, $J :\equiv \{1, 2\}$ und $K :\equiv \{3, 4\}$ gewählt haben.

Wir definieren einige wohlbekannte Beziehungen zwischen Strukturen in unserem Formalismus. Sei $L = (I, J, K, t)$ eine Sprache und seien

$$\mathfrak{A} = (A, (R_i|i \in I), (f_j|j \in J), (c_k|k \in K)) \text{ und}$$

$$\mathfrak{A}' = (A', (R_i'|i \in I), (f_j'|j \in J), (c_k'|k \in K))$$

L-Strukturen.

Definition 10.4 Die Struktur $\mathfrak{A}$ ist eine **Substruktur** von $\mathfrak{A}'$ (bzw. $\mathfrak{A}'$ eine **Oberstruktur** von $\mathfrak{A}$), falls gilt:

(i) $A \subseteq A'$;
(ii) $\forall i \in I\ R_i = R'_i \cap A^{t(i)}$;
(iii) $\forall j \in J\ f_j = f'_j \restriction A^{t(j)}$;
(iv) $\forall k \in K\ c_k = c'_k$.

In diesem Fall schreiben wir $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}'$. Da die Substruktur $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{A}$ und ihre Trägermenge A eindeutig festgelegt ist, können wir auch definieren: $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \restriction A$.

Definition 10.5 Eine Funktion $h\colon A \to A'$ heißt **Homomorphismus** von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{A}'$, falls folgendes gilt:
(i) $\forall i \in I\, \forall \vec{x} \in A^{t(i)}\ (R_i\vec{x} \longrightarrow R'_i h(\vec{x}))$;
(ii) $\forall j \in J\, \forall \vec{x} \in A^{t(j)}\ h(f_j(\vec{x})) = f'_j(h(\vec{x}))$, d.h., das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
A & \times & \cdots & \times & A & \xrightarrow{f_j} & A \\
\downarrow h & & \cdots & & \downarrow h & & \downarrow h \\
A' & \times & \cdots & \times & A' & \xrightarrow{f'_j} & A'
\end{array}$$

kommutiert;
(iii) $\forall k \in K\ h(c_k) = c'_k$.

Wir schreiben in diesem Fall $h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$.

Beachten Sie, daß wir in obiger Definition nur fordern, daß in der Urbildstruktur bestehende Relationen bewahrt werden müssen; nicht bestehende Relationen müssen nicht unbedingt bewahrt werden. D.h., gilt $R_i\vec{x}$ so gilt auch $R'_i h(\vec{x})$; wenn $R_i\vec{x}$ *nicht* gilt, so kann aber durchaus $R'_i h(\vec{x})$ gelten.

Definition 10.6 Eine Funktion h heißt **Einbettung** von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}'$, falls folgende Aussagen gelten:
(i) $h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$;
(ii) h ist injektiv;
(iii) $\forall i \in I\, \forall \vec{x} \in A^{t(i)}\ (R_i\vec{x} \longleftrightarrow R'_i h(\vec{x}))$.

In diesem Fall schreiben wir $h\colon \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{A}'$.

Definition 10.7 Eine Funktion h heißt **Isomorphismus** von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}'$, falls folgende Aussagen gelten:
(i) $h\colon \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{A}'$;
(ii) h ist bijektiv.

In diesem Fall schreiben wir $h\colon \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}'$ und sagen, $\mathfrak{A}$ ist **isomorph** zu $\mathfrak{A}'$. Die Schreibweise $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}'$ bedeute, daß es einen Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}'$ gibt.

Läßt sich eine Struktur $\mathfrak{A}$ in eine Struktur $\mathfrak{A}'$ einbetten, so kann man $\mathfrak{A}$ als Substruktur von $\mathfrak{A}'$ auffassen. Genauer gilt:

Satz 10.8 *Es gelte* $h\colon\mathfrak{A}\hookrightarrow\mathfrak{A}'$. *Dann ist* $A'' :\equiv \mathrm{ran}(h)$ *Träger einer Substruktur* $\mathfrak{A}''$ *von* $\mathfrak{A}'$, *und es gilt* $h\colon\mathfrak{A}\cong\mathfrak{A}''$.

BEWEIS. Für $i\in I$ sei $R_i'' :\equiv R_i'\cap(A'')^{t(i)}$. Sei $j\in J$. Für $\vec{y}=h(\vec{x})\in(A'')^{t(j)}$ (mit $\vec{x}\in A^{t(j)}$) ist $f_j'(\vec{y})=f_j'(h(\vec{x}))=h(f_j(\vec{x}))\in A''$, so daß $f_j'' :\equiv f_j'\restriction(A'')^{t(j)}$ eine Funktion $(A'')^{t(j)}\to A''$ definiert. Da außerdem $c_k'=h(c_k)\in A''$ für $k\in K$ gilt, ist durch $\mathfrak{A}'' :\equiv (A'',(R_i''|i\in I),(f_j''|j\in J),(c_k'|k\in K),t)$ eine Struktur definiert. Aus den Definitionen folgt sofort, daß $\mathfrak{A}''$ eine Substruktur von $\mathfrak{A}'$ ist. Man verifiziert nun leicht, daß $h\colon\mathfrak{A}\cong\mathfrak{A}''$ gilt. QED

10.2 Die Modellbeziehung.

Wenn $\mathfrak{A}$ eine im folgenden festgehaltene L-Struktur ist, so ist damit festgelegt, wie die Relations-, Funktions- und Konstantensymbole in $\mathfrak{A}$ interpretiert werden. Wenn zusätzlich festgelegt ist, wie die Variablen in $\mathfrak{A}$ interpretiert werden, können alle L-Terme und L-Formeln in $\mathfrak{A}$ interpretiert werden. Diese Interpretation stellt das fundamentale Bindeglied zwischen Syntax und Semantik dar.

Definition 10.9 Wir definieren: β ist eine **Belegung in** $\mathfrak{A} :\equiv \beta\colon\{v_n\,|\,n<\omega\}\to A$.

Wir fixieren nun eine beliebige Belegung β in $\mathfrak{A}$.

Definition 10.10 Sei $s\in\mathrm{Tm}(L)$ ein beliebiger Term. Definiere rekursiv die **Interpretation von** s **in** $\mathfrak{A}$ **unter der Belegung** β, $s^{\mathfrak{A}}[\beta]$, wie folgt:

(i) $v_n^{\mathfrak{A}}[\beta] :\equiv \beta(v_n)$;

(ii) $c_k^{\mathfrak{A}}[\beta] :\equiv c_k$.

(iii) $(f_j s(0)\ldots s(t(j)-1))^{\mathfrak{A}}[\beta] :\equiv f_j(s(0)^{\mathfrak{A}}[\beta],\ldots,s(t(j)-1)^{\mathfrak{A}}[\beta])$.

Ein Term wird also in $\mathfrak{A}$ derart interpretiert, daß jedes Funktions- bzw. Konstantensymbol durch die korrespondierende Funktion bzw. Konstante von $\mathfrak{A}$ ersetzt und jede Variable mit dem durch β bestimmten Element von A (also $\beta(v_n)$ für die Variable v_n) belegt wird. Um zu definieren, wie eine Formel φ in einer Struktur $\mathfrak{A}$ interpretiert wird, müssen wir modifizierte Belegungen einführen.

Definition 10.11 Sei β eine Belegung in $\mathfrak{A}$, $a\in A$ und $n<\omega$. Dann sei $\beta\frac{a}{v_n}$ die durch

$$\beta\frac{a}{v_n}(v_m) :\equiv \begin{cases}\beta(v_m), & \text{falls } m\neq n\\ a, & \text{falls } m=n,\end{cases}$$

definierte Belegung in $\mathfrak{A}$.

Die Belegung $\beta\frac{a}{v_n}$ unterscheidet sich also von β nur dadurch, dass die Variable v_n durch a belegt wird.

Definition 10.12 Sei $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$ eine beliebige L-Formel. Definiere rekursiv die Eigenschaft $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ wie folgt:

(i) $\mathfrak{A} \models s_1 = s_2[\beta] \quad :\equiv \quad s_1^{\mathfrak{A}}[\beta] = s_2^{\mathfrak{A}}[\beta]$;

(ii) $\mathfrak{A} \models R_i s(0) \dots s(t(i)-1)[\beta] \quad :\equiv \quad R_i(s(0)^{\mathfrak{A}}[\beta], \dots, s(t(i)-1)^{\mathfrak{A}}[\beta])$;

(iii) $\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)[\beta] \quad :\equiv \quad (\mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta] \ \wedge \ \mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta])$;

(iv) $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[\beta] \quad :\equiv \quad \neg\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$;

(v) $\mathfrak{A} \models \forall v_n \varphi[\beta] \quad :\equiv \quad \forall a \in A\, \mathfrak{A} \models \varphi[\beta\frac{a}{v_n}]$.

Wir sagen dann: $\mathfrak{A}$ **erfüllt** φ **unter** β oder φ **gilt in** $\mathfrak{A}$ **unter** β oder $\mathfrak{A}$ ist ein **Modell von** φ **unter** β.

Nach der obigen Formalisierung ist $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ eine $\in$-Formel mit den Parametern $\mathfrak{A}$, φ und β. Die Relation $\models$ bezeichnet man als **Modellbeziehung**.

Beispiel 10.13 Betrachte $\mathfrak{A} = (\mathbb{R}, \emptyset, (+_{\mathbb{R}}|i < 1), 0, \{(0,2)\})$ und $\varphi \ :\equiv \ \forall v_0 \ \ + v_0 v_1 = v_0)$. Es gilt φ in $\mathfrak{A}$ bei einer Belegung β genau dann, wenn gilt $\forall a \in \mathbb{R}\ a + \beta(v_1) = a$. (Dies ist natürlich genau dann der Fall, wenn $\beta(\dot{v}_1) = 0$.

Wir verallgemeinern die Modellbeziehung auf Formelmengen.

Definition 10.14 Sei $\Phi \subseteq \mathrm{Fml}(L)$ und β eine Belegung in $\mathfrak{A}$. Definiere: $\mathfrak{A} \models \Phi[\beta] \quad :\equiv \forall \varphi \in \Phi\, \mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$.

Satz 10.15 *(a) Ob $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ gilt oder nicht, hängt nur ab von den endlich vielen Werten $\beta \restriction \mathrm{fr}(\varphi)$ sowie den endlich vielen Relationen $\{R_i \,|\, i \in I \ \wedge \ \dot{R}_i \in \mathrm{ran}(\varphi)\}$, den endlich vielen Funktionen $\{f_j \,|\, j \in J \ \wedge \ \dot{f}_j \in \mathrm{ran}(\varphi)\}$ und den endlich vielen Konstanten $\{c_k \,|\, k \in K \ \wedge \ \dot{c}_k \in \mathrm{ran}(\varphi)\}$.*

(b) Ist φ ein L-Satz, so hängt die Gültigkeit von $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ nicht von β ab.

Bemerkung 10.16 Das letzte Lemma rechtfertigt die folgenden Schreibweisen:

(a) Sei $s \in \mathrm{Tm}(L)$ und $\mathrm{var}(s) \subseteq \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$. Ist dann $a_i = \beta(\dot{v}_i)$ für $i < n$, so schreiben wir $s^{\mathfrak{A}}[a_0, \dots, a_{n-1}]$ statt $s^{\mathfrak{A}}[\beta]$.

(b) Sei $\varphi \in \mathrm{Fml}_n(L)$ bzw. $\Phi \subseteq \mathrm{Fml}_n(L)$. Ist dann $a_i = \beta(\dot{v}_i)$ für $i < n$, so schreiben wir $\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \dots, a_{n-1}]$ statt $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ bzw. $\mathfrak{A} \models \Phi[a_0, \dots, a_{n-1}]$ statt $\mathfrak{A} \models \Phi[\beta]$.

(c) Im Fall eines Satzes φ schreiben wir $\mathfrak{A} \models \varphi$ statt $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ und sagen, $\mathfrak{A}$ **ist ein Modell von** φ. Im Fall einer Menge Φ von L-Sätzen schreiben wir $\mathfrak{A} \models \Phi$ statt $\mathfrak{A} \models \Phi[\beta]$ und sagen, $\mathfrak{A}$ **ist ein Modell von** Φ.

10.3 Die Folgerungsbeziehung und Erfüllbarkeit.

Die logischen Begriffe der Folgerung, der Tautologie und der Widerspruchsfreiheit lassen sich nun mit Hilfe der eingeführten Semantik definieren:

Definition 10.17 Sei $\Phi \subseteq \mathrm{Fml}(L)$ und $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$. Wir definieren:

$$\Phi \models \varphi \;:\equiv\; \forall \mathfrak{A} \forall \beta\, ((\mathfrak{A} \text{ ist } L\text{-Struktur} \wedge \beta \text{ ist Belegung in } \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{A} \models \Phi[\beta]) \longrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\beta]).$$

Gilt $\Phi \models \varphi$, so sagen wir Φ **impliziert** φ oder auch φ **folgt aus** Φ.

Definition 10.18 Für $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathrm{Fml}(L)$ definiere: $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi \;:\equiv\; \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$.

Definition 10.19 Für $\varphi, \psi \in \mathrm{Fml}(L)$ definiere: φ, ψ sind **äquivalent** $:\equiv (\varphi \models \psi \wedge \psi \models \varphi)$.

Eine Eigenschaft ist eine Tautologie oder allgemeingültig, wenn sie stets zutrifft:

Definition 10.20 Für $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$ definiere: φ ist **allgemeingültig** $:\equiv\; \models \varphi :\equiv \emptyset \models \varphi$.

Definition 10.21 Sei $\Phi \subseteq \mathrm{Fml}(L)$. Wir definieren:
Φ ist **erfüllbar** $:\equiv \mathrm{Erf}(\Phi) :\equiv \exists \mathfrak{A} \exists \beta\, (\mathfrak{A} \text{ ist } L\text{-Struktur} \wedge \beta \text{ ist Belegung in } \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{A} \models \Phi[\beta])$.

Definition 10.22 Sei $\Phi \subseteq \mathrm{Fml}(L)$. Wir definieren: Φ ist **widerspruchsfrei** $:\equiv \neg\Phi \models \dot{\neg} \dot{v}_0 \doteq \dot{v}_0$.

Lemma 10.23 *Es gilt:* $\Phi \models \varphi \;\longleftrightarrow\; \neg\, \mathrm{Erf}(\Phi \cup \{\dot{\neg}\varphi\})$. *Speziell:* $\models \varphi \;\longleftrightarrow\; \neg\, \mathrm{Erf}(\dot{\neg}\varphi)$.

BEWEIS. zu„$\Rightarrow$“. Es gelte $\Phi \models \varphi$. Angenommen, $\Phi \cup \{\dot{\neg}\varphi\}$ hat ein Modell $\mathfrak{A}$ unter einer Belegung β. Dann gilt $\mathfrak{A} \models \dot{\neg}\,\varphi[\beta]$, also $\neg\, \mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$. Außerdem gilt $\mathfrak{A} \models \Phi[\beta]$, was wegen $\Phi \models \varphi$ auf $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ führt. Also gilt $(\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \wedge \neg\, \mathfrak{A} \models \varphi[\beta])$, ein Widerspruch. Die Menge $\Phi \cup \{\dot{\neg}\varphi\}$ kann also nicht erfüllbar sein.
zu „$\Leftarrow$“. Es gelte $\neg\, \Phi \models \varphi$. Dann existiert eine L-Struktur $\mathfrak{A}$ und eine Belegung β in $\mathfrak{A}$, so daß $\mathfrak{A} \models \Phi[\beta]$ und $\neg\, \mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ gelten. Letzteres ist gleichwertig mit $\mathfrak{A} \models \dot{\neg}\,\varphi[\beta]$, also $\mathfrak{A} \models \Phi \cup \{\dot{\neg}\varphi\}[\beta]$, d.h., $\mathrm{Erf}(\Phi \cup \{\dot{\neg}\varphi\})$.
Damit ist das Lemma bewiesen. QED

Hieraus lässt sich bei Wahl von $\varphi = \dot{\neg}\dot{v}_0 \doteq \dot{v}_0$ sofort folgern:

Satz 10.24 Φ *ist widerspruchsfrei, gdw.* Φ *erfüllbar ist.*

In der mathematischen Logik wird gezeigt, dass die hier eingeführten Begriffe zwischen syntaktischen Entitäten auch auf rein syntaktischem Weg definiert werden können: Man führt einen *Ableitungskalkül* ein, der syntaktisch auf L-Formeln operiert. Man definiert $\Phi \vdash \varphi$, falls sich φ im Ableitungskalkül aus Φ erzeugen lässt. Eine Formelmenge Φ ist *konsistent*, falls sich das *Falsum* $\neg v_0 = v_1$ nicht aus Φ ableiten lässt. Im Gödelschen Vollständigkeitssatz, der als Fundamentalsatz der mathematischen Logik aufgefasst werden kann, wird bewiesen, dass die Relationen $\models$ und $\vdash$ übereinstimmen. Daraus folgt, dass eine Theorie erfüllbar ist, gdw. sie syntaktisch konsistent ist.

10.4 Theorien, Modellklassen und Axiomensysteme.

In vielen Bereichen der Mathematik untersucht man Strukturen mit gewissen gemeinsamen Grundeigenschaften. Man untersucht etwa alle linearen Ordnungen oder alle Gruppen oder alle Körper usw. Es handelt sich jeweils um die Analyse der Modellklasse einer gewissen Theorie:

Definition 10.25 Jede erfüllbare Menge $\Phi \subseteq \mathrm{Fml}_0(L)$ heißt (L-)**Theorie**.

Im Hinblick auf das Gödelsche Resultat über die *relative Konsistenz* von **ZFC** zu **ZF** machen wir mit Hilfe der eingeführten Semantik folgende Definition:

Definition 10.26 Seien Φ und Ψ Theorien. Dann ist Φ **relativ konsistent** bezüglich Ψ, falls die Erfüllbarkeit von Ψ die Erfüllbarkeit von Φ impliziert.

Uns interessieren in der axiomatischen Mengenlehre besonders die Theorien **ZF** und **ZFC**. Diese lassen sich innerhalb der Theorie **ZF** selbst formalisieren.

10.5 Eine Formalisierung von ZF in ZF.

Wir betrachten (in V) die Sprache $L(\dot\in) :\equiv (\{0\}, \emptyset, \emptyset, \{(0,2)\})$, die genau ein zweistelliges Relationssymbol $\dot R_0$ besitzt, das wir mit $\dot\in$ bezeichnen. Wir setzen $\mathrm{Fml}(\dot\in) :\equiv \mathrm{Fml}(L(\dot\in))$. Zur Festlegung einer $L(\dot\in)$-Struktur genügen Trägermenge und die Interpretation des zweistelligen Relationssymbols, wir sprechen hier auch von $\dot\in$-Strukturen. Wir bezeichnen $\dot\in$-Strukturen vereinfachend mit $M = (M, E)$, ohne zwischen Struktur und Träger zu unterscheiden; dabei ist E die Interpretation von $\dot\in$. Ein wichtiger Spezialfall ist dadurch gegeben, dass E die Einschränkung der $\in$-Relation auf M ist:

Definition 10.27 Unter einer $\in$-Struktur (ohne Punkt!) verstehen wir Strukturen der Form $M = (M, \in\restriction M)$. Wir schreiben hierfür auch kurz $M = (M, \in)$.

Lemma 10.28 *Es gilt* **ZF** $\vdash \mathrm{Fml}(\dot\in) \subseteq V_\omega$.

Beweis. Es ist $A_{L(\dot\in)} \subseteq \omega \times \omega$. Jede Formel $\varphi \in \mathrm{Fml}(\dot\in) = A^*_{L(\dot\in)}$ ist also von der Form

$$\varphi = \{(i, (k_i, l_i)) \mid i < n\}$$

mit $n, k_i, l_i \in \omega$. Dann ist $\mathrm{rg}((i, (k_i, r_i))) \in \omega$ und $\mathrm{rg}(\varphi) = \mathrm{lub}\{\mathrm{rg}((i, (k_i, r_i))) \mid i < n\} < \omega$. Also ist $\mathrm{Fml}(L(\dot\in)) \subseteq V_\omega$. QED

Wir ordnen nun jeder $\in$-Formel φ eine Menge $\ulcorner\varphi\urcorner \in \mathrm{Fml}(\dot\in)$ zu.

Definition 10.29 Sei φ eine $\in$-Formel. Wir definieren die **Gödel-Menge** $\ulcorner\varphi\urcorner$ von φ durch Rekursion über den Aufbau von φ:

(i) $\ulcorner v_i = v_j\urcorner :\equiv \dot v_i \doteq \dot v_j$;

(ii) $\ulcorner v_i \in v_j\urcorner :\equiv \dot v_i \dot\in \dot v_j$;

(iii) $\ulcorner(\varphi \wedge \psi)\urcorner :\equiv \dot{(}\ulcorner\varphi\urcorner \dot{\wedge} \ulcorner\psi\urcorner\dot{)}$;
(iv) $\ulcorner\neg\varphi\urcorner :\equiv \dot{\neg}\ulcorner\varphi\urcorner$;
(v) $\ulcorner\forall v_i\varphi\urcorner :\equiv \dot{\forall}\dot{v}_i\ulcorner\varphi\urcorner$.

Ist Φ eine konkret vorgegebene, endliche Liste von $\in$-Formeln $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$, so definieren wir $\ulcorner\Phi\urcorner :\equiv \{\ulcorner\varphi_0\urcorner, \ldots, \ulcorner\varphi_{n-1}\urcorner\}$.

Bemerkung 10.30 (a) (i) und (ii) in der obigen Definition müßten exakt $\ulcorner v_i = v_j\urcorner :\equiv \dot{v}_{\tilde{\imath}} \doteq \dot{v}_{\tilde{\jmath}}$ und $\ulcorner v_i \in v_j\urcorner :\equiv \dot{v}_{\tilde{\imath}} \dot{\in} \dot{v}_{\tilde{\jmath}}$ lauten, da $\tilde{n}$ die Formalisierung der metasprachlichen natürlichen Zahl n in V ist.[16]

(b) Ist φ eine $\in$-Formel, so ist $\ulcorner\varphi\urcorner$ ein Klassenterm der Form

$$\{(\tilde{0}, (\tilde{\imath_0}, \tilde{\jmath_0})), \ldots, (\widetilde{n-1}, (\widetilde{\imath_{n-1}}, \widetilde{\jmath_{n-1}}))\},$$

wobei n und i_k, j_k für $k < n$ konkret gegebene (metasprachliche) natürliche Zahlen sind. Dies beweist man leicht durch eine (metasprachliche!) Rekursion über den Aufbau von φ, wenn man (a) sowie die Definitionen von $\dot{v}_k$ sowie $\dot{(}$ und $\dot{)}$ sowie $\dot{\neg}$ und $\dot{\wedge}$ und $\dot{\forall}$ beachtet. Es ist $\mathrm{rg}(\ulcorner\psi\urcorner) = \tilde{l}$ mit $l = \max_{k=0,\ldots,n-1} \max\{k, i_k + 2, j_k + 2\} + 2$.

(c) Wir fassen die Junktoren $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ und den Quantor $\exists$ in der üblichen Weise als Abkürzungen auf und erhalten:
$\ulcorner(\varphi \vee \psi)\urcorner = \dot{(}\ulcorner\varphi\urcorner \dot{\vee} \ulcorner\psi\urcorner\dot{)}$,
$\ulcorner(\varphi \rightarrow \psi)\urcorner = \dot{(}\ulcorner\varphi\urcorner \dot{\rightarrow} \ulcorner\psi\urcorner\dot{)}$,
$\ulcorner(\varphi \leftrightarrow \psi)\urcorner = \dot{(}\ulcorner\varphi\urcorner \dot{\leftrightarrow} \ulcorner\psi\urcorner\dot{)}$,
$\ulcorner\exists v_i\varphi\urcorner = \dot{\exists}\dot{v}_i\ulcorner\varphi\urcorner$.

(d) Wir können nicht argumentieren, daß jedes $\sigma \in \mathrm{Fml}(L(\dot{\in}))$ von der Form $\sigma = \ulcorner\varphi\urcorner$ mit einer $\in$-Formel φ ist. Existiert z.B. ein $n \in \omega$, das nicht von der Form $\tilde{n}$ ist, so gibt es keine $\in$-Formel φ mit $\ulcorner\varphi\urcorner = \dot{v}_n \doteq \dot{v}_n$.

Mit Hilfe der Gödel-Mengen können wir **ZF** in **ZF** formalisieren.

Definition 10.31 Wir definieren:

$$\begin{aligned}
\ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner :\equiv {} & \Big\{\ulcorner(\mathbf{Ex})\urcorner, \ulcorner(\mathbf{Ext})\urcorner, \ulcorner(\mathbf{Paar})\urcorner, \ulcorner(\textstyle\bigcup\mathbf{\text{-}Ax})\urcorner, \ulcorner(\mathbf{Pot})\urcorner, \ulcorner(\mathbf{Inf})\urcorner\Big\} \cup \\
& \Big\{\dot{\forall}\dot{v}_1 \ldots \dot{\forall}\dot{v}_n \dot{\forall}\dot{v}_{n+1} \dot{\exists}\dot{v}_{n+2} \dot{\forall}\dot{v}_0 \dot{(}\dot{v}_0 \dot{\in} \dot{v}_{n+2} \dot{\leftrightarrow} \dot{(}\dot{v}_0 \dot{\in} \dot{v}_{n+1} \dot{\wedge} \varphi\dot{)}\dot{)} \;\Big|\; n < \omega \wedge \varphi \in \mathrm{Fml}_{n+1}(L(\dot{\in}))\Big\} \cup \\
& \Big\{\dot{\forall}\dot{v}_2 \ldots \dot{\forall}\dot{v}_{n+1} \dot{(}\dot{\forall}\dot{v}_0 \dot{\forall}\dot{v}_{n+2} \dot{\forall}\dot{v}_{n+3} \dot{(}\dot{(}\varphi\frac{\dot{v}_{n+2}}{\dot{v}_1} \dot{\wedge} \varphi\frac{\dot{v}_{n+3}}{\dot{v}_1}\dot{)} \dot{\rightarrow} \dot{v}_{n+2} = \dot{v}_{n+3}\dot{)} \\
& \qquad \dot{\longrightarrow} \dot{\forall}\dot{v}_{n+2} \dot{\exists}\dot{v}_{n+3} \dot{\forall}\dot{v}_1 \dot{(}\dot{v}_1 \dot{\in} \dot{v}_{n+3} \dot{\leftrightarrow} \dot{\exists}\dot{v}_0 \dot{(}\dot{v}_0 \dot{\in} \dot{v}_{n+2} \dot{\wedge} \varphi\dot{)}\dot{)} \;\Big| \\
& \qquad n < \omega \wedge \varphi \in \mathrm{Fml}_{n+2}(L(\dot{\in})) \dot{\wedge} \{\dot{v}_{n+2}, \dot{v}_{n+3}\} \cap \mathrm{var}(\varphi) = \emptyset\Big\} \cup \\
& \Big\{\dot{\forall}\dot{v}_1 \ldots \dot{\forall}\dot{v}_n \dot{(}\dot{\exists}\dot{v}_0\varphi \dot{\rightarrow} \dot{\exists}\dot{v}_0 \dot{(}\varphi \dot{\wedge} \dot{\forall}\dot{v}_{n+1} \dot{(}\dot{v}_{n+1} \dot{\in} \dot{v}_0 \dot{\rightarrow} \dot{\neg}\, \varphi\frac{\dot{v}_{n+1}}{\dot{v}_0}\dot{)}\dot{)}\dot{)} \;\Big| \\
& \qquad n < \omega \wedge \varphi \in \mathrm{Fml}_{n+1}(L(\dot{\in})) \wedge \dot{v}_{n+1} \notin \mathrm{var}(\varphi)\Big\}.
\end{aligned}$$

[16] zu $\tilde{n}$ siehe **??**.

Es ergibt sich sofort:

Lemma 10.32 *Ist* φ *ein* **ZF**-*Axiom, so gilt* $\mathbf{ZF} \vdash \ulcorner\varphi\urcorner \in \ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner$. *Ferner gilt* $\mathbf{ZF} \vdash \ulcorner\mathbf{ZF}\urcorner \subseteq \mathrm{Fml}_0(L(\dot\in))$.

11 Relativierungen von Formeln.

Wir setzen in diesem Kapitel – sofern nichts anderes gesagt wird – nur **EML** voraus.
Der Satz von Gödel über die relative Konsistenz des Auswahlaxioms wird durch Angabe einer uniformen Methode bewiesen, mit der sich jedes Modell von **ZF** in ein Modell von **ZFC** transformieren lässt. Wir definieren dafür Submodelle von Modellen für die Sprache der Mengenlehre: der Träger des Submodells wird durch eine $\in$-Formel innerhalb des äußeren Modells definiert, die $\in$-Relation es Submodells ist die Einschränkung der äußeren $\in$-Relation auf diesen Träger. Dieses Verfahren erinnert an gewisse Konstruktionen von Modellen der *nicht-euklidischen* Geometrie als Submodelle von Modellen der *euklidischen* Geometrie. Die Submodell-Bildung wird durch *Relativierungen* von Formeln und Termen auf Terme realisiert.

11.1 Die Relativierung einer $\in$-Formel auf einen $\in$-Term.

Definition 11.1 Sei W ein $\in$-Term und φ eine $\in$-Formel, so daß W und φ keine Variablen gemeinsam haben. Wir definieren die **Relativierung von φ auf W**, φ^W, durch Rekursion über den Formelaufbau durch

(i) $(v_i \in v_j)^W :\equiv v_i \in v_j$;
(ii) $(v_i = v_j)^W :\equiv v_i = v_j$;
(iii) $(\neg\varphi)^W :\equiv \neg(\varphi)^W$;
(iv) $(\varphi \wedge \psi)^W :\equiv (\varphi^W \wedge \psi^W)$;
(v) $(\forall v_i \varphi)^W :\equiv \forall v_i(v_i \in W \rightarrow \varphi^W)$.

Die $\in$-Formel φ^W entsteht also aus φ, indem der Laufbereich jedes Quantors in φ auf den $\in$-Term W beschränkt wird. Hieraus folgt durch Induktion über den Aufbau von φ:

Satz 11.2 *Sei* $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ *eine* $\in$-*Formel und die Variable* x *komme in* φ *nicht vor. Dann gilt:*

$$x \neq \emptyset \longrightarrow \forall v_0, \ldots, v_{n-1} \in x\ (\varphi^x(v_0, \ldots, v_{n-1}) \leftrightarrow (x, \in) \models \ulcorner\varphi\urcorner[v_0, \ldots, v_{n-1}]).$$

Die Gültigkeit einer auf den $\in$-Term W relativierten Formel φ^W kann angesichts dieses Satzes als Gültigkeit der Formel φ in dem „Modell“ $(W, \in)$ interpretiert werden. Daher schreiben wir auch $(W, \in) \models \varphi$ statt φ^W.
Um mit der Methode der inneren Modelle Aussagen über relative Konsistenzen zu erhalten, benötigen wir noch:

Satz 11.3 *Sei $M = (M, E)$ eine $\dot{\in}$-Struktur. Sei $W = \{x|\chi\}$ ein Klassenterm ohne freie Variable. Definiere die Interpretation von W in M als $W^M = \{x|(M, E) \models \chi\}$ und sei N die $\dot{\in}$-Struktur $N = (W^M, E \restriction W^M)$. Für $\varphi \in L(\dot{\in})$ definiere die Relativierung φ^W rekursiv wie in 11.1. Dann gilt für alle $\varphi \in L(\dot{\in})$ und Belegungen β in N: $M \models \varphi^W[\beta]$ gdw. $N \models \varphi$.*

11.2 Relativierungen der ZFC-Axiome.

Wir untersuchen, wann **ZFC**-Axiome in Strukturen $(W, \in)$ gelten. Hierbei interessieren vor allem *transitive* Klassenterme W.

Satz 11.4 *Es gelte* **ZF**. *Sei W ein transitiver Klassenterm, $W \neq \emptyset$. Dann gilt:*

(a) $(\mathbf{Ex})^W$.

(b) $(\mathbf{Ext})^W$.

(c) $(\mathbf{Paar})^W \longleftrightarrow \forall a \in W\, \forall b \in W\ \{a, b\} \in W$.

(d) $(\bigcup\text{-}\mathbf{Ax})^W \longleftrightarrow \forall a \in W\ \bigcup a \in W$.

(e) *Sei ψ die für die $\in$-Formel $\varphi(x, \vec{w})$ gebildete Instanz von* **(Aus)**. *Dann gilt:* $\psi^W \longleftrightarrow \forall \vec{w} \in W\, \forall a \in W\ \{x \in a \mid \varphi^W(x, \vec{w})\} \in W$.

(f) $(\mathbf{Pot})^W \longleftrightarrow \forall a \in W\ \mathcal{P}(a) \cap W \in W$.

(g) $(\mathbf{Inf})^W \longleftrightarrow \exists a \in W\ (\emptyset \in a \wedge \forall x \in a\ x + 1 \in a)$.
Speziell: $\omega \in W \longrightarrow (\mathbf{Inf})^W$ *und* $((\mathbf{Inf})^W \wedge (\mathbf{Aus})^W) \longrightarrow \omega \in W$.

(h) $(\mathbf{Ers})^W$ *gilt genau dann, wenn für jede $\in$-Formel $\varphi(x, y, \vec{w})$ gilt:*

$$\forall \vec{w} \in W\ \Big(\forall x, y, y' \in W\ ((\varphi^W(x, y, \vec{w}) \wedge \varphi^W(x, y', \vec{w})) \to y = y')$$
$$\longrightarrow \forall a \in W\ \{y \mid \exists x \in a\ \varphi^W(x, y, \vec{w})\} \cap W \in W\Big).$$

(i) *Es gilt* $(\mathbf{Fund})^W$. *Genauer: Ist ψ eine Instanz von* **(Fund)**, *so gilt ψ^W.*

(j) $(\mathbf{AC})^W \longleftrightarrow \forall a \in W\Big((\emptyset \notin a\ \wedge \forall x, y \in a\ (x \neq y \to x \cap y = \emptyset)) \longrightarrow \exists b \in W\, \forall x \in a\, \exists z\, b \cap x = \{z\}\Big)$.

Beweis. Wir notieren zunächst

(1) Sei $x \in W$ und seien φ und ψ $\in$-Formeln. Dann gilt:
  (a) $x \cap W = x$.
  (b) $\forall y\, ((y \in x \wedge \varphi) \to \psi) \longleftrightarrow \forall y \in W\ ((y \in x \wedge \varphi) \to \psi)$.
  (c) $\exists y\, (y \in x \wedge \varphi) \longleftrightarrow \exists y \in W\ (y \in x \wedge \varphi)$

Beweis. Da W transitiv ist, folgt $x \subseteq W$ aus $x \in W$, und dies impliziert (a). Da nach (a) $y \in x$ gleichwertig ist mit $y \in W \wedge y \in x$ ergeben sich (b) und (c). qed(1)

Wir beweisen nun die einzelnen Punkte des Satzes.
zu (a). Es gilt: $(\mathbf{Ex})^W \longleftrightarrow \exists x \in W\, \forall y \in W\ y \notin x$. Da W transitiv ist, gilt $\forall y \in W\, y \notin x \longleftrightarrow \forall y\, y \notin x$ für jedes $x \in W$, beachte (1a). Hier ist die rechte Teilformel gleichwertig

mit $x = \emptyset$, so daß wir $(\mathbf{Ex})^W \longleftrightarrow \exists x \in W\ x = \emptyset$ haben. Um (a) zu beweisen, ist somit $\emptyset \in W$ zu zeigen. Hierzu verifizieren wir:

(2) Es gilt: $x \neq \emptyset \longrightarrow \emptyset \in \mathrm{TC}(x)$.[17]

Beweis. Wir führen eine $\in$-Induktion durch, siehe **??**. Sei $x \in V$ und die Behauptung für die Elemente von x bewiesen. Ist $x = \emptyset$, so ist nichts zu beweisen. Ist $x \neq \emptyset$, so sei $y \in x$ beliebig. Ist $y = \emptyset$, so ist (2) gezeigt; ist $y \neq \emptyset$, so gilt nach Induktionsvoraussetzung $\emptyset \in \mathrm{TC}(y)$, und weil $\mathrm{TC}(y) \subseteq \mathrm{TC}(x)$ gilt, folgt hieraus die Behauptung. qed(2)

Da $W \neq \emptyset$ gilt, existiert $x \in W$. Ist $x = \emptyset$, so sind wir fertig; ist $x \neq \emptyset$, so ist nach (2) $\emptyset \in \mathrm{TC}(x)$. Da W transitiv ist, folgt $\mathrm{TC}(x) \subseteq W$ und somit $\emptyset \in W$. Damit ist (a) bewiesen.

zu (b). Es gilt: $(\mathbf{Ext})^W \longleftrightarrow \forall a, b \in W\ (a = b \leftrightarrow \forall x \in W\ (x \in a \leftrightarrow x \in b))$. Aus (1b) folgt, daß für $a, b \in W$ gilt $\forall x \in W\ (x \in a \leftrightarrow x \in b) \longleftrightarrow \forall x\, (x \in a \leftrightarrow x \in b)$. Hier ist die rechte Teilformel gleichwertig mit $a \subseteq b \wedge b \subseteq a$. Also gilt: $(\mathbf{Ext})^W \longleftrightarrow \forall a, b \in W\ (a = b \leftrightarrow (a \subseteq b \wedge b \subseteq a))$. Da **ZF** gilt, ist dies (nach **(Ext)**) erfüllt. Damit ist (b) bewiesen.

zu (c). Es gilt: $(\mathbf{Paar})^W \longleftrightarrow \forall a, b \in W\, \exists c \in W\, \forall x \in W\ (x \in c \leftrightarrow (x = a \vee x = b))$. Aus (1b) folgt, daß für alle $a, b, c \in W$ gilt: $\forall x \in W\ (x \in c \leftrightarrow (x = a \vee x = b)) \longleftrightarrow \forall x\, (x \in c \leftrightarrow (x = a \vee x = b))$. Die rechte Teilformel ist gleichwertig mit $c = \{a, b\}$. Also gilt $(\mathbf{Paar})^W \longleftrightarrow \forall a, b \in W\ \{a, b\} \in W$. Damit ist (c) bewiesen.

zu (d). Es gilt: $(\bigcup\text{-}\mathbf{Ax})^W \longleftrightarrow \forall a \in W\, \exists b \in W\, \forall x \in W\ (x \in b \leftrightarrow \exists y \in W (y \in a \wedge x \in y))$. Mit (1) folgt wieder leicht, daß $\forall x \in W\ (x \in b \leftrightarrow \exists y \in W (y \in a \wedge x \in y)) \longleftrightarrow \forall x (x \in b \leftrightarrow \exists y\, (y \in a \wedge x \in y))$ für alle $a, b \in W$ gilt. Hier ist die rechte Teilformel mit $b = \bigcup a$ gleichwertig, so daß sich die Gültigkeit von $(\bigcup\text{-}\mathbf{Ax})^W \longleftrightarrow \forall a \in W\, \exists b \in W\ b = \bigcup a$ ergibt, wie in (d) behauptet.

zu (e). Sei ψ die mit $\varphi(x, \vec{w})$ gebildete Instanz von **(Aus)**. Dann gilt

$$\psi \longleftrightarrow \forall \vec{w}\, \forall a\, \exists\, b\, \forall x\, (x \in b \leftrightarrow (x \in a \wedge \varphi(x, \vec{w}))).$$

Es ergibt sich

$$\psi^W \longleftrightarrow \forall \vec{w} \in W\, \forall a \in W\, \exists\, b \in W\ \underbrace{\forall x \in W\ (x \in b \leftrightarrow (x \in a \wedge \varphi^W(x, \vec{w})))}_{\overset{(1b)}{\longleftrightarrow} \forall x\, (x \in b \leftrightarrow (x \in a \wedge \varphi^W))}.$$

Da $\forall x (x \in b \leftrightarrow \psi)$ gerade $b = \{x \mid \psi\}$ bedeutet, folgt hieraus (e).

zu (f). Es gilt

$$(\mathbf{Pot})^W \longleftrightarrow \forall a \in W\, \exists b \in W\, \forall x \in W\, (x \in b \leftrightarrow \forall y \in W\, (y \in x \rightarrow y \in a)).$$

Wegen (1b) ist dies gleichwertig mit $\forall a \in W\, \exists b \in W\, \forall x \in W\, (x \in b \leftrightarrow \forall y\, (y \in x \rightarrow y \in a))$. Wegen $\forall x \in W\, (x \in b \leftrightarrow \forall y\, (y \in x \rightarrow y \in a)) \longleftrightarrow b = \mathcal{P}(a) \cap W$ folgt $(\mathbf{Pot})^W \longleftrightarrow \forall a \in W\ \mathcal{P}(a) \cap W \in W$. Dies war zu zeigen.

[17] $\mathrm{TC}(x)$ ist die kleinste transitive Obermenge von x, vgl. **??**.

zu (g). $(\mathbf{Inf})^W$ ist äquivalent zu

$$\exists a \in W \Big(\exists x \in W \; (x \in a \wedge \forall y \in W \; y \notin x) \wedge \\ \forall x \in W \, (x \in a \to \exists y \in W \; (y \in a \wedge \forall z \in W \; (z \in y \leftrightarrow (z = x \vee z \in x)))) \Big).$$

Aus (1c) und den Überlegungen zu $(\mathbf{Ex})^W$ folgt, daß für $a \in W$ gilt

$$\exists x \in W \; (x \in a \wedge \forall y \in W \; y \notin x) \longleftrightarrow \exists x \, (x \in a \wedge x = \emptyset);$$

Durch mehrfaches Anwenden von (1b) und (1c) folgt für $a \in W$

$$\forall x \in W \, (x \in a \to \exists y \in W \; (y \in a \wedge \forall z \in W \; (z \in y \leftrightarrow (z = x \vee z \in x)))) \\ \longleftrightarrow \forall x (x \in a \to \exists y (y \in a \wedge \forall z (z \in y \leftrightarrow (z = x \vee z \in x)))).$$

(Behandle zunächst $\forall z$, danach $\exists y$ und schließlich $\forall x$.) Dieses ist gleichwertig mit $\forall x \in a \; x{+}1 \in a$, so daß wir $(\mathbf{Inf})^W \longleftrightarrow \exists a \in W \, (\emptyset \in a \wedge \forall x \in a \; x{+}1 \in a)$ haben. Hieraus folgt sofort $\omega \in W \longrightarrow (\mathbf{Inf})^W$. Gelte nun $(\mathbf{Inf})^W$ und $(\mathbf{Aus})^W$. Wähle $a \in W$ mit $\emptyset \in a$, so daß a unter der $+1$-Bildung abgeschlossen ist. Sei $s(x) :\equiv \exists y \in x \, \forall z \in x \; (z \in y \vee z = y)$ eine $\in$-Formel, die aussagt, daß x ein Nachfolger ist. Wegen $s(x)^W \longleftrightarrow \exists y \in x \cap W \, \forall z \in x \cap W \; (z \in y \vee z = y)$ und (1a) gilt $s(x)^W \leftrightarrow s(x)$ für alle $x \in W$. Sei $\psi(x) :\equiv s(x) \wedge \forall y \in x \; s(y)$. Dann gilt $\omega = \{n \,|\, \psi(n)\} = \{n \in a \,|\, \psi(n)\}$, vgl. 4.15. Da aus (1a) und $s^W \leftrightarrow s$ folgt, daß $\psi(x)^W \leftrightarrow \psi(x)$ für $x \in W$ gilt, ergibt sich $\omega = \{n \in a \,|\, \psi^W(n)\} \in W$ nach $(\mathbf{Aus})^W$. Damit ist (g) bewiesen.

zu (h). Sei $\varphi(x, y, \vec{x})$ eine $\in$-Formel und ψ die mit φ gebildete Instanz von **(Ers)**. Es ist zu zeigen, daß ψ^W äquivalent zu der in (h) angegebenen $\in$-Formel ist. Es ist

$$\psi^W \longleftrightarrow \forall \vec{w} \in W \Big(\forall x, y, y' \in W \; ((\varphi^W(x, y, \vec{w}) \wedge \varphi^W(x, y', \vec{w})) \to y = y') \\ \longrightarrow \forall a \in W \, \exists b \in W \; \underbrace{\forall y \in W \; (y \in b \leftrightarrow \exists x \in \underbrace{a \cap W}_{\overset{(1a)}{=} a} \; \varphi^W(x, y, \vec{w}))}_{\longleftrightarrow b = \{y \,|\, \exists x \in a \; \varphi^W(x,y,\vec{w})\} \cap W} \Big).$$

Dies war zu zeigen.

zu (i). Sei ψ die mit der $\in$-Formel $\varphi(x, \vec{w})$ gebildete Instanz von **(Fund)**, d.h.,

$$\psi \longleftrightarrow \forall \vec{w} \Big(\exists x \varphi(x, \vec{w}) \longrightarrow \exists x (\varphi(x, \vec{w}) \wedge \forall y \in x \; \neg \varphi(y, \vec{w})) \Big).$$

Sei ψ_0 die mit der $\in$-Formel $x \in W \wedge \vec{w} \in W \wedge \varphi^W(x, \vec{w})$ gebildete Instanz von **(Fund)**. Dann gilt

$$\psi_0 \longleftrightarrow \forall \vec{w} \in W \Big(\exists x \in W \; \varphi^W(x, \vec{w}) \\ \longrightarrow \exists x \in W \; (\varphi^W(x, \vec{w}) \wedge \forall y \in x \; \underbrace{\neg (y \in W \wedge \vec{w} \in W \wedge \varphi^W(y, \vec{w}))}_{\leftrightarrow \neg \varphi^W \text{ da } y \in x \subseteq W \text{ und } \vec{w} \in W}) \Big),$$

wie man leicht sieht. Mit Hilfe von (1b) folgt, daß dies äquivalent zu ψ^W ist. Da ψ_0 gilt, gilt somit auch ψ^W. Damit ist (i) gezeigt.
zu (j). $(\mathbf{AC})^W$ ist äquivalent mit

$$\begin{aligned}\forall a \in W\, \exists b \in W \Big(&(\forall x \in W\ (x \in a \to \exists y \in W\ y \in x)\ \wedge \\ &\quad \forall x \in W\, \forall y \in W((x \in a\ \wedge\ y \in a\ \wedge\ x \neq y) \to \neg \exists z \in W\ (z \in x\ \wedge\ z \in y))) \\ &\longrightarrow \forall x \in W\ (x \in a \to \exists y \in W\ (y \in x\ \wedge\ y \in b\ \wedge \\ &\qquad \forall z \in W\ ((z \in x\ \wedge\ z \in b) \to z = y)))\Big).\end{aligned}$$

Durch mehrfaches Anwenden von (1b) und (1c) folgt analog zur Vorgehensweise bei der Analyse von $(\mathbf{Inf})^W$, daß dies äquivalent ist zu

$$\begin{aligned}\forall a \in W\, \exists b \in W\ \Big(&(\forall x\, (x \in a \to \exists y\, y \in x)\ \wedge\ \forall x \forall y((x \in a\ \wedge\ y \in a\ \wedge\ x \neq y) \to \neg \exists z\, (z \in x\ \wedge\ z \in y))) \\ &\longrightarrow \forall x(x \in a \to \exists y(y \in x\ \wedge\ y \in b\ \wedge\ \forall z\, ((z \in x\ \wedge\ z \in b) \to z = y)))\Big).\end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu der in (j) angegebenen $\in$-Formel. Also gilt (j).
Damit ist der Satz bewiesen. QED

Wir betrachten als Beispiel die VON NEUMANNsche Hierarchie.

Satz 11.5 *Es gelte* **ZFC**. *Sei* $\alpha \in \mathrm{On}$, $\alpha > 0$.
(a) Es gelten $(\mathbf{Ex})^{V_\alpha}$, $(\mathbf{Ext})^{V_\alpha}$, $(\bigcup\text{-}\mathbf{Ax})^{V_\alpha}$, $(\mathbf{Aus})^{V_\alpha}$, $(\mathbf{Fund})^{V_\alpha}$ *und* $(\mathbf{AC})^{V_\alpha}$.
(b) Ist $\alpha > \omega$, *so gilt* $(\mathbf{Inf})^{V_\alpha}$.
(c) Gilt $\mathrm{Lim}(\alpha)$, *so gelten* $(\mathbf{Paar})^{V_\alpha}$ *und* $(\mathbf{Pot})^{V_\alpha}$.

BEWEIS. Da V_α transitiv ist, folgt aus 11.4 sofort die Gültigkeit von $(\mathbf{Ex})^{V_\alpha}$, $(\mathbf{Ext})^{V_\alpha}$ und $(\mathbf{Fund})^{V_\alpha}$. Um $(\bigcup\text{-}\mathbf{Ax})^{V_\alpha}$ zu zeigen, fixieren wir $a \in V_\alpha$ beliebig. Ist $y \in \bigcup a$, so existiert ein $x \in a$ mit $y \in x$; also ist $\mathrm{rg}(y) < \mathrm{rg}(x) < \mathrm{rg}(a)$. Damit folgt

$$\mathrm{rg}(\bigcup a) = \sup\{\underbrace{\mathrm{rg}(y) + 1}_{\leq \mathrm{rg}(a)} \mid y \in \bigcup a\} \leq \mathrm{rg}(a) < \alpha.$$

Somit gilt $\bigcup a \in V_\alpha$, und dies war zu zeigen. Die Gültigkeit von $(\mathbf{Aus})^{V_\alpha}$ ergibt sich so: Sei $a \in V_\alpha$ und seien $\vec{w} \in V_\alpha$, ferner sei $\varphi(x, \vec{w})$ eine $\in$-Formel. Da $\{x \in a \mid \varphi^{V_\alpha}(x, \vec{w})\} \subseteq a$ gilt, folgt

$$\mathrm{rg}\Big(\{x \in a \mid \varphi^{V_\alpha}(x, \vec{w})\}\Big) \leq \mathrm{rg}(a) < \alpha,$$

also $\{x \in a \mid \varphi^{V_\alpha}(x, \vec{w})\} \in V_\alpha$. Dies war zu zeigen.
Um die Gültigkeit von $(\mathbf{AC})^{V_\alpha}$ zu beweisen, betrachte eine Menge $a \in V_\alpha$ von nichtleeren, disjunkten Mengen. Wegen $(\mathbf{AC})$ existiert ein $b \in V$, das mit jedem Element von a genau ein Element gemeinsam hat. Um aus b alle „überflüssigen" Elemente zu entfernen

(also jene, die nicht zu einem Element von a gehören), setzen wir $b' :\equiv \bigcup\{x \cap b \mid x \in a\}$. Dann ist b' eine Menge, die mit jedem Element von a genau ein Element gemeinsam hat; überdies gilt $b' \subseteq \bigcup a$. Aus letzterem folgt $\mathrm{rg}(b') \leq \mathrm{rg}(\bigcup a) \leq \mathrm{rg}(a) < \alpha$. Also ist $b' \in V_\alpha$ und $(\mathbf{AC})^{V_\alpha}$ gezeigt.

Ist $\alpha > \omega$, so gilt $\omega \in V_\alpha$ und $(\mathbf{Inf})^{V_\alpha}$ wegen $\omega \in V_{\omega+1} \subseteq V_\alpha$.

Nun gelte $\mathrm{Lim}(\alpha)$. Sind $a, b \in V_\alpha$, so gilt $\mathrm{rg}(a) < \alpha$ und $\mathrm{rg}(b) < \alpha$. Da α ein Limes ist, ist auch $\mathrm{rg}(a){+}1 < \alpha$ und $\mathrm{rg}(b){+}1 < \alpha$, so daß sich $\mathrm{rg}(\{a, b\}) = \max\{\mathrm{rg}(a){+}1, \mathrm{rg}(b){+}1\} < \alpha$ ergibt. Somit ist $\{a, b\} \in V_\alpha$, d.h., es gilt $(\mathbf{Paar})^{V_\alpha}$. Des weiteren ist

$$\mathrm{rg}(\mathcal{P}(a) \cap V_\alpha) \leq \mathrm{rg}(\{x \mid x \subseteq a\}) = \sup\{\underbrace{\mathrm{rg}(x)}_{\leq \mathrm{rg}(a)} {+}1 \mid x \subseteq a\} \leq \mathrm{rg}(a) + 1 < \alpha,$$

also $\mathcal{P}(a) \cap V_\alpha \in V_\alpha$. Somit gilt $(\mathbf{Pot})^{V_\alpha}$.

QED

11.3 Die Absolutheit von Formeln.

Um das Konzept der elementaren Substruktur[18] auf „Klassenmodelle“ von $\in$-Theorien zu übertragen, führen wir den Begriff der „absoluten Formel“ ein:

Definition 11.6 Seien W und W' $\in$-Terme und $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ eine $\in$-Formel, die sowohl mit W als auch mit W' keine Variable gemeinsam hat. Die $\in$-Formel φ heißt **W-W'-absolut**, falls gilt

$$\forall x_1 \in W \ \ldots \forall x_n \in W \ (\varphi^W \leftrightarrow \varphi^{W'}).$$

Statt „W-V-absolut“ sagen wir kurz **W-absolut**.

Für $W \subseteq W'$ bedeutet die W-W'-Absolutheit einer $\in$-Formel φ, dass bei jeder „Belegung“ der freien Variablen von φ mit Parametern $x_1, \ldots . x_n$ aus W gilt

$$(W, \in) \models \varphi(x_1, \ldots, x_n) \iff (W', \in) \models \varphi(x_1, \ldots, x_n).$$

Man kann einen „Absolutheitskalkül“ entwickeln, nach dem absolute Formeln aus absoluten Formeln gebildet werden können. Formeln, deren Quantifikationen beschränkt sind, sind absolut.

Lemma 11.7 *Seien W, W' $\in$-Terme und es gelte $W \subseteq W'$ und $W \neq \emptyset$. Dann gilt:*

(a) Atomare Formeln, also Formeln der Gestalt $v_i \in v_j$ bzw. $v_i = v_j$ sind W-W'-absolut.

(b) Wenn φ und ψ W-W'-absolut sind, so auch $\neg\varphi$ und $(\varphi \wedge \psi)$; damit sind dann auch $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ sowie $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ W-W'-absolut.

(c) Sei W transitiv. Ist dann φ W-W'-absolut, so auch $\forall x \in y\ \varphi$; damit ist dann auch $\exists x \in y\ \varphi$ W-W'-absolut.

[18] siehe **??**

Beweis. zu (a). Dies ist klar, da $\varphi^W \equiv \varphi^{W'} \equiv \varphi$ gilt.
zu (b). Aus den Voraussetzungen $\forall \vec{x} \in W\ (\varphi^W \leftrightarrow \varphi^{W'})$ sowie $\forall \vec{x} \in W\ (\psi^W \leftrightarrow \psi^{W'})$ folgt

$$\forall \vec{x} \in W \left(\underbrace{\neg(\varphi^W)}_{\equiv (\neg\varphi)^W} \longleftrightarrow \underbrace{\neg(\varphi^{W'})}_{\equiv (\neg\varphi)^{W'}} \right) \quad \text{sowie} \quad \forall \vec{x} \in W \left(\underbrace{(\varphi^W \wedge \psi^W)}_{\equiv (\varphi\wedge\psi)^W} \longleftrightarrow \underbrace{(\varphi^{W'} \wedge \psi^{W'})}_{\equiv (\varphi\wedge\psi)^{W'}} \right).$$

Dies war zu zeigen.
zu (c). Wir halten zunächst fest:

(1) Ist $y \in W$, so gilt $y \cap W = y \cap W'$.

Beweis. Da W transitiv ist, folgt $y \subseteq W$ aus $y \in W$. Also gilt $y = y \cap W \subseteq y \cap W' \subseteq y$. Hieraus folgt die Behauptung. qed(1)

Sei nun $\varphi \equiv \varphi(x, y, \vec{z})$. Seien $y, \vec{z}$ Elemente von W. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(\forall x \in y\ \varphi(x, y, \vec{z}))^W &\longleftrightarrow \forall x \in y \cap W\ \varphi(x, y, \vec{z})^W \\
&\longleftrightarrow \forall x \in y \cap W\ \varphi(x, y, \vec{z})^{W'} \quad (\text{da } \varphi\ W\text{-}W'\text{-absolut}) \\
&\overset{(1)}{\longleftrightarrow} \forall x \in y \cap W'\ \varphi(x, y, \vec{z})^{W'} \\
&\longleftrightarrow (\forall x \in y\ \varphi(x, y, \vec{z}))^{W'}
\end{aligned}$$

Also gilt $\forall y, \vec{z} \in W \left((\forall x \in y\ \varphi(x, y, \vec{z}))^W \longleftrightarrow (\forall x \in y\ \varphi(x, y, \vec{z}))^{W'} \right)$. QED

Das Lemma zeigt, daß für Absolutheitsbetrachtungen solche $\in$-Formeln eine herausragende Rolle spielen, deren Quantoren auf Mengen beschränkt sind.

Definition 11.8 Eine $\in$-Formel φ heißt **Σ_0-Formel**, falls sie von einer der folgenden Formen ist:

(i) φ ist atomar, also von der Form $v_i \in v_j$ oder $v_i = v_j$;
(ii) $\varphi \equiv \neg\psi$, wobei ψ eine Σ_0-Formel ist;
(iii) $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$, wobei ψ und χ Σ_0-Formeln sind;
(iv) $\varphi \equiv \forall x(x \in y \to \psi)$, wobei ψ eine Σ_0-Formel ist.

Aus 11.7 folgt sofort:

Satz 11.9 *Seien W und W' $\in$-Terme, so daß $W \neq \emptyset$ und $W \subseteq W'$ gilt und W transitiv ist. Dann ist jede Σ_0-Formel, die weder mit W noch mit W' eine Variable gemeinsam hat, W-W'-absolut.*

12 Relative Konsistenzbeweise.

12.1 Die Methode der inneren Modelle.

Definition 12.1 Ein Klassenterm W heißt **inneres Modell** von **ZF**, falls $W \neq \emptyset$, W transitiv ist und φ^W für jedes **ZF**-Axiom φ gilt.

Innere Modelle lassen sich für relative Konsistenzbeweise nutzen:

Satz 12.2 *Es gelte* **ZF**. *Sei W ein inneres Modell von* **ZF** *und φ ein $\in$-Satz mit* **ZF** $\models \varphi^W$. *Dann ist* $\mathbf{ZF} + \varphi$ *relativ konsistent zu* **ZF**.

BEWEIS. Sei $M = (M, E)$ ein Modell von **ZF**. Sei N das Submodell $N = (W^M, E \upharpoonright W^M)$. Nach 11.3 gilt für alle Sätze χ:

$$N \models \chi \text{ gdw. } M \models \chi^W.$$

Nach Voraussetzung gilt die rechte Seite für alle $\chi \in \mathbf{ZF} + \varphi$, und N ist ein Modell von $\mathbf{ZF} + \varphi$. QED

Bemerkung 12.3 Unter Verwendung von 12.2 kann man relative Konsistenzbeweise mit Hilfe der **Methode der inneren Modelle** wie folgt führen. Sei φ ein $\in$-Satz und es sei die (relative) Konsistenz von $\mathbf{ZF} + \varphi$ zu zeigen. Hierzu konstruiere man einen unter der Voraussetzung **ZF** nicht-leeren, transitiven Klassenterm W mit $(\mathbf{ZF} + \varphi)^W$. Wir werden dieses Verfahren in 13.9 auf $\varphi \equiv (\mathbf{AC})$ anwenden.

Wir formulieren ein Kriterium dafür, dass ein vorgelegter Klassenterm W ein inneres Modell ist.

Definition 12.4 (a) Ein Klassenterm W heißt **fast-universell**, falls $\forall x(x \subseteq W \longrightarrow \exists y \in W\ x \subseteq y)$ gilt.

(b) Ein Klassenterm W heißt **Aussonderungs-abgeschlossen**, falls $\forall a, \vec{y} \in W\ \{x \mid x \in a \wedge \varphi^W(x, \vec{y})\} \in W$ für jede $\in$-Formel $\varphi(x, \vec{y})$ gilt.

Bemerkung 12.5 Nach Satz 11.4 ist die zweite Eigenschaft äquivalent dazu, dass in W das Aussonderungsschema **(Aus)** gilt.

Satz 12.6 *Gelte* **ZF**. *Der Klassenterm W sei transitiv, fast-universell und Aussonderungs-abgeschlossen. Dann ist W ein inneres Modell.*

BEWEIS. Nach Voraussetzung ist W transitiv. Da W fast-universell und $\emptyset \subseteq W$ ist, existiert ein $y \in W$ (mit $\emptyset \subseteq y$). Also ist $W \neq \emptyset$.
Aus der Transitivität von W und $W \neq \emptyset$ folgen nach 11.4 $(\mathbf{Ex})^W$, $(\mathbf{Ext})^W$ und $(\mathbf{Fund})^W$.
zu $(\mathbf{Paar})^W$. Seien $a, b \in W$. Da $\{a, b\} \subseteq W$ und W fast-universell ist, existiert ein $z \in W$ mit $z \supseteq \{a, b\}$. Dann gilt

$$\{a, b\} = \{x \in z \mid x = a \vee x = b\} = \{x \in z \mid (x = a \vee x = b)^W\}.$$

Da W Aussonderungs-abgeschlossen ist, folgt hieraus $\{a, b\} \in W$, und nach 11.4 $(\mathbf{Paar})^W$.
zu $(\bigcup\text{-}\mathbf{Ax})^W$. Sei $a \in W$. Da W transitiv ist, ist dann $\bigcup a \subseteq W$, so daß wegen der fast-Universalität von W ein $z \in W$ existiert mit $z \supseteq \bigcup a$. Somit ist

$$\bigcup a = \{y \in z \mid \exists x \in a\ y \in x\} = \{y \in z \mid (\exists x \in a\ y \in x)^W\}.$$

$\bigcup a \in W$ folgt aus der Aussonderungs-Abgeschlossenheit von W. Nach 11.4 gilt $(\bigcup\textbf{-Ax})^W$.
zu $(\mathbf{Aus})^W$. Dieses Schema folgt direkt aus der Definition von Aussonderungs-abgeschlossen und der Bemerkung12.5.
zu $(\mathbf{Pot})^W$. Sei $a \in W$. Dann ist $\mathcal{P}(a) \cap W \in V$ und $\mathcal{P}(a) \cap W \subseteq W$. Da W fast-universell ist, existiert ein $z \in W$ mit $\mathcal{P}(a) \cap W \subseteq z$, und es gilt

$$\mathcal{P}(a) \cap W = \{x \in z \,|\, \forall y \in x\; y \in a\} = \{x \in z \,|\, (\forall y \in x\; y \in a)^W\}.$$

Da W Aussonderungs-abgeschlossen ist, ist die Menge auf der rechten Seite in W, d.h., $\mathcal{P}(a) \cap W \in W$. Nach 11.4 gilt $(\mathbf{Pot})^W$.
zu $(\mathbf{Inf})^W$. Wir zeigen, dass $\mathrm{On} \subseteq W$; hieraus folgt $\omega \in W$ und $(\mathbf{Inf})^W$. Wenn $\mathrm{On} \not\subseteq W$ ist, so ist $\alpha :\equiv \mathrm{On} \cap W \in \mathrm{On}$, da W transitiv ist. Da $\alpha \subseteq W$ und W fast-universell ist, existiert ein $z \in W$ mit $\alpha \subseteq z$. Aus der Definition von α folgt $\alpha = z \cap \mathrm{On}$. Da die Formeln $\mathrm{Trans}(x)$ und $\mathrm{SLO}(x)$ äquivalent zu Σ_0-Formeln sind und daher W-absolut sind, ist:

$$\alpha = \{x \in z \,|\, x \in \mathrm{On}\} = \{x \in z \,|\, \mathrm{Trans}(x) \wedge \mathrm{SLO}(x)\} = \{x \in z \,|\, (\mathrm{Trans}(x) \wedge \mathrm{SLO}(x))^W\}$$

Da W Aussonderungs-abgeschlossen ist, ist die Menge auf der rechten Seite in W. Also ist $\alpha \in W$. Nach Wahl von α ist aber $\alpha \notin \mathrm{On} \cap W$. Widerspruch.
zu $(\mathbf{Ers})^W$. Sei $\varphi(x, y, \vec{w})$ eine $\in$-Formel. Seien $a, \vec{w} \in W$ und es gelte

$$\forall x, y, y'((\varphi^W(x, y, \vec{w}) \wedge \varphi^W(x, y', \vec{w})) \longrightarrow y = y')$$

Wende $(\mathbf{Ers})$ an auf die Formel $y \in W \wedge \varphi^W(x, y, \vec{w})$; dann ist

$$b :\equiv \{y \mid \exists x\, (x \in a \wedge (y \in W \wedge \varphi^W(x, y, \vec{w})))\} \in V.$$

Wegen $b \subseteq W$ existiert ein $z \in W$ mit $z \supseteq b$. Aufgrund von $(\mathbf{Aus})^W$ gilt dann (siehe 11.4)

$$b = \{y \in z \mid \exists x\, (x \in a \wedge (y \in W \wedge \varphi^W(x, y, \vec{w})))\} \in W.$$

Andererseits gilt $b = \{y \in W \mid \exists x \in a\; \varphi^W(x, y, \vec{w})\}$ nach Definition von b. Damit haben wir gezeigt, daß $\{y \in W \mid \exists x \in a\; \varphi^W(x, y, \vec{w})\} \in W$ gilt, so daß wir nach 11.4 $(\mathbf{Ers})^W$ bewiesen haben.
Damit ist $\mathbf{ZF}^W$ bewiesen. QED

12.2 Der Lévysche Reflexionssatz.

Der folgende Satz ist in vielen Konsistenzuntersuchungen wichtig. Er besagt, dass es für die Auswertung einer gegebenen Formel genügt, sich auf ein Anfangsstück des Universums zu beschränken.

Satz 12.7 (Reflexionssatz von Lévy[19]) *Es gelte* $\mathbf{ZF}$. *Sei* $\varphi_0(x_0, \ldots, x_{r-1}), \ldots, \varphi_{n-1}(x_0, \ldots, x_{r-1})$ *eine endliche Liste von* $\in$*-Formeln und sei* $\theta_0 \in \mathrm{On}$. *Dann existiert ein* $\theta \geq \theta_0$*, so daß* $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ V_θ*-absolut sind.*

[19] Azriel Lévy

Mit der Formel $\varphi(\alpha, x) :\equiv \mathrm{rg}(x) < \alpha$ folgt der Reflexionssatz aus dem folgenden, allgemeineren Resultat.

Satz 12.8 (Allgemeiner Reflexionssatz) *Es gelte* **ZF**. *Es sei $\varphi(\alpha, x)$ eine $\in$-Formel, so daß $W_\alpha :\equiv \{x \mid \varphi(\alpha, x)\}$ für jedes $\alpha \in \mathrm{On}$ eine Menge ist und $W_\alpha \subseteq W_\beta$ für $\alpha < \beta$ und $W_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} W_\alpha$ für jede Limesordinalzahl δ gilt. Setze $W :\equiv \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} W_\alpha$. Es sei $\varphi_0(x_0, \ldots, x_{r-1}), \ldots, \varphi_{n-1}(x_0, \ldots, x_{r-1})$ eine endliche Liste von $\in$-Formeln und es sei $\theta_0 \in \mathrm{On}$. Dann existiert eine Limesordinalzahl $\theta \geq \theta_0$, so daß $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ W_θ-W-absolut sind.*

Beweis. Wir können o.E. annehmen, daß die $\in$-Formeln φ_i nur unter Verwendung von $\neg$, $\wedge$ und $\exists$ aufgebaut sind und die Liste der φ_i wie folgt bzgl. Subformeln abgeschlossen ist: Ist ψ eine Subformel von φ_i, so ist $\psi \equiv \varphi_j$ für ein $j < i$. Für $i < n$ definiere $F_i \colon W^r \to \mathrm{On}$ durch

$$F_i(x_0, \ldots, x_{r-1}) :\equiv \begin{cases} \min\{\beta \mid \exists v \in W_\beta\ \psi^W(x_0, \ldots, x_{r-1})\}, & \text{falls } \varphi_i \equiv \exists v\psi \text{ und} \\ & \varphi_i^W(x_0, \ldots, x_{r-1}) \text{ gilt;} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Falls $\varphi_i \equiv \exists v\psi$ ist und $\varphi_i^W(x_0, \ldots, x_{r-1})$ gilt, ist $\{\beta \mid \exists v \in W_\beta\ \psi^W(x_0, \ldots, x_{r-1})\} \neq \emptyset$ wegen $W = \bigcup_{\beta\in\mathrm{On}} W_\beta$, so dass $F_i(x_0, \ldots, x_{r-1})$ eine Ordinalzahl ist. Überdies folgt sofort

(1) $\quad \forall\vec{x} \in W\, (\exists v \in W\ \psi^W(\vec{x}) \longleftrightarrow \exists v \in W_{F_i(\vec{x})}\ \psi^W(\vec{x}))$.

Definiere nun eine Folge $(\theta_m | m < \omega)$ rekursiv mit $\theta_{m+1} = \mathrm{lub}(F_i[W_{\theta_m}^r] \cup \{\theta_m\})$. Sei $\theta :\equiv \bigcup_{m<\omega} \theta_m$. Ist dann $\varphi_i \equiv \exists v\psi$, so gilt für alle $\vec{x} \in W_\theta$:

(2) $\quad \exists v \in W_{F_i(\vec{x})}\ \psi^W(\vec{x}) \longleftrightarrow \exists v \in W_\theta\ \psi^W(\vec{x})$.

Beweis. zu „$\Rightarrow$“. Wähle ein $m < \omega$ mit $\vec{x} \in W_{\theta_m}$. Dann gilt $W_{F_i(\vec{x})} \subseteq W_{\theta_{m+1}} \subseteq W_\theta$.
zu „$\Leftarrow$“. Dies folgt sofort aus (1). qed(2)

Wir zeigen durch Induktion nach $i < n$, dass $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ W_θ-W-absolut sind. Sei also $i < n$ und die W_θ-W-Absolutheit von φ_j für alle $j < i$ bewiesen. Dann sind folgende Fälle möglich:

Fall 1. φ_i ist atomar. Dann ist φ_i W_θ-W-absolut.

Fall 2. $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$ oder $\varphi \equiv \neg\psi$. Dann gilt $\psi \equiv \varphi_{j_1}$ und $\chi \equiv \varphi_{j_2}$ für gewisse $j_1, j_2 < i$. Nach Induktionsvoraussetzung sind φ_{j_1} und φ_{j_2} W_θ-W-absolut. Da aussagenlogische Verknüpfungen von absoluten Formeln wieder absolute Formeln sind, siehe 11.7, ergibt sich, dass φ_i W_θ-W-absolut ist.

Fall 3. $\varphi_i \equiv \exists v\psi$. Dann ist $\psi \equiv \varphi_j$ für ein $j < i$. Da nach Induktionsvoraussetzung φ_j W_θ-W-absolut ist, folgt für alle $\vec{x} \in W_\theta$:

$$\varphi_i^W(\vec{x}) \longleftrightarrow \exists v \in W\ \varphi_j^W(\vec{x}) \overset{(1)}{\longleftrightarrow} \exists v \in W_{F_i(\vec{x})}\ \varphi_j^W(\vec{x}) \overset{(2)}{\longleftrightarrow}$$

$$\exists v \in W_\theta\ \varphi_j^W(\vec{x}) \overset{\text{Ind.Vor.}}{\longleftrightarrow} \underbrace{\exists v \in W_\theta\ \varphi_j^{W_\theta}(\vec{x})}_{\equiv \varphi_i^{W_\theta}(\vec{x})}.$$

Also gilt $\forall \vec{x} \in W_\theta(\varphi_i^{W_\theta}(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi^W(\vec{x}))$. QED

Aus dem Lévyschen Reflexionssatz erhalten wir als interessantes Nebenresultat:

Satz 12.9 ZF *ist nicht endlich axiomatisierbar.*

Beweis. Angenommen, es gibt endlich viele **ZF**-Axiome $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ mit $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1} \vdash$ **ZF**. Dann existiert ein $\theta \in \mathrm{On}$ mit $\varphi_i^{V_\theta}$ für $i < n$. Sei θ minimal mit dieser Eigenschaft. Nach dem Reflexionssatz gilt **ZF** $\vdash \exists \kappa \in \mathrm{On}\, \exists x\, (x = V_\kappa \wedge (\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1})^x)$. Wegen $\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1} \vdash$ **ZF** folgt

$$\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1} \vdash \exists \kappa \in \mathrm{On}\, \exists x\, (x = V_\kappa \wedge (\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1})^x).$$

Da $(\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1})^{V_\theta}$ gilt, folgt aus dem Modell-Lemma **??**

$$\Big(\exists \kappa \in \mathrm{On}\, \exists x\, (x = V_\kappa \wedge (\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1})^x)\Big)^{V_\theta},$$

was nach dem Relativierungslemma **??** zu

(1) $\qquad \exists \kappa \in \mathrm{On} \cap V_\theta\, \exists x \in V_\theta\ (x = (V_\kappa)^{V_\theta} \wedge (\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1})^x)$

äquivalent ist. (Beachte, daß $(\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1})^x$ eine Σ_0-Formel ist.) Nach **??** gilt $(V_\kappa)^{V_\theta} = V_\kappa \cap V_\theta = V_{\min\{\kappa,\theta\}}$. Aus $\kappa \in V_\theta \cap \mathrm{On} = \theta$ folgt $\kappa < \theta$, also $(V_\kappa)^{V_\theta} = V_\kappa$. Aus (1) folgt dann $(\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1})^{V_\kappa}$, was wegen $\kappa < \theta$ der Minimalität von θ widerspricht. Damit ist der Satz bewiesen. QED

Bemerkung 12.10 Analog beweist man, daß auch **ZFC** nicht endlich axiomatisierbar ist.

13 Die relative Konsistenz von (AC).

Wir beweisen die relative Konsistenz von **ZFC** bezüglich **ZF** mit Hilfe des inneren Modells der Klasse HOD aller *erblich ordinalzahldefinierbaren Mengen*. Wir setzen in diesem Kapitel stets **ZF** voraus.

Definition 13.1 (a) Eine Menge x ist **definierbar** aus $y_1, \ldots, y_n \in V$, wenn es eine $\in$-Formel $\varphi(v_0, \ldots, v_n)$ gibt, so dass

$$\forall v_0\, (v_0 = x \longleftrightarrow \varphi(v_0, y_1, \ldots, y_n)).$$

(b) Eine Menge x ist **ordinalzahldefinierbar**, wenn es Ordinalzahlen $y_1, \ldots, y_n \in \mathrm{On}$ gibt, so dass x definierbar aus $y_1, \ldots, y_n$ ist.

Dies sind keine Definitionen in **ZF**. So können wir z.B. die „Klasse aller ordinalzahldefinierbaren Mengen“ nicht bilden. Wir definieren deshalb in **ZF**:

Definition 13.2 Definiere die Klasse OD der **ordinalzahldefinierbaren Mengen** als

$$\Big\{x \;\Big|\; \exists\theta \in \mathrm{On}\, \exists\chi \in \mathrm{Fml}_2(\dot{\in})\, \exists\alpha < \theta\, (x \in V_\theta \wedge \forall y \in V_\theta\, (y = x \leftrightarrow (V_\theta, \in) \models \chi[y, \alpha]))\Big\}.$$

Diese Definition entspricht dem intuitiven Begriff der Ordinalzahldefinierbarkeit:

Satz 13.3 *(a) Sei $i \mapsto \varphi_i$ eine definierbare Bijektion zwischen ω und* $\mathrm{Fml}_2(\dot{\in})$. *Sei*

$$\varphi(v_0, \theta, i, \alpha) :\equiv (v_0 \in V_\theta \wedge \forall v_1 \in V_\theta\, (v_1 = v_0 \leftrightarrow (V_\theta, \in) \models \varphi_i[v_1, \alpha])).$$

Sei $x \in$ OD. Dann existieren $\theta \in$ On und $i < \omega$ sowie $\alpha < \theta$ mit

$$\forall v_0\, (v_0 = x \longleftrightarrow \varphi(v_0, \theta, i, \alpha)).$$

Wir sagen in diesem Fall: (θ, i, α) **definiert** *x.*

(b) Sei x definierbar aus $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in$ On mit $\in$-Formel $\varphi(v_0, \ldots, v_n)$. Dann gilt $x \in$ OD.

Beweis. zu (a). Nach Definition von OD existieren $\theta \in$ On, $i < \omega$ und $\alpha < \theta$ mit $\varphi(x, \theta, i, \alpha)$. Dann gilt insbesondere $x \in V_\theta$ und, indem man $v_1 :\equiv x$ setzt,

(1) $\quad (V_\theta, \in) \models \varphi_i[x, \alpha]$.

Ist dann v_0 beliebig mit $\varphi(v_0, \theta, i, \alpha)$, so folgt, indem man $v_1 :\equiv x$ setzt:

$$x = v_0 \longleftrightarrow (V_\theta, \in) \models \varphi[x, \alpha].$$

Da nach (1) die rechte Seite dieser Äquivalenz gilt, folgt $v_0 = x$. Damit ist (a) bewiesen.

zu (b). Wir konstruieren zunächst eine $\in$-Formel χ, die x aus einem Parameter definiert und betrachten dann $\ulcorner\chi\urcorner$.

Auf $^{<\omega}\mathrm{On} :\equiv \{s \mid \exists n < \omega\; s\colon n \to \mathrm{On}\}$ definiere eine Wohlordnung $\prec$ durch

$$s_0 \prec s_1 :\equiv (s_0 \subseteq s_1 \wedge s_0 \neq s_1) \vee (\mathrm{dom}(s_0) = \mathrm{dom}(s_1) \wedge \exists i < \mathrm{dom}(s_0)\, (s_0 \restriction i = s_1 \restriction i \wedge s_0(i) < s_1(i))).$$

Sei h der Mostowski-Isomorphismus von $\prec$; dann ist $h[^{<\omega}\mathrm{On}] = \mathrm{On}$. Sei

$$\chi(v_0, \alpha) :\equiv \exists v_1, \ldots, v_n (v_1 = h(\alpha)(0) \wedge \ldots \wedge v_n = h(\alpha)(n-1) \wedge \varphi(v_0, \ldots, v_n)).$$

Sei $\alpha \in$ On mit $h(\alpha) = (\alpha_{i+1} | i < n)$. Dann wird x aus α mit $\in$-Formel χ definiert. Wähle nach dem Lévyschen Reflexionssatz 12.7 ein $\theta \in$ On, so daß $x \in V_\theta$ sowie $\alpha \in V_\theta$ gilt und $\forall y\, (y = x \longleftrightarrow \chi(v_0, v_{n+1}))$ V_θ-absolut ist. Da $\forall y (y = x \longleftrightarrow \chi(v_0, \alpha))$ gilt, folgt dann

$$\forall y \in V_\theta\, (y = x \longleftrightarrow \chi^{V_\theta}(x, \alpha)).$$

Dies ist nach 11.2 gleichwertig mit

$$\forall y \in V_\theta\, (y = x \longleftrightarrow (V_\theta, \in) \models \ulcorner\chi\urcorner[x, \alpha]).$$

Also gilt $x \in$ OD.

QED

Die Klasse OD ist abgeschlossen gegen Definierbarkeit aus Parametern aus OD:

Satz 13.4 *Wird die Menge x aus $x_1, \dots, x_n \in \mathrm{OD}$ mit $\in$-Formel $\varphi(v_0, \dots, v_n)$ definiert, so ist $x \in \mathrm{OD}$.*

Beweis. Die Formel $\varphi_i(v_i, \vec{\alpha})$ definiere x_i aus $\vec{\alpha} \in \mathrm{On}$, d.h., es gilt $(\varphi_i(v_i, \vec{\alpha}) \leftrightarrow v_i = x_i)$. Dann definiert

$$\exists v_1, \dots, v_n \, (\varphi_1(v_1, \vec{\alpha}) \, \wedge \, \dots \, \wedge \, \varphi_n(v_n, \vec{\alpha}) \, \wedge \, \varphi(v_0, \dots, v_n))$$

die Menge x aus $\vec{\alpha}$. QED

Wir gehen nun über von OD zur Klasse aller derjenigen Mengen, die *erblich* ordinalzahldefinierbar sind, d.h., Mengen, die nicht nur selbst in OD liegen, sondern deren sämtliche Elemente und deren Elemente und deren Elemente ... ebenfalls ordinalzahldefinierbar sind.

Definition 13.5 Die Klasse HOD $:\equiv \{x \mid \mathrm{TC}(\{x\}) \subseteq \mathrm{OD}\}$ heißt Klasse der **erblich ordinalzahldefinierbaren Mengen** (**hereditarily ordinal-definable sets**).

Bemerkung 13.6 Wegen $x \in \mathrm{TC}(\{x\})$ gilt $\mathrm{HOD} \subseteq \mathrm{OD}$.

Satz 13.7 *Die Klasse* HOD *ist ein inneres Modell von* **ZF**.

Beweis. Nach 12.6 ist zu zeigen, daß HOD transitiv, fast-universell und Aussonderungs-abgeschlossen ist.

zur Transitivität. Sei $x \in y \in \mathrm{HOD}$. Dann ist $y \in \mathrm{TC}(\{y\})$, also $y \subseteq \mathrm{TC}(\{y\})$ wegen der Transitivität von $\mathrm{TC}(y)$. Aus $x \in y$ folgt dann $\{x\} \subseteq \mathrm{TC}(\{y\})$, also $\mathrm{TC}(\{x\}) \subseteq \mathrm{TC}(\{y\})$. Da $\mathrm{TC}(\{y\}) \subseteq \mathrm{OD}$ wegen $y \in \mathrm{HOD}$ gilt, folgt $\mathrm{TC}(\{x\}) \subseteq \mathrm{OD}$, also $x \in \mathrm{HOD}$. Dies war zu zeigen.

zur Fast-Universalität. Da wegen $V = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$ zu jedem $x \subseteq \mathrm{HOD}$ ein $\alpha \in \mathrm{On}$ existiert mit $x \subseteq V_\alpha \cap \mathrm{HOD}$, genügt es zu zeigen, daß $V_\alpha \cap \mathrm{HOD} \in \mathrm{HOD}$, also $\mathrm{TC}(\{V_\alpha \cap \mathrm{HOD}\}) \subseteq \mathrm{OD}$ für alle $\alpha \in \mathrm{On}$ gilt. Da

$$\mathrm{TC}(\{V_\alpha \cap \mathrm{HOD}\}) = \underbrace{(V_\alpha \cap \mathrm{HOD})}_{\subseteq \mathrm{HOD} \subseteq \mathrm{OD}} \cup \{V_\alpha \cap \mathrm{HOD}\}$$

ist, genügt es zu zeigen, daß $V_\alpha \cap \mathrm{HOD} \in \mathrm{OD}$ gilt. Hierzu bemerken wir, daß diese Menge aus α mit der $\in$-Formel

$$\varphi(v_0, v_1) \, :\equiv \, \forall u (u \in v_0 \leftrightarrow (u \in V_{v_1} \, \wedge \, \mathrm{TC}(\{u\}) \subseteq \mathrm{OD}))$$

definiert wird. Hieraus ergibt sich die Behauptung.

zur Aussonderungs-Abgeschlossenheit. Sei $\varphi(u, v_1, \dots, v_n)$ eine $\in$-Formel. Seien $x, x_1, \dots, x_n \in \mathrm{HOD}$. Dann wird $z :\equiv \{u \in x \mid \varphi^{\mathrm{HOD}}(u, x_1, \dots, x_n)\}$ definiert aus $x, x_1, \dots, x_n$ mit $\in$-Formel

$$\chi(v_0, v, v_1, \dots, v_n) \, :\equiv \, \forall u \, (u \in v_0 \leftrightarrow (u \in v \, \wedge \, \varphi^{\mathrm{HOD}}(u, v_1, \dots, v_n)).$$

Da OD nach 13.4 gegen Definierbarkeit aus Parametern aus OD abgeschlossen ist, folgt $z \in \mathrm{OD}$. Da nach Voraussetzung $x \in \mathrm{HOD}$, also $\mathrm{TC}(\{x\}) \subseteq \mathrm{OD}$ gilt, ergibt sich

$$\mathrm{TC}(\{z\}) = \{z\} \cup \mathrm{TC}(z) \subseteq \{z\} \cup \mathrm{TC}(x) \subseteq \{z\} \cup \mathrm{TC}(\{x\}) \subseteq \mathrm{OD}\,.$$

Also ist $z \in \mathrm{HOD}$ und HOD Aussonderungs-abgeschlossen.

QED

Abschließend zeigen wir, daß in HOD das Auswahlaxiom gilt.

Satz 13.8 *Es gilt* $(\mathbf{AC})^{\mathrm{HOD}}$.

Beweis. Wir definieren zunächst eine Wohlordnung auf OD. Hierzu setzen wir

$$T \;:\equiv\; \{(\theta, i, \alpha) \,|\, \theta \in \mathrm{On} \wedge i < \omega \,\wedge \alpha < \theta\}.$$

Wir definieren auf T eine starke Wohlordnung durch die lexikographische Ordnung:

$$(\theta, i, \alpha) <_T (\theta', i', \alpha') \;:\equiv\; \theta < \theta' \,\vee\, (\theta = \theta' \,\wedge\, i < i') \,\vee\, (\theta = \theta' \,\wedge\, i = i' \,\wedge\, \alpha < \alpha').$$

Für $x, x' \in \mathrm{OD}$ setzen wir

$$x <_{\mathrm{OD}} x' \;:\equiv\; \exists t \in T\ (t \text{ definiert } x \,\wedge\, \forall t' \in T\ (t' \text{ definiert } x' \rightarrow t <_T t')).$$

Man sieht leicht, daß $<_{\mathrm{OD}}$ eine starke Wohlordnung auf OD definiert. Ist nun $a \in \mathrm{HOD}$ eine Menge nicht-leerer, paarweise disjunkter Mengen, so setze

$$b \;:\equiv\; \{y \mid \exists x \in a\ (y \text{ ist } <_{\mathrm{OD}} \text{-minimales Element von } x)\}.$$

Die Menge b wählt also das Minimum eines jeden Elementes von a aus. Um $(\mathbf{AC})^{\mathrm{HOD}}$ zu beweisen, ist nach 11.4 $b \in \mathrm{HOD}$, also $\mathrm{TC}(\{b\}) \subseteq \mathrm{OD}$ zu zeigen. Da sich b aus $a \in \mathrm{OD}$ definieren läßt, ist $b \in \mathrm{OD}$ nach 13.4. Wegen $\mathrm{TC}(b) \subseteq \mathrm{TC}(\bigcup a) \subseteq \mathrm{TC}(\{\bigcup a\})$ folgt $\mathrm{TC}(b) \subseteq \mathrm{OD}$, denn aus $a \in \mathrm{HOD}$ sowie $(\bigcup\text{-}\mathbf{Ax})^{\mathrm{HOD}}$ ergibt sich $\bigcup a \in \mathrm{HOD}$, also $\mathrm{TC}(\{\bigcup a\}) \subseteq \mathrm{OD}$. Insgesamt folgt $\mathrm{TC}(\{b\}) = \{b\} \cup \mathrm{TC}(b) \subseteq \mathrm{OD}$. Dies war zu zeigen. Also gilt $(\mathbf{AC})^{\mathrm{HOD}}$ und der Satz ist bewiesen. QED

Mit Hilfe der Methode der inneren Modelle (siehe 12.3) ist damit gezeigt:

Satz 13.9 (Gödel) *Das System* **ZFC** *ist relativ konsistent zum System* **ZF**.

Bemerkung 13.10 Gödel zeigte dieses Resultat zunächst mit dem inneren Modell der *konstruktiblen Mengen* und später mit dem Modell HOD.

14 Die relative Konsistenz von ¬AC, erster Versuch

Um zu zeigen, dass sich Nullstellen von Polynomen allgemein nicht durch Radikale darstellen lassen, definiert man in der Galoistheorie Unterkörper von gegebenen Körpern durch Symmetrieeigenschaften. Iterierte Radikale erfüllen die Symmetrieeigenschaften und sind in dem symmetrischen Unterkörper enthalten, währenddessen sich ein Polynom über dem Grundkörper angeben lässt, dessen Nullstellen die Symmetrieeigenschaften nicht erfüllen. Hier soll in vager Analogie ein Modell der Mengenlehre konstruiert werden, in dem gewisse Mengen keine Auswahlfunktion besitzen. In dem „symmetrischen Untermodell“ eines Modells der Mengenlehre existieren die in den Zermelo-Fraenkelschen Axiomen geforderten Mengen, aber wir können eine symmetrische Menge angeben, deren Auswahlfunktionen nicht symmetrisch sind und daher nicht im Untermodell liegen. Daraus folgt die Unbeweisbarkeit des Auswahlaxioms aus den übrigen Axiomen. Allerdings wird das symmetrische Modell nicht das gewöhnliche System **ZF**, sondern eine Variante $\mathbf{ZF}_A$ erfüllen.
Wir beginnen eine umfangreiche Konstruktion. Sei $\eta \in \mathrm{On}$ und $A \subseteq V_{\eta+1} \setminus V_\eta$, $L \in (V_{\eta+1} \setminus V_\eta) \setminus A$. Dabei werden die Elemente von A ein Modell W der Mengenlehre generieren, in dem die Generatoren „Atome“ sind, d.h. Objekte ohne Elemente. Als „leere Menge“ des Modells W dient L. Das Modell wird durch eine kumulative Hierarchie ähnlich der von Neumannschen aufgebaut:

$$\begin{aligned} W_0 &= A \cup \{L\}; \\ W_{\alpha+1} &= \mathcal{P}(W_\alpha) \setminus \{\emptyset\}; \\ W_\lambda &= \bigcup_{\alpha<\lambda} W_\alpha, \text{ für Limes } \lambda; \\ W &= \bigcup_{\alpha<\mathrm{On}} W_\alpha. \end{aligned}$$

Die Klasse W erfüllt eine Variante der Zermelo-Fraenkelschen Axiome, in der Element-lose „Atome“ vorkommen können. Statt des Modells W wollen wir das Submodell $H\mathcal{S} \subseteq W$ der „erblich symmetrischen“ Mengen für die Überlegungen zum Auswahlaxiom benutzen. Hierzu betrachten wir Permutationen von A und dadurch induzierte Permutationen von W.

(1) Für $x \in W \setminus W_0$ ist $x \notin V_{\eta+1}$.
Beweis. Angenommen, x ist $\in$-minimales Gegenbeispiel. Dann ist $x \in W \setminus W_0$, $x \in V_{\eta+1}$, $x \subseteq V_\eta$. Wähle $\beta \in \mathrm{On}$ minimal, so dass $x \in W_{\beta+1}$. $x \subseteq W_\beta$, $x \neq \emptyset$.
Fall 1: $\beta = 0$. Dann ist $x \subseteq A \cup \{L\}$ und es gibt $z \in A \cup \{L\}$ mit $z \in x \subseteq V_\eta$, im Widerspruch zur Wahl von A, L.
Fall 2: $\beta > 0$: Dann wähle $y \in x$, $y \in W_\beta \setminus W_0$. $y \in x \subseteq W_\eta \subseteq W_{\eta+1}$ im Widerspruch zur $\in$-Minimalität von x. qed(1)

Sei $G = G_A = \{\pi | \pi : A \leftrightarrow A\}$ die symmetrische Gruppe auf A. Betrachte eine Permutation $\pi \in G$. Definiere rekursiv $\tilde{\pi} : W \to W$, $\tilde{\pi} \restriction A = \pi$, $\tilde{\pi}(L) = L$, $\tilde{\pi}(x) = \{\tilde{\pi}(y) | y \in x\}$ für $x \in W \setminus W_0$.

(2) $\forall\alpha\ x \in W_\alpha \to \tilde{\pi}(x) \in W_\alpha$.
Beweis. Für $\alpha = 0$ ist die Behauptung klar. Nun sei $\alpha = \beta + 1$ und die Behauptung gelte für β. Dann ist $x \in \mathcal{P}(W_\beta) \setminus \{\emptyset\}$. $\tilde{\pi}(x) = \{\tilde{\pi}(y)|y \in x\} \subseteq W_\beta$, $\tilde{\pi}(x) \neq \emptyset$. qed(2)

(3) Für $\sigma = \mathrm{id} \restriction A$ ist $\tilde{\sigma} = \mathrm{id} \restriction W$.
Beweis. Wir zeigen durch $\in$-Induktion: $\tilde{\sigma} \restriction W_0 = \mathrm{id} \restriction W_0$, und für $x \in W \setminus W_0$ ist $\tilde{\sigma}(x) = \{\tilde{\sigma}(y)|y \in x\} = \{y|y \in x\} = x$. qed(3)

(4) Die Operation $\pi \mapsto \tilde{\pi}$ ist ein Komposition-Homomorphismus: $\widetilde{\pi \circ \sigma} = \tilde{\pi} \circ \tilde{\sigma}$.
Beweis. Wir zeigen durch $\in$-Induktion über W, dass $\widetilde{\pi \circ \sigma}(x) = \tilde{\pi} \circ \tilde{\sigma}(x)$. Das ist klar für $x \in W_0$. Für $x \in W \setminus W_0$, so dass die Behauptung für $\in$-kleinere Mengen gilt, ist: $\widetilde{\pi \circ \sigma}(x) = \{\widetilde{\pi \circ \sigma}(y)|y \in x\} = \{\tilde{\pi} \circ \tilde{\sigma}(y)|y \in x\} = \{\tilde{\pi}(\tilde{\sigma}(y))|y \in x\} = \tilde{\pi}(\{\tilde{\sigma}(y)|y \in x\}) = \tilde{\pi}(\tilde{\sigma}(x))$. qed(4)

(5) Jedes $\tilde{\pi} : W \leftrightarrow W$ ist ein Automorphismus $\tilde{\pi} : (W, \in, A) \leftrightarrow (W, \in, A)$.
Beweis. Sei $\pi \in G$. Dann ist $\tilde{\pi} \circ \widetilde{\pi^{-1}} = \widetilde{\mathrm{id} \restriction A} = \mathrm{id} \restriction W$, daher ist $\tilde{\pi}$ surjektiv. Weiter ist $\widetilde{\pi^{-1}} \circ \tilde{\pi} = \widetilde{\mathrm{id} \restriction A} = \mathrm{id} \restriction W$, daher ist $\tilde{\pi}$ injektiv.
Seien $x, y \in W$. Dann ist $x \in y \ \leftrightarrow\ x \in \{z|z \in y\} \ \leftrightarrow\ \tilde{\pi}(x) \in \{\tilde{\pi}(z)|z \in y\} \ \leftrightarrow\ \tilde{\pi}(x) \in \tilde{\pi}(y)$. qed(5)

(6) Für jedes $x \in W$ ist $G_x = \{\pi \in G|\tilde{\pi}(x) = x\}$ eine Untergruppe von G, die *Standgruppe* von x.
Beweis. $\mathrm{id} \restriction A \in G_x$ nach (3). Wenn $\sigma, \pi \in G_x$, dann $\widetilde{\sigma \circ \pi}(x) = \tilde{\sigma}(\tilde{\pi}(x)) = x$, und daher $\sigma \circ \pi \in G_x$. Wenn $\pi \in G_x$, dann $\widetilde{\pi^{-1}}(x) = \widetilde{\pi^{-1}}(\tilde{\pi}(x)) = \widetilde{\pi^{-1} \circ \pi}(x) = \widetilde{\mathrm{id} \restriction A}(x) = x$, und daher $\pi^{-1} \in G_x$. qed(6)

Man kann nun sagen, dass ein $x \in W$ „symmetrisch" ist, falls die Standgruppe G_x „groß" ist:

Definition 14.1 Sei $x \in W$.

(a) Eine Menge $A_0 \subseteq A$ ist ein *Träger* von x, falls $\{\pi \in G|\pi \restriction A_0 = \mathrm{id} \restriction A_0\} \subseteq G_x$.

(b) Die Menge x ist *symmetrisch*, falls es eine endliche Menge $A_0 \subseteq A$ gibt, die Träger von x ist. $\mathcal{S} = \{x \in W|x \text{ ist symmetrisch}\}$ ist die Klasse der symmetrischen Mengen.

(c) Die Menge x ist *erblich symmetrisch*, falls $\mathrm{TC}(\{x\}) \cap W \subseteq \mathcal{S}$.

(d) $\mathrm{H}\mathcal{S} = \{x|x \text{ ist erblich symmetrisch}\}$ ist die Klasse der erblich symmetrischen Mengen. Das (Fraenkelsche) *Permutationsmodell* ist die erweiterte $\in$-Struktur $(\mathrm{H}\mathcal{S}, \in, A)$.

Wir werden später zeigen, dass das Permutationsmodell eine Variante von **ZF** erfüllt, sowie dass es unter geeigneten Voraussetzungen ein Modell von ¬(**AC**) ist.

(7) $A \cup \{L\} \subseteq \mathrm{H}\mathcal{S}$.
Beweis. Sei $x \in A \cup \{L\}$. Nach (1) ist $\mathrm{TC}(\{x\}) \cap W = \{x\}$. Es genügt also zu zeigen,

dass $x \in \mathcal{S}$. $G_L = G$, also ist $L \in \mathcal{S}$. Für $x \in A$ wähle $A_0 = \{x\}$. Dann ist A_0 ein endlicher Träger von x. qed(7)

Wir fassen $\mathrm{H}\mathcal{S}$ als Modell mit Mengen und *Atomen* auf. Wir formulieren und beweisen dafür adäquate Axiome.

(Atom) $\mathrm{H}\mathcal{S} \models \forall x \in A \forall y\; y \notin x$.
Dieses Axiom besagt, dass die Atome Punkte des Universums sind, die mengentheoretisch „leer" sind.

(Ex) $\mathrm{H}\mathcal{S} \models \exists x \notin A \forall y\; y \notin x$.
Dieses Axiom fordert die Existenz eine leeren *Menge*.

(Ext$_A$) $\mathrm{H}\mathcal{S} \models \forall x, y \notin A(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$.
Diese Version des Extensionalitätsaxioms bezieht sich auf die *Mengen* des Modells.
Beweis. Seien $x, y \in \mathrm{H}\mathcal{S} \setminus A$ und $\forall z \in \mathrm{H}\mathcal{S}(z \in x \leftrightarrow z \in y)$. Sei ohne Einschränkung $x \neq L$. Wähle α, so dass $x \subseteq W_\alpha$, $x \neq \emptyset$. Da $x \in \mathrm{H}\mathcal{S}$, ist $x \subseteq \mathrm{H}\mathcal{S}$. Dann ist auch $y \neq L$ und wir können wie bei x eine Ordinalzahl β wählen mit $y \subseteq W_\beta$, $y \neq \emptyset$, $y \subseteq \mathrm{H}\mathcal{S}$. Damit ist

$$\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y).$$

Nach dem Extensionalitätsaxiom in V ist dann $x = y$. qed(Ext$_A$)

Zum Nachweis der Mengenexistenzaxiome beweisen wir ein Kriterium für die Mitgliedschaft in $\mathrm{H}\mathcal{S}$.

Lemma 14.2 *Wenn $x \subseteq \mathrm{H}\mathcal{S}$ und $x \in \mathcal{S}$, so ist $x \in \mathrm{H}\mathcal{S}$.*

Beweis. Es gilt allgemein

$$\mathrm{TC}(z) = z \cup \bigcup_{u \in z} \mathrm{TC}(u).$$

Also ist

$$\begin{aligned} \mathrm{TC}(\{x\}) \cap W &= \{x\} \cup (\mathrm{TC}(x) \cap W) \\ &= \{x\} \cup (x \cup \bigcup_{u \in x} \mathrm{TC}(u) \cap W) \\ &\subseteq \{x\} \cup (x \cup \bigcup_{u \in x} (\mathrm{TC}(\{u\}) \cap W)) \\ &\subseteq \mathcal{S}. \end{aligned}$$

QED

(Paar) $\mathrm{H}\mathcal{S} \models \forall x, y \exists z \forall u\; (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$.
Beweis. Seien $x, y \in \mathrm{H}\mathcal{S}$. Setze $z = \{x, y\} \subseteq \mathrm{H}\mathcal{S}$. Nach dem gerade bewiesenen Kriterium 14.2 genügt es zu zeigen, dass $z \in \mathcal{S}$. Wähle endliche Träger $A_0, A_1 \subseteq A$ für x bzw. y. Setze

$A_2 = A_0 \cup A_1$. Für $\pi \in G$ mit $\pi \restriction A_2 = \mathrm{id} \restriction A_2$ ist dann $\tilde{\pi}(\{x, y\}) = \{\tilde{\pi}(x), \tilde{\pi}(y)\} = \{x, y\}$. Damit ist A_2 ein endlicher Träger für z. qed(Paar)

Zum Nachweis der weiteren Axiome beweisen wir einige Tatsachen über Standgruppen.

Lemma 14.3 *Seien $x \in \mathcal{S}$ und $\pi \in G$. Dann ist $G_{\tilde{\pi}(x)} = \pi G_x \pi^{-1}$.*

Beweis.

$$\begin{aligned} G_{\tilde{\pi}(x)} &= \{\sigma \in G | \tilde{\sigma}(\tilde{\pi}(x)) = \tilde{\pi}(x)\} \\ &= \{\sigma \in G | \tilde{\pi}^{-1} \circ \tilde{\sigma} \circ \tilde{\pi}(x) = x\} \\ &= \{\pi \circ (\pi^{-1} \circ \sigma \circ \pi) \circ \pi^{-1} | (\pi^{-1} \circ \sigma \circ \pi)^{\sim}(x) = x\} \\ &= \{\pi \circ \tau \circ \pi^{-1} | \tilde{\tau}(x) = x\} \\ &\quad \text{da die Konjugation } \sigma \mapsto \pi^{-1} \circ \sigma \circ \pi \text{ eine Bijektion } G \leftrightarrow G \text{ ist;} \\ &= \pi \circ \{\tau | \tilde{\tau}(x) = x\} \circ \pi^{-1} \\ &= \pi G_x \pi^{-1}. \end{aligned}$$

QED

Lemma 14.4 *Für $\pi \in G$ ist $\tilde{\pi} \restriction \mathrm{H}\mathcal{S} : \mathrm{H}\mathcal{S} \to \mathrm{H}\mathcal{S}$.*

Beweis. Angenommen nicht. Wähle $x \in \mathrm{H}\mathcal{S}$ $\in$-minimal mit $\tilde{\pi}(x) \notin \mathrm{H}\mathcal{S}$. Da $\tilde{\pi}[W_0] = W_0 \subseteq \mathrm{H}\mathcal{S}$, ist $x \in W \setminus W_0$. Daher ist x eine nicht-leere Teilmenge von W und $\tilde{\pi}(x) = \{\tilde{\pi}(y) | y \in x\}$. Wegen der $\in$-Minimalität von x ist $\tilde{\pi}(x) \subseteq \mathrm{H}\mathcal{S}$. Wähle nun einen endlichen Träger $A_0 \subseteq A$ von x. Dann ist

$$\begin{aligned} G_{\tilde{\pi}(x)} &= \pi G_x \pi^{-1} \\ &\supseteq \pi \circ \{\sigma | \sigma \restriction A_0 = \mathrm{id} \restriction A_0\} \circ \pi^{-1} \\ &= \{\pi \circ \sigma \circ \pi^{-1} | \sigma \restriction A_0 = \mathrm{id} \restriction A_0\} \\ &= \{\pi \circ \sigma \circ \pi^{-1} | \forall a \in A_0 \; \pi \circ \sigma(a) = \pi(a)\} \\ &= \{\pi \circ \sigma \circ \pi^{-1} | \forall b \in \pi[A_0] \; \pi \circ \sigma \circ \pi^{-1}(b) = \pi \circ \pi^{-1}(b) = b\} \\ &= \{\mu | \mu \restriction \pi[A_0] = \mathrm{id} \restriction \pi[A_0]\}. \end{aligned}$$

Damit ist $\tilde{\pi}(x)$ symmetrisch mit endlichem Träger $\pi[A_0] \subseteq A$. Nach 14.2 ist dann $x \in \mathrm{H}\mathcal{S}$. Dies widerspricht der Beweisannahme. QED

Lemma 14.5 $\tilde{\pi} \restriction \mathrm{H}\mathcal{S} : (\mathrm{H}\mathcal{S}, \in, A) \tilde{\leftrightarrow} (\mathrm{H}\mathcal{S}, \in, A)$.

Beweis. Um die Surjektivität zu zeigen, betrachte $z \in \mathrm{H}\mathcal{S}$. Dann ist $\widetilde{\pi^{-1}}(z) \in \mathrm{H}\mathcal{S}$ und $\tilde{\pi}(\widetilde{\pi^{-1}}(z)) = \widetilde{\mathrm{id}}(z) = z$. Somit ist $\tilde{\pi} \restriction \mathrm{H}\mathcal{S} : \mathrm{H}\mathcal{S} \leftrightarrow \mathrm{H}\mathcal{S}$, und da $\tilde{\pi} : W \to W$ $\in$- und A-treu ist, ist $\tilde{\pi} \restriction \mathrm{H}\mathcal{S}$ ein Automorphismus von $(\mathrm{H}\mathcal{S}, \in, A)$. QED

Da die Zermelo-Fraenkelschen Axiomen die Existenz von Abstraktionstermen als Mengen fordern, ist das folgende Lemma nützlich.

Lemma 14.6 *Sei φ eine $\in -A$-Formel und $\pi \in G$. Sei*

$$t = \{x \in \mathrm{H}\mathcal{S} | (\mathrm{H}\mathcal{S}, \in, A) \models \varphi(x, y_0, \ldots, y_{n-1})\}$$

mit $y_0, \ldots, y_{n-1} \in \mathrm{H}\mathcal{S}$. Weiter sei $t \in V$ und $t \neq \emptyset$. Dann ist $t \in W \setminus W_0$ und

$$\tilde{\pi}(t) = \{x \in \mathrm{H}\mathcal{S} | (\mathrm{H}\mathcal{S}, \in, A) \models \varphi(x, \tilde{\pi}(y_0), \ldots, \tilde{\pi}(y_{n-1}))\}.$$

Weiter ist $t \in \mathcal{S}$ und $t \in \mathrm{H}\mathcal{S}$.

Beweis. Nach Definition von W ist jede nicht-leere Teilmenge von W ein Element von W. Wir berechnen $\tilde{\pi}(t)$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}(t) &= \{\tilde{\pi}(x) | x \in \mathrm{H}\mathcal{S} \wedge (\mathrm{H}\mathcal{S}, \in, A) \models \varphi(x, y_0, \ldots, y_{n-1})\} \\
&= \{\tilde{\pi}(x) | \tilde{\pi}(x) \in \mathrm{H}\mathcal{S} \wedge (\mathrm{H}\mathcal{S}, \in, A) \models \varphi(\tilde{\pi}(x), \tilde{\pi}(y_0), \ldots, \tilde{\pi}(y_{n-1}))\} \\
&= \{x | x \in \mathrm{H}\mathcal{S} \wedge (\mathrm{H}\mathcal{S}, \in, A) \models \varphi(x, y_0, \ldots, y_{n-1})\}.
\end{aligned}$$

Da $y_0, \ldots, y_{n-1}$ erblich symmetrisch sind, können wir endliche Träger $A_0, \ldots, A_{n-1} \subseteq A$ für jeweils $y_0, \ldots, y_{n-1}$ wählen. Setze $B = \bigcup_{i<n} A_i \subseteq A$. Dann ist für alle $\sigma \in G$ mit $\sigma \upharpoonright B = \mathrm{id} \upharpoonright B$:

$$\tilde{\sigma}(t) = \{x \in \mathrm{H}\mathcal{S} | (\mathrm{H}\mathcal{S}, \in, A) \models \varphi(x, y_0, \ldots, y_{n-1})\} = t.$$

Also ist t symmetrisch. Nach dem Kriterium 14.2 ist $t \in \mathrm{H}\mathcal{S}$. QED

Wir zeigen nun Versionen der restlichen Axiome von **ZF**, indem wir geeignete Klassenterme $t \in \mathrm{H}\mathcal{S}$ angeben. Man beachte, dass das gerade bewiesene Lemma nicht-leere Terme benötigt.

($\bigcup$-Ax) Sei $x \in \mathrm{H}\mathcal{S}$. Sei

$$y_0 = \{z \in \mathrm{H}\mathcal{S} | (\mathrm{H}\mathcal{S}, \in, A) \models \exists u \in x \; z \in u\}.$$

Fall 1: $y_0 = \emptyset$. Dann setze $y = L \in \mathrm{H}\mathcal{S}$. Für alle $z \in \mathrm{H}\mathcal{S}$ ist dann

$$z \in y \leftrightarrow (\mathrm{H}\mathcal{S}, \in, A) \models \exists u \in x \; z \in u\},$$

d.h. y erfüllt das $\bigcup$-Axiom in diesem Fall.
Fall 2: $y_0 \neq \emptyset$. Dann setze $y = y_0 \in \mathrm{H}\mathcal{S}$ nach dem obigen Lemma. Für alle $z \in \mathrm{H}\mathcal{S}$ ist dann

$$z \in y \leftrightarrow (\mathrm{H}\mathcal{S}, \in, A) \models \exists u \in x \; z \in u\},$$

und das $\bigcup$-Axiom gilt in $\mathrm{H}\mathcal{S}$ wie oben. qed($\bigcup$-Ax)

(Aus_A) Sei φ eine $\in -A$-Formel. Seien $x, y_1, \dots, y_n \in \mathrm{H}\mathcal{S}$. Sei

$$y = \{y_0 \in \mathrm{H}\mathcal{S} | (\mathrm{H}\mathcal{S}, \in, A) \models (y_0 \in x \wedge \varphi(y_0, y_1, \dots, y_n))\}.$$

Fall 1: $y = \emptyset$. Mit $z = L \in \mathrm{H}\mathcal{S}$ ist dann diese Instanz des Aussonderungsschemas erfüllt.
Fall 2: $y \neq \emptyset$. Nach Lemma 14.6 ist dann $y \in \mathrm{H}\mathcal{S}$ und y erfüllt die betrachtete Instanz des Aussonderungsschemas. qed(Aus_A)

(Pot) Sei $x \in \mathrm{H}\mathcal{S}$. Sei

$$y = \{z \in \mathrm{H}\mathcal{S} | (\mathrm{H}\mathcal{S}, \in, A) \models z \subseteq x\}.$$

$x \in y$, $y \neq \emptyset$, und $y \in \mathrm{H}\mathcal{S}$ nach 14.6. Offensichtlich erfüllt y das Potenzmengenaxiom für x in $\mathrm{H}\mathcal{S}$. qed(Pot)

(Inf) Wir können das Mengenuniversum V auf natürliche Art nach $\mathrm{H}\mathcal{S}$ einbetten. Definiere $e : V \to \mathrm{H}\mathcal{S}$ rekursiv durch:

$$\begin{aligned} e(\emptyset) &= L; \\ e(x) &= \{e(y) | y \in x\} \text{ für } x \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Behauptung: $\forall x \; (G_{e(x)} = G \wedge e(x) \in \mathrm{H}\mathcal{S})$.
Beweis. Angenommen nicht. Sei x ein $\in$-minimales Gegenbeispiel. Dann ist $x \neq \emptyset$, $e(x) \neq \emptyset$ und $e(x) \subseteq W$. Sei $\pi \in G$. Dann ist $\tilde{\pi}(e(x)) = \{\tilde{\pi}(e(y)) | y \in x\} = \{e(y) | y \in x\} = e(x)$. Also ist $e(x) \in \mathcal{S}$. Wegen der $\in$-Minimalität von x ist $e(x) \subseteq \mathrm{H}\mathcal{S}$. Nach 14.2 ist dann $e(x) \in \mathrm{H}\mathcal{S}$, im Widerspruch zur Wahl von x. qed(Behauptung)

Nun gilt $e(0) = L$ und $e(n+1) = \{e(x) | x \in n+1\} = \{e(x) | x \in n\} \cup \{e(n)\} = e(n) \cup \{e(n)\}$. Damit enthält $e(\omega)$ aus der Sicht von $\mathrm{H}\mathcal{S}$ die leere Menge L als Element und ist bezüglich der Operation $x \mapsto x + 1$ abgeschlossen. qed(Inf)

(Ers_A) Sei $\varphi(u, v, \vec{w})$ eine $\in_A$-Formel; sei $\vec{z} \in \mathrm{H}\mathcal{S}$, so dass die folgende Funktionalität erfüllt ist:

$$\mathrm{H}\mathcal{S} \models \forall u, v, v' \, (\varphi(u, v, \vec{z}) \wedge \varphi(u, v', \vec{z}) \to v = v').$$

Sei $x \in \mathrm{H}\mathcal{S}$. Setze dann:

$$y_0 = \{v \in \mathrm{H}\mathcal{S} | (\mathrm{H}\mathcal{S}, \in, A) \models \exists u \in x \; \varphi(u, v, \vec{z})\}.$$

Nach dem Ersetzungsschema in V ist dann $y_0 \in V$. Wenn $y_0 = \emptyset$, so wird die betrachtete Instanz des Ersetzungsschemas mit $y = L$ erfüllt. Wenn $y_0 \neq \emptyset$, so ist nach 14.6 $y = y_0 \in \mathrm{H}\mathcal{S}$, und offensichtlich erfüllt y die betrachtete Instanz des Ersetzungsschemas. qed(Ers_A)

(Fund_A) Sei φ eine $\in_A$-Formel, $\vec{y} \in \mathrm{H}\mathcal{S}$, und

$$(\mathrm{H}\mathcal{S}, \in, A) \models \exists x \; \varphi(x, \vec{y}).$$

Nach Fundierung in V wähle nun ein $x \in \mathrm{H}\mathcal{S}$ $\in$-minimal mit der Eigenschaft

$$(\mathrm{H}\mathcal{S}, \in, A) \models \exists x \; \varphi(x, \vec{y}).$$

Dann gilt
$$(\mathrm{H}\mathcal{S}, \in, A) \models \forall x' \; (x' \in x \to \neg\varphi(x', \vec{y}).$$

qed(Fund$_A$)

Damit ist gezeigt:

Satz 14.7 $(\mathrm{H}\mathcal{S}, \in, A)$ *ist ein Modell des im Laufe der Konstruktion angegebenen Axiomensystems* $\mathbf{ZF}_A$.

Ziel des Kapitels ist ein Modell, in dem das Auswahlaxiom verletzt ist. Hierzu müssen wir eine zusätzliche Annahme über die Menge der Atome machen:
Annahme: A ist unendlich.

Satz 14.8 $(\mathrm{H}\mathcal{S}, \in, A) \models \neg(\mathbf{AC})$.

Beweis. Wir konstruieren in $\mathrm{H}\mathcal{S}$ eine Menge z ohne *Auswahlfunktion.* Die Menge z wird aus den Atomen aufgebaut:

$$z = \{u \subseteq A | u \text{ hat zwei Elemente}\}.$$

(1) $\forall u \in z \; u \in \mathrm{H}\mathcal{S}$.
Beweis. Sei $u \in z$. Da $G_u \supseteq \{\pi | \pi \restriction u = \mathrm{id} \restriction u\}$, ist $u \subseteq A$ ein endlicher Träger von u. Nach 14.2 ist dann $u \subseteq A \subseteq \mathrm{H}\mathcal{S}$ ein Element von $\mathrm{H}\mathcal{S}$. qed(1)

(2) $z \in \mathcal{S}$.
Beweis. Sei $\pi \in G$. Dann ist

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}(z) &= \{\tilde{\pi}(u) | u \text{ hat zwei Elemente}\}\\ &= \{u | u \text{ hat zwei Elemente}\}, \text{ da } \pi : A \leftrightarrow A,\\ &= z.\end{aligned}$$

qed(2)

Nach (1) und (2) gilt dann
(3) $z \in \mathrm{H}\mathcal{S}$.
In $\mathrm{H}\mathcal{S}$ ist z eine Menge von nicht-leeren Mengen. Angenommmen, es gäbe ein $f \in \mathrm{H}\mathcal{S}$, das eine Auswahlfunktion für z ist:

$$f : z \to A, \; \forall u \in z \, f(u) \in u.$$

Wähle einen endlichen Träger $A_0 \subseteq A$ für f. Da A *unendlich* ist, können wir $a, b \in A \setminus A_0$, $a \neq b$ wählen. Dann gilt $f(\{a, b\}) = a$ oder $f(\{a, b\}) = b$. Definiere $\pi : A \leftrightarrow A$, $\pi \restriction A \setminus \{a, b\} = \mathrm{id} \restriction A \setminus \{a, b\}$, $\pi(a) = b$, $\pi(b) = a$. Dann gilt:

$$\tilde{\pi}(\{a, b\}) = \{\pi(a), \pi(b)\} = \{a, b\}$$

und

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{H}\mathcal{S}, \in, A) \models a = f(\{a,b\}) \\
\leftrightarrow\, &(\mathrm{H}\mathcal{S}, \in, A) \models \tilde{\pi}(a) = \tilde{\pi}(f)(\tilde{\pi}(\{a,b\})) \\
\leftrightarrow\, &(\mathrm{H}\mathcal{S}, \in, A) \models b = f(\{a,b\}).
\end{aligned}$$

Also wäre $a = b$, Widerspruch. QED

Damit ist gezeigt:

Satz 14.9 *Wenn das System* **ZF** *widerspruchsfrei ist, so ist das System* $\mathbf{ZF}_A + \neg(\mathbf{AC})$ *widerspruchsfrei.*

In dem vorgestellten Modell ist es also nicht möglich, aus einer Menge von ungeordneten Paaren auszuwählen. Wir werden diese Konstruktion später im Rahmen der Forcing-Methode nachbilden und dort die Unabhängigkeit von **(AC)** vom ursprünglichen System **ZF** zeigen.

15 Erweiterungen von Modellen der Mengenlehre

Die bisher konstruierten und untersuchten Modelle der Mengenlehre waren *innere Modelle*, d.h. Teilmodelle von Ausgangsmodellen. Aus grundsätzlichen Überlegungen, die wir noch nicht ausführen können, ergibt sich, dass sich viele axiomatische Untersuchungen nicht mit inneren Modellen durchführen lassen. Daher wenden wir uns nun *Erweiterungen* von gegebenen Modellen der Mengenlehre zu. Die hier vorgestellte *Erzwingungs*- oder *Forcing*-Methode stammt von Paul Cohen, der mit ihrer Hilfe die Unabhängigkeit der Cantorschen Kontinuumshypothese und des Auswahlaxioms gezeigt hat.
Wir wollen zu einem gegebenen $\in$-Modell M von **ZFC** eine *generische* Menge G *adjungieren*, so dass das entstehende Modell $M[G]$ wiederum ein Modell von **ZFC** ist. Cohen bewies die Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese **CH**, indem er *generische Erweiterungen* $M[G]$ und $M[G']$ konstruierte, sodass

$$M[G] \models \mathbf{ZFC} + \mathbf{CH} \text{ bzw. } M[G'] \models \mathbf{ZFC} + \neg\mathbf{CH}.$$

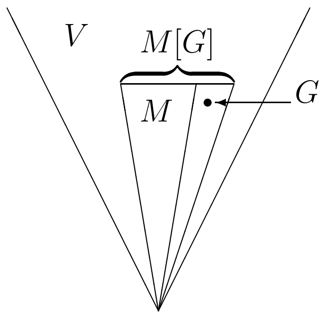
Der Erweiterungsprozess besitzt einige Analogien zu der Erweiterung $k(a)$ eines Körpers k um ein transzendentes Element a. Bei der algebraischen Konstruktion lassen sich die Elemente b der Erweiterung mit Hilfe von Elementen des Grundkörpers beschreiben: b ist eine gebrochen rationale Funktion von a, wobei die Koeffizienten der Funktion aus dem Grundkörper k stammen. Das Element b lässt sich also durch eine endliche Folge dieser Koeffizienten beschreiben. Diese Folge kann als *Name* des Elements b aufgefasst werden. Jedes Element des Grundkörpers besitzt einen trivialen Namen, nämlich die Einerfolge, die aus diesem Element besteht. Dass $k(a)$ ein Körper ist, beruht darauf, dass die Körperaxiome in der Ausgangsstruktur gelten. Die Erweiterung wird von k und a erzeugt:

jeder Zwischenkörper K mit $k \subseteq K \subseteq k(a)$ und $a \in K$ erfüllt $K = k(a)$. Die mengentheoretische Situation ist allerdings wesentlich komplizierter als die algebraische: während es bis auf Isomorphie nur eine einfache transzendente Erweiterung gibt, werden wir bei der Diskussion der Forcing-Methode eine große Fülle wesentlich verschiedener Erweiterungen kennenlernen.

Wir wollen zunächst eine Konstruktion von Erweiterungen $M[G]$ angeben, die im Allgemeinen nicht alle Axiome der Mengenlehre erfüllen. Diese Konstruktion wird später zu der Cohenschen Methode spezialisiert. Wir arbeiten zur Vereinfachung der Darstellung mit $\in$-Modellen der Mengenlehre. Die Frage, wie wir zu geeigneten *Grundmodellen* kommen können, soll erst später diskutiert werden.

Definition 15.1 Eine $\in$-Struktur $M = (M, \in)$ ist ein **Grundmodell**, wenn es ein abzählbares, transitives Modell von **ZFC** ist, d.h. $\mathbf{ZFC}^M$, $\mathrm{card}(M) = \aleph_0$ und M ist transitiv.

Fixiere bis auf Weiteres ein Grundmodell $M = (M, \in)$. Die gesuchte Erweiterung $(M[G], \in)$ wird durch eine (neue) Menge G festgelegt werden. Die Konstruktion von G erfolgt, indem sukzessiv mehr Information über G festgelegt wird. Dieser „Prozess“ wird durch eine Halbordnung von Approximationen an G kontrolliert. Die Approximationen sind bereits in der Lage, Eigenschaften der endgültigen Erweiterung $M[G]$ zu „bedingen“ oder zu „erzwingen“. Daher definieren wir:



Definition 15.2 Ein Dreitupel $(P, \leq, 1_P)$ heißt **Forcing-Halbordnung** oder **Erzwingungsrelation**, falls gilt:

(i) $(P, \leq)$ ist eine schwache partielle Ordnung;

(ii) 1_P ist größtes Element von $(P, \leq)$.

Die Elemente von P werden auch als **Bedingungen** bezeichnet. Falls $p \leq q$ sagen wir, p **verstärkt** q. Sind $q_1, \ldots, q_n \in P$ und ist $p \leq q_i$ für $i < n$, so sagen wir, p ist eine **gemeinsame Verstärkung** von $q_1, \ldots, q_n$. Falls $q_1, \ldots, q_n \in P$ eine gemeinsame Verstärkung in P besitzen, so heißen $q_1, \ldots, q_n$ **kompatibel**.

Beispiel 15.3 Die **Cohen-Halbordnung** ist auf der Menge

$$P = \mathrm{Fn}(\omega, 2, \omega) = \{f \mid f\colon \mathrm{dom}(f) \to b \wedge \overline{\overline{\mathrm{dom}(f)}} < \omega\}$$

aller endlichen *partiellen* Funktionen von ω nach $\{0,1\}$ definiert. Sie wird später zur Approximation einer *totalen* Funktion von ω nach $\{0,1\}$ benutzt, d.h. zur Approximation einer reellen Zahl. Dieses kommt in der Definition der Erzwingungsrelation zum Ausdruck: eine Bedingung ist stärker, wenn sie eine größere partielle Funktion ist. Das größte und zugleich schwächste Element von P ist die leere Funktion. Also definieren wir die Cohen-Halbordnung als $P = (P, \supseteq, \emptyset)$. Zwei Bedingungen in P sind kompatibel, wenn sie als Funktionen kompatibel sind. Das ist der Fall, wenn ihre Vereinigung wiederum eine Funktion ist.

Wir fixieren bis auf Weiteres eine Forcing-Halbordnung$P = (P, \leq, 1_P) \in M$; die Forcing-Halbordnungwird im Grundmodell gewählt, damit die **ZFC**-Eigenschaften von M auf P angewendet werden können. Die scheinbar verkehrte Definition des Begriffs „Verstärkung" hängt mit späteren technischen Aspekten zusammen. Die intendierte Konstruktion entspricht einer sukzessiven Wahl von Bedingungen, die sich verstärken:

$$1_p \ldots \geq p \geq q \geq \ldots .$$

Allgemeiner lassen sich derartige Limesprozesse durch *Filter* auf P beschreiben:

Definition 15.4 Sei $P = (P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung. Eine Teilmenge $G \subseteq P$ ist ein **Filter** auf P, falls

(i) $1_P \in G$;

(ii) $\forall q \in G \, \forall p \geq q \, p \in G$;

(iii) $\forall p, q \in G \, \exists r \in G \, (p \geq r \wedge q \geq r)$.

Im Fall der Cohen-Halbordnung wäre wegen der Kompatibilitätsbedingung die Vereinigung eines Filters eine partielle Funktion von ω nach $\{0,1\}$. Wir werden später *generische* Filter einführen, bei denen diese Funktion total wäre.
Fixiere bis auf Weiteres einen Filter G auf P. Schon jetzt sind wir in der Lage, ein Erweiterungsmodell $M[G]$ einer schwachen Mengenlehre zu definieren. Zur Motivation der Konstruktion stelle man sich zwei Elemente x, y des angestrebten Modells $M[G]$ vor. Zur Festlegung des Modells ist es jedenfalls nötig, die Relation „$y \in x$" zu entscheiden. Dieses soll entlang des Filters G erfolgen in dem Sinne, dass es eine Bedingung $p \in G$ gibt, so dass p entscheidet, dass $y \in x$, oder so dass p entscheidet, dass $y \notin x$. Zum Arbeiten mit den noch nicht festgelegten Mengen x und y benötigen wir *Namen* in einer geeigneten Sprache. Wie im Falle der Körper sollen diese Namen Elemente des Grundmodells M sein. Wir finden also *Namen* $\dot{x} \in M$ und $\dot{y} \in M$, deren noch definierende Interpretationen $\dot{x}^G$ und $\dot{y}^G$ im Modell $M[G]$ gleich den vorgelegten Mengen sind:

$$\dot{x}^G = x \text{ und } \dot{y}^G = y.$$

Die Interpretation von $\dot{x}$ soll durch die Klasse der Paare

$$\{(\dot{y}, p) | \, p \text{ „erzwingt" } \dot{y} \in \dot{x}\}$$

bestimmt sein. Nach der von der Ordinalzahl-Theorie bekannten Methode wollen wir nun im Wesentlichen eine einfache Identifizierung vornehmen:

$$\dot{x} = \{(\dot{y}, p) | \, p \text{ „erzwingt" } \dot{y} \in \dot{x}\}.$$

Dies motiviert die folgende Interpretationsfunktion:

Definition 15.5 Definiere rekursiv auf M für $\dot{x} \in M$ die **G-Interpretation $\dot{x}^G$ von $\dot{x}$** durch

$$\dot{x}^G :\equiv \{\dot{y}^G \mid \exists p \in G\ (\dot{y}, p) \in \dot{x}\}.$$

Die (generische) Erweiterung ist dann die Gesamtheit dieser Interpretationen:

Definition 15.6 $M[G] :\equiv \{\dot{x}^G \mid \dot{x} \in M\}$ heißt **generische Erweiterung von M durch P und G.**

Die Rekursion in Definition 15.5 erfolgt über die stark fundierte Relation

$$\dot{y}\, R\, \dot{x} :\equiv \exists u\, (\dot{y}, u) \in \dot{x}.$$

15.1 Fundamentale Eigenschaften von $M[G]$.

Satz 15.7 *$M[G]$ ist transitiv.*

Beweis. Sei $u \in v \in M[G]$. Dann ist $v = \dot{x}^G$ für ein $\dot{x} \in M$. Aus $u \in \dot{x}^G$ folgt nach Definition von $\dot{x}^G$ die Existenz eines $\dot{y} \in \mathrm{dom}(\dot{x}) \subseteq M$ mit $u = \dot{y}^G$. Folglich ist $u \in M[G]$. QED

Satz 15.8 $\forall \dot{x} \in M\ \ \mathrm{rg}(\dot{x}^G) \leq \mathrm{rg}(\dot{x})$.

Beweis. Wir führen eine R-Induktion durch.

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}\Big(\dot{x}^G\Big) &= \mathrm{rg}\Big(\{\dot{y}^G \mid \exists p \in G\ (\dot{y}, p) \in \dot{x}\}\Big) = \mathrm{lub}\{\mathrm{rg}(\dot{y}^G) \mid \underbrace{\exists p \in G\ (\dot{y}, p) \in \dot{x}}_{\Rightarrow \dot{y}R\dot{x}}\} \\ &\leq \mathrm{lub}\{\mathrm{rg}(\dot{y}) \mid \dot{y}R\dot{x}\} \quad \text{(Ind.Vor.)} \\ &< \mathrm{rg}(\dot{x}) \quad (\text{wegen } \dot{y}R\dot{x} \longrightarrow \mathrm{rg}(\dot{y}) < \mathrm{rg}(\dot{x})).\end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. QED

Um $M \subseteq M[G]$ zu zeigen, müssen wir zu jedem $x \in M$ einen M-Namen $\check{x}$ so zuordnen, daß die G-Interpretation von $\check{x}$ gerade x ist.

Definition 15.9 Definiere durch $\in$-Rekursion: $\check{x} :\equiv \{(\check{y}, 1_P) \mid y \in x\}$. Für $x \in M$ heißt $\check{x}$ **kanonischer Name für** x.

Satz 15.10 *Für $x \in M$ gilt $\check{x}^G = x$.*

Beweis. Wir führen eine $\in$-Induktion über $x \in M$ durch.

$$\begin{aligned}\check{x}^G &= \{\dot{y}^G \mid \exists p \in G\ (\dot{y}, p) \in x\} = \{\dot{y}^G \mid (\dot{y}, 1_P) \in x\} = \{\check{y}^G \mid y \in x\} = \{y \mid y \in x\} \quad \text{(Ind.Vor.)} \\ &= x.\end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. QED

Aus 15.10 und **??** ergibt sich sofort:

Corollar 15.11 $M \subseteq M[G]$.

M und $M[G]$ haben dieselbe ordinale Höhe:

Corollar 15.12 $\mathrm{On}^M = \mathrm{On}^{M[G]}$. *M.a.W.:*[20] $M \cap \mathrm{On} = M[G] \cap \mathrm{On}$.

Beweis. Es genügt, die zweite Identität zu zeigen
zu $\subseteq$". Dies folgt sofort aus $M \subseteq M[G]$.
zu „$\supseteq$". Sei $\alpha \in M[G] \cap \mathrm{On}$. Wähle ein $x \in M$ mit $\alpha = \dot{x}^G$. Da rg M-V-absolut ist, siehe **??**, gilt $\mathrm{rg}(x) = \mathrm{rg}(x)^M \in M \cap \mathrm{On}$. Wegen 15.8 gilt $\alpha = \mathrm{rg}(\alpha) = \mathrm{rg}(\dot{x}^G) \in \mathrm{rg}(x)$. Da $M \cap \mathrm{On}$ als Schnitt transitiver Terme transitiv ist, folgt $\alpha \in M \cap \mathrm{On}$. QED

Um $G \in M[G]$ zu zeigen, benötigen wir einen Namen für den Filter G. Wir setzen:

Definition 15.13 $\dot{G} :\equiv \{(\check{p}, p) \mid p \in P\}$ heißt **kanonischer Name für Filter über** P.

Lemma 15.14 $\dot{G} \in M$.

Beweis. Sei $\varphi(p, y) :\equiv \exists x\,(x = \check{p} \wedge y = (x, p))$. Da der Term $\check{p}$ (**??**) und die Formel $y = (x, p)$ (**??**) M-V-absolut sind, ist nach **??** die Formel $\varphi(p, y)$ ebenfalls M-V-absolut. Ferner verhält sich $\varphi(p, y)$ „funktional":

$$\forall p, y, y' \in M\ ((\varphi(p, y) \wedge \varphi(p, y')) \longrightarrow y = y').$$

Wegen $(\mathbf{Paar})^M$ folgt

$$\begin{aligned}\dot{G} &= \{y \mid \exists p \in P\ y = (\check{p}, p)\} = \{y \in M \mid \exists p \in P\ y = (\check{p}, p)\} = \{y \in M \mid \exists p \in P\ \varphi(p, y)\}\\ &= \{y \in M \mid \exists p \in P\ \varphi^M(p, y)\} \in M \quad (\text{wegen } (\mathbf{Ers})^M).\end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. QED

Satz 15.15 *Sei H ein Filter auf P. Dann gilt $\dot{G}^H = H$. Insbesondere ist $H \in M[H]$.*

Beweis.

$$\begin{aligned}\dot{G}^H &= \{\dot{y}^H \mid \exists p \in H\ (\dot{y}, p) \in \dot{G}\} = \{\dot{y}^H \mid \exists p \in H\ ((\check{p}, p) \in \dot{G} \wedge \dot{y} = \check{p})\}\\ &= \{\dot{y}^H \mid \exists p \in H\ \dot{y} = \check{p}\} = \{\check{p}^H \mid p \in H\} = \{p \mid p \in H\} \quad (15.10)\\ &= H.\end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. QED

Satz 15.16 *Es gilt* $(\mathbf{Ex})^{M[G]}$, $(\mathbf{Ext})^{M[G]}$, $(\mathbf{Paar})^{M[G]}$, $(\mathbf{Inf})^{M[G]}$ *und* $(\mathbf{Fund})^{M[G]}$.

[20] siehe **??**

Beweis. Da $M[G]$ transitiv und nicht-leer ist, gelten $(\mathbf{Ex})^{M[G]}$, $(\mathbf{Ext})^{M[G]}$ und $(\mathbf{Fund})^{M[G]}$ nach 11.4. Wegen $\omega \in M \subseteq M[G]$ gilt $(\mathbf{Inf})^{M[G]}$. Um $(\mathbf{Paar})^{M[G]}$ zu zeigen fixiere $a, b \in M[G]$. Seien $x, y \in M$ mit $a = \dot{x}^G$ und $b = \dot{y}^G$. Setze $\dot{z} :\equiv \{(\dot{x}, 1_P), (\dot{y}, 1_P)\}$. Dann gilt $\dot{z}^G = \{\dot{x}^G, \dot{y}^G\} = \{a, b\}$. Also ist $\{a, b\} \in M[G]$, d.h., $(\mathbf{Paar})^{M[G]}$ nach 11.4. QED

Satz 15.17 *Es gilt* $(\bigcup\text{-}\mathbf{Ax})^{M[G]}$.

Beweis. Sei $x \in M[G]$, $x = \dot{x}^G$. Wir definieren einen Namen für die Vereinigung von x:

$$\dot{y} :\equiv \{(\dot{u}, r) | \exists p, q \in P \exists \dot{v} (r \leq p \wedge r \dot{\leq} q \wedge (\dot{u}, p) \in \dot{v} \wedge (\dot{v}, q) \in \dot{x}\}.$$

Dies ist ein Name, d.h. ein Element von M, weil M unter einfachen Operationen, und insbesondere unter Vereinigungsbildung abgeschlossen ist.
Betrachte $u \in \bigcup x$. Wähle $v \in x$ mit $u \in v \in x = \dot{x}^G$. Wähle $\dot{v} \in M$ und $q \in G$ mit $(\dot{v}, q) \in \dot{x}$ und $\dot{v}^G = v$. Wähle $\dot{u} \in M$ und $p \in G$ mit $(\dot{u}, p) \in \dot{v}$ und $\dot{u}^G = u$. Wähle $r \in G$ mit $r \leq p, q$. Dann ist $(\dot{u}, r) \in \dot{y}$ und da $r \in G$ ist $\dot{u}^G \in \dot{y}^G$. Also ist $u \in \dot{y}^G$.
Umgekehrt betrachte $u \in \dot{y}^G$. Wähle $r \in G$ und $\dot{u} \in M$ mit $(\dot{u}, r) \in \dot{y}$ und $u = \dot{u}^G$. Nach Definition von $\dot{y}$ wähle $p, q \in P$ und $\dot{v} \in M$ mit $r \leq p, q$, $(\dot{u}, p) \in \dot{v}$ und $(\dot{v}, q) \in \dot{x}$. Dann ist $p, q \in G$ und $\dot{u}^G \in \dot{v}^G$, $\dot{v}^G \in \dot{x}^G$. Also ist $u \in \dot{v}^G \in x$ und $u \in \bigcup x$. QED

Mit ähnlichen Methoden ließen sich weitere Abschlusseigenschaften von $M[G]$ zeigen, wie der Abschluss gegenüber cartesischen Produkten. Allerdings machen andere, einfache Operationen wie z.B. der Schnitt zweier Mengen Schwierigkeiten, und wir müssen die stärkeren Techniken des nächsten Kapitels einsetzen.

16 Die Erzwingungsrelation

Der Nachweis der weiteren Axiome der Mengenlehre in $M[G]$ stößt in der augenblicklichen Allgemeinheit auf Schwierigkeiten. Wir wollen unser weiteres Vorgehen anhand des Aussonderungsaxioms, des zentralen Axioms der Zermeloschen Mengenlehre, motivieren. Angenommen, wir wollen das Aussonderungsaxiom in $M[G]$ nachweisen. Man betrachte ein $a \in M[G]$ und eine $\in$-Formel φ. Wie kann man erreichen, dass die Aussonderungsmenge

$$\{u \in a | M[G] \models \varphi(u)\} \in M[G]?$$

Nach dem Vorgehen des vorangehenden Kapitels wähle man einen Namen $\dot{a} \in M$, $\dot{a}^G = a$ und versuche die Bildung eines Names vom Typ:

$$\dot{b} = \{(\dot{u}, r) | (r \leq p \wedge (\dot{u}, p) \in \dot{a} \wedge r \text{ erzwingt, dass } M[G] \models \varphi(\dot{u}^G)\}.$$

Wir müssen erreichen, dass dies ein Name, also ein Element des Grundmodells M ist, aber eine korrekte Definition in M darf nicht Bezug auf ein Element G nehmen, das im allgemeinen kein Element von M ist.

Wir „lösen“ dieses Problem dadurch, dass wir in den Bezug auf G einfach weglassen:

$$\dot{b} = \{(\dot{u}, r)|(r \leq p \wedge (\dot{u}, p) \in \dot{a} \wedge r \text{ erzwingt, dass } \varphi(\dot{u})\}.$$

Eine Bedingung r soll also in der Lage sein, die Richtigkeit von $\varphi(\dot{u})$ in Erweiterungen zu kontrollieren. Dies lässt sich in solcher Allgemeinheit nicht erreichen, aber wir können eine provisorische Definition machen:
„Definition“. r erzwingt $\varphi(\dot{u})$ gdw. für *alle* Filter $G \subseteq P$ mit $r \in G$ gilt:

$$M[G] \models \varphi(\dot{u}).$$

Tatsächlich lassen sich, aus recht trivialen Gründen, bestimmte Aussagen in diesem Sinne „erzwingen“: falls $(\dot{x}, p) \in \dot{y}$, so erzwingt p die Eigenschaft $\dot{x} \in \dot{y}$. Wegen der oben nachgewiesenen Axiome erzwingt *jede* Bedingung das Paarmengenaxiom. Aber wie sieht es mit einem beliebigen φ wie im Aussonderungsaxiom aus?
Angenommen, wir versuchen den Beweis des Aussonderungsaxioms. Es sei

$$u \in \{u \in a|M[G] \models \varphi(u)\}$$

und wir wollen zeigen, dass $u \in \dot{b}^G$. Wir benötigen dann ein $r \in G$ und einen Namen $\dot{u}$ mit $\dot{u}^G = u$ und $(\dot{u}, r) \in \dot{b}$. Nach dem tentativen Ansatz für $\dot{b}$ hieße das, dass r die Eigenschaft $\varphi(\dot{u})$ erzwingt. Das bedeutet, dass eine Eigenschaft, die in $M[G]$ gilt, von einer Bedingung im Filter erzwungen wird.
Insbesondere brauchen wir für jede Aussage ψ, dass es eine Bedingung p im Filter gibt, so dass p erzwingt ψ oder p erzwingt $\neg\psi$. Wie lässt sich dieses erreichen. Wir wollen die Erzwingungsrelation über den Aufbau von ψ rekursiv erklären. Angenommen, wir hätten bereits eine Definition von „r erzwingt ψ“. Wir wollen für diese Relation bereits das Zeichen $\Vdash$ als Abkürzung benutzen. Dann gilt wegen des Abschlusses von Filtern nach oben:

$$r \Vdash \neg\psi \rightarrow \neg\exists p \leq r \; p \Vdash \psi.$$

Wir postulieren an dieser Stelle nun eine Äquivalenz, denn dann hätten wir eine rekursive Definition von $\Vdash$ im Negationsfall. Dieser drastische Ansatz lässt sich wirklich durchführen, wie wir später sehen werden.

$$r \Vdash \neg\psi \leftrightarrow \neg\exists p \leq r \; p \Vdash \psi.$$

Allerdings können wir nicht mehr mit allgemeinen Filtern arbeiten, sondern wir müssen uns auf eine Teilklasse von *generischen* Filtern beschränken. Die zugehörige Definition können wir folgendermaßen motivieren: **„Lemma“.** Die Menge $D = \{s \in P| \; s \Vdash \psi \; \vee \; s \Vdash \neg\psi\}$ ist *dicht* in P, d.h. $\forall r \in P \exists s \in D \; s \leq r$.

Dieses folgt sofort aus dem obigen Ansatz. Nach dem bereits Gesagten benötigen wir nun, dass die dichte Menge D von dem Filter G geschnitten wird. Unter der weiteren starken Annahme, dass die Menge D ein Element des Grundmodells ist, führt dieses dann zu folgenden, nun formal korrekten Definitionen.

16.1 Generische Filter

Definition 16.1 Sei $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung.

(a) Sei $D \subseteq P$. Wir definieren: D ist **dicht in** $P :\equiv \forall p \in P\, \exists q \in D\; q \leq p$.

(b) Sei G ein Filter auf $(P, \leq)$. Wir definieren:
G ist P-**generisch über** $M :\equiv \forall D \in M\; (D \text{ dicht in } P \longrightarrow D \cap G \neq \emptyset)$.

Da das Grundmodell M abzählbar gewählt ist, existieren generische Filter:

Satz 16.2 (Existenzsatz für generische Filter) *Sei $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung und $\mathcal{D}$ sei höchstens abzählbar. Dann existiert zu jedem $p_0 \in P$ ein P-generischer Filter G über $\mathcal{D}$ mit $p_0 \in G$.*

Beweis. Sei $\{D_n \mid n < \omega\}$ eine Aufzählung derjenigen Elemente von $\mathcal{D}$, die dicht in P sind. Definiere rekursiv eine bzgl. $\leq$ absteigende Folge $(p_n \mid n < \omega)$ wie folgt:

p_0 sei das im Satz genannte Element von P;
ist p_n bereits definiert, so sei $p_{n+1} \in D_n$ mit $p_{n+1} \leq p_n$; ein solches p_{n+1} existiert, da D_n dicht in P ist.

Setze $G :\equiv \{p \in P \mid \exists n < \omega\, p_n \leq p\}$. Dann gilt $p_0 \in G$ und $P \cap D \neq \emptyset$ für jedes $D \in \mathcal{D}$, das dicht in P ist. Da $\leq$ transitiv ist, ist G nach oben abgeschlossen: ist nämlich $p \in G$ und $p \leq q$, so wähle $n < \omega$ mit $p_n \leq p$; aus $p_n \leq p$ und $p \leq q$ folgt $p_n \leq q$, d.h., $q \in G$. Schließlich sind je zwei Elemente $p, q \in G$ kompatibel in G: Wähle zu p, q nämlich $k, l < \omega$ mit $p_k \leq p$ und $p_l \leq q$; da $(p_n \mid n < \omega)$ absteigend und $\leq$ transitiv ist, ist $p_{\max\{k,l\}} \leq p$ und $p_{\max\{k,l\}} \leq q$. Damit ist G als Filter nachgewiesen. QED

16.2 Die Forcingrelation $\Vdash$.

Definition 16.3 Sei $\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})$ eine Formel der Forcing-Sprache, d.h., $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ ist eine $\in$-Formel und $\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1} \in M$ sind M-Namen. Für $p \in P$ setzen wir

$$p \Vdash_P \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1}) :\equiv \forall G \Big((G \text{ ist } P\text{-generischer Filter über } M \wedge p \in G) \longrightarrow \varphi^{M[G]}(\dot{x}_0^G \ldots, \dot{x}_{n-1}^G) \Big).$$

In diesem Fall sagen wir, p **erzwingt** $\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})$. Ist P aus dem Zusammenhang bekannt, so schreiben wir $\Vdash$ statt $\Vdash_P$.

Bemerkung 16.4 Aus **??** folgt

$$p \Vdash_P \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1}) \longleftrightarrow \forall G \Big((G \text{ ist } P\text{-generischer Filter über } M \wedge p \in G) \longrightarrow (\varphi(\dot{x}_0^G \ldots, \dot{x}_{n-1}^G))^{M[G]} \Big).$$

Erzwingen vererbt sich von schwächeren auf stärkere Bedingungen und von stärkeren auf schwächere Aussagen:

Lemma 16.5 *(a) Wenn $p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})$ gilt, so gilt $q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})$ für alle $q \leq p$.*

(b) *Wenn* $p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$ *und wenn* $\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1}) \rightarrow \psi(\dot{y}_0, \ldots, \dot{y}_{n-1})$ *eine Tautologie ist, so folgt* $p \Vdash \psi(\dot{y}_0, \ldots, \dot{y}_{n-1})$.

(c) *Gilt* $(\dot{x}, p) \in \dot{y}$ *mit* $p \in P$, *so gilt* $p \Vdash \dot{x} \in \dot{y}$.

Beweis. zu (a). Sei $q \leq p$. Ist G ein P-generischer Filter über M mit $q \in G$, so ist $p \in G$ wegen des Abschlusses des Filters nach oben. Wegen $p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})$ gilt $\varphi^{M[G]}(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G)$. Also gilt $q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})$.

zu (b). Betrachte einen P-generischen Filter über M mit $p \in G$. Nach Voraussetzung ist $M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$, und da $\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1}) \rightarrow \psi(\dot{y}_0, \ldots, \dot{y}_{n-1})$ eine Tautologie ist, ist $M[G] \models \psi(\dot{y}_0^G, \ldots, \dot{y}_{m-1}^G)$.

zu (c). Ist G ein P-generischer Filter über M mit $p \in G$, so gilt unter den Voraussetzungen von (c) $\dot{x}^G \in \dot{y}^G$ nach Definition von $\dot{y}^G$. Dies ist nach **??** gleichwertig mit mit $(\dot{x}^G \in \dot{y}^G)^{M[G]}$. QED

Von entscheidender Bedeutung für die Forcing-Technik ist die Definierbarkeit der Erzwingungsrelation im Grundmodell M, d.h. die Definierbarkeit der Relation

$$\mathrm{Forc}_\varphi :\equiv \{(p, \dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1}) | p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\}$$

für jede $\in$-Formel φ. Wir zeigen dies durch Induktion über den Formelaufbau, wobei wir der Einfachheit halber zunächst die *Induktionsschritte* behandeln. Parallel dazu wird gezeigt, dass jede in einer generischen Erweiterung erfüllte Aussage durch ein Element des generischen Filters erzwungen wird.

Satz 16.6 *Seien* $\varphi(v_0, \ldots, v_{m-1})$ *und* $\psi(v_0, \ldots, v_{m-1})$ $\in$*-Formeln, für die* Forc_φ *und* Forc_ψ *in* M *definierbar sind. Weiter gelte für jede generische Erweiterung* $M[G]$ *und* $\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1} \in M$*: falls* $M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$, *so gibt es eine Bedingung* $p \in G$ *mit* $p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. *Entsprechendes sei für* ψ *vorausgesetzt. Dann gilt für alle Namen* $\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1} \in M$*:*

(a) $p \Vdash (\varphi \wedge \psi)(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$ *gdw.* $p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$ *und* $p \Vdash \psi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$.

(b) $p \Vdash \neg\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$ *gdw.* $\forall q \leq p \; \neg q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$.

(c) $p \Vdash \forall v_0 \varphi(v_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})$ *gdw.* $\forall \dot{x}_0 \in M \; p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$.

(d) *Die Relationen* $\mathrm{Forc}_{\varphi\wedge\psi}$, $\mathrm{Forc}_{\neg\varphi}$ *und* $\mathrm{Forc}_{\forall v_0 \varphi}$ *sind im Grundmodell* M *definierbar.*

(e) *Wenn* $M[G] \models (\varphi \wedge \psi)(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$, *so gibt es eine Bedingung* $p \in G$ *mit* $p \Vdash (\varphi \wedge \psi)(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$.

(f) *Wenn* $M[G] \models \neg\varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$, *so gibt es eine Bedingung* $p \in G$ *mit* $p \Vdash \neg\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$.

(g) *Wenn* $M[G] \models \forall v_0 \, \varphi(v_0, \dot{x}_1^G \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$, *so gibt es eine Bedingung* $p \in G$ *mit* $p \Vdash \forall v_0 \varphi(v_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})$.

Beweis. (a) Die Implikation von links nach rechts folgt sofort aus 16.5(b). Umgekehrt sei $p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$ und $p \Vdash \psi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Betrachte G P-generisch über M mit $p \in G$. Dann ist $M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$ und $M[G] \models \psi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$. Dann ist $M[G] \models (\varphi \wedge \psi)(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$. Also gilt $p \Vdash (\varphi \wedge \psi)(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$.

(b) Ein Allquantor kann als infinitäre Konjunktion aufgefasst werden, der folgende Beweis entspricht daher dem für die binäre Konjunktion. Die Implikation von links nach rechts folgt wieder aus 16.5(b). Umgekehrt sei $\forall \dot{x}_0 \in M\ p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Betrachte G P-generisch über M mit $p \in G$. Dann ist $\forall \dot{x}_0 \in M\ M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$. Dann ist $M[G] \models \forall v_0\, \varphi(v_0, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$. Also $p \Vdash \forall v_0 \varphi(v_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})$.
(c) Sei $p \Vdash \neg\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$ und $q \leq p$. Angenommen $q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Wähle G P-generisch über M mit $q \in G$. Dann ist $M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$. Andererseits ist $p \in G$ und $M[G] \models \neg\varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$, Widerspruch.
Für die Umgekehrung sei die linke Seite der Äquivalenz falsch: $\neg p \Vdash \neg\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Nach Definition der Forcingrelation wähle einen P-generischen Filter G mit $p \in G$ und $M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$. Nach den Voraussetzungen über φ gibt es eine Bedingung $r \in G$ mit $r \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Wähle ein $q \in G$ mit $q \leq p, r$. Nach 16.5 ist dann $q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Damit ist auch die rechte Seite der Äquivalenz falsch.
(d) Unter der Voraussetzung, dass Forc_φ und Forc_ψ in M definierbar sind, liefern die Punkte (a)-(c) Definitionen von $\mathrm{Forc}_{\varphi\wedge\psi}$, $\mathrm{Forc}_{\neg\varphi}$ und $\mathrm{Forc}_{\forall v_0 \varphi}$ im Grundmodell M.
(e) Sei $M[G] \models (\varphi \wedge \psi)(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$. Dann ist $M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$ und $M[G] \models \psi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$. Nach Voraussetzung gibt es Bedingungen $p, q \in G$ mit $p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$ und $q \Vdash \psi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Wähle $r \in G$ mit $r \leq p, q$. Dann ist $r \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$, $r \Vdash \psi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$ und $r \Vdash (\varphi \wedge \psi)(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$
(f) Sei $M[G] \models \neg\varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$. Definiere die Menge

$$D = \{p \in P | p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1}) \text{ oder } \forall q \leq p\, \neg q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})\}.$$

Da Forc_φ in M definierbar ist, ist $D \in M$. Die Menge D ist offensichtlich dicht in P. Da G P-generisch über M ist, können wir ein $p \in G \cap D$ wählen. Angenommen, es wäre $p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Dann wäre $M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$, Widerspruch. Also ist $\forall q \leq p\, \neg q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Nach (b) ist dann $p \Vdash \neg\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$, wie verlangt.
(g) Sei $M[G] \models \forall v_0\, \varphi(v_0, \dot{x}_1^G \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$. Definiere die Menge

$$D = \{p \in P | \forall \dot{x}_0 \in M\, p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1}) \text{ oder } \exists \dot{x}_0 \in M\, p \Vdash \neg\varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})\}.$$

Da Forc_φ und $\mathrm{Forc}_{\neg\varphi}$ in M definierbar sind, ist $D \in M$.
Behauptung: D ist dicht in P.
Beweis. Betrachte $r \in P$. Wenn $\forall \dot{x}_0 \in M\, r \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})$, so ist $r \in D$. Andernfalls wähle ein $\dot{x}_0 \in M$ mit $\neg r \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Wähle einen P-generischen Filter H über M, so dass $M[H] \models \neg\varphi(\dot{x}_0^H, \dot{x}_1^H, \ldots, \dot{x}_{m-1}^H)$. Nach dem eben bewiesenen (f) gibt es eine Bedingung $s \in H$ mit $s \Vdash \neg\varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Wähle schließlich eine Bedingung $p \in H$ mit $p \leq r, s$. Dann ist $p \Vdash \neg\varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})$ und $p \in D$. qed(Behauptung)
Wegen der Behauptung und der Generizität von G können wir ein $p \in G \cap D$ wählen. Angenommen es gelte $\exists \dot{x}_0 \in M\, p \Vdash \neg\varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Wähle $\dot{x}_0 \in M$ mit $p \Vdash \neg\varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Da $p \in G$ gilt dann $M[G] \models \neg\varphi(\dot{x}_0^G, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$, im Widerspruch zur Beweisannahme. Daher muss p in „der anderen Hälfte" von D liegen, und $\forall \dot{x}_0 \in M\, p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Nach (c) ist dann $p \Vdash \forall v_0\, \varphi(v_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. QED

16.3 Der atomare Fall

Überraschenderweise ist die Betrachtung der atomaren Fälle $p \Vdash x_1 = x_2$ und $p \Vdash x_1 \in x_2$ besonders verwickelt. Dies ist in der hierarchischen Struktur allgemeiner Mengen begründet. Die Eigenschaft $x_1^G = x_2^G$ bedeutet, dass

$$\{y_1^G | \exists s_1 \in G\, (y_1, s_1) \in x_1\} = \{y_2^G | \exists s_2 \in G\, (y_2, s_2) \in x_2\}.$$

Für die Gleichheit dieser zwei Interpretationen ist es erforderlich, dass es zu jedem y_1^G links ein y_2^G rechts, und umgekehrt, gibt, so dass $y_1^G = y_2^G$. Dies führt zu einer rekursiven „Definition" der Gleichheit, die sich in der Forcing-Relation widerspiegelt. Wir benötigen eine kleine technische Definition:

Definition 16.7 Sei $p \in P$ und $D \subseteq P$. D ist **dicht in** P **unter** p $:\equiv \forall q \leq p\, \exists r \leq q\; r \in D$.

Lemma 16.8
(a) $p \Vdash x_1 = x_2$ *gdw.*

(α) $\forall (y_1, s_1) \in x_1 \Big(s_1 \in P \longrightarrow \underbrace{\{q \in P \mid q \leq s_1 \to \exists (y_2, s_2) \in x_2 (s_2 \in P \wedge q \leq s_2 \wedge q \Vdash y_1 = y_2)\}}_{\equiv: D_{(\alpha)}(y_1, s_1, x_2)}$ *ist dicht in P unter* $p \Big)$ **und**

(β) $\forall (y_2, s_2) \in x_2 \Big(s_2 \in P \longrightarrow \underbrace{\{q \in P \mid q \leq s_2 \to \exists (y_1, s_1) \in x_1 (s_1 \in P \wedge q \leq s_1 \wedge q \Vdash y_1 = y_2)\}}_{\equiv: D_{(\beta)}(x_1, y_2, s_2)}$ *ist dicht in P unter* $p \Big)$.

(b) $\mathrm{Forc}_{v_1 = v_2}$ *ist in M mit Hilfe der Rekursionsvorschrift aus (a) definierbar.*

(c) Wenn $x_1^G = x_2^G$, *so gibt es eine Bedingung* $p \in G$ *mit* $p \Vdash x_1 = x_2$.

Beweis. Wir beweisen das Lemma durch Induktion über die Tripel $(p, x_1, x_2) \in P \times M \times M$ mit der stark fundierten Relation

$$(q, y_1, y_2) R (p, x_1, x_2) :\equiv q \in P \wedge p \in P \wedge y_1 \in \mathrm{dom}(x_1) \wedge y_2 \in \mathrm{dom}(x_2).$$

Betrachte also ein Tripel $(p, x_1, x_2) \in P \times M \times M$ mit der Annahme, dass $\mathrm{Forc}_{v_1 = v_2}$ bezüglich R unterhalb von (p, x_1, x_2) durch die Äquivalenz in (a) rekursiv definiert ist, und (b) und (c) unterhalb von (p, x_1, x_2) gelten.
(a) Angenommen, $p \Vdash x_1 = x_2$. Betrachte $p' \leq p$ Wir suchen eine Bedingung $p'' \leq p'$, so dass die Eigenschaften (α) und (β) mit p'' statt mit p erfüllt sind. Da p' beliebig unterhalb von p gewählt werden kann, erfüllt dann auch p selbst die Eigenschaften (α) und (β).
Wähle einen Filter G, der P-generisch über M ist, mit $p' \in G$. Dann ist $p' \Vdash x_1 = x_2$ und $x_1^G = x_2^G$. Setze

$$\begin{aligned} D :\equiv \Big\{p'' \in P \;\Big|\; & p'' \text{ erfüllt die Eigenschaften } (\alpha) \text{ und } (\beta) \\ & \vee\ \exists(y_1,s_1) \in x_1\Big(s_1 \in P \wedge \forall q \leq p'' \\ & \quad (q \leq s_1 \wedge \forall(y_2,s_2) \in x_2((s_2 \in P \wedge q \Vdash y_1 = y_2) \rightarrow \neg\, q \leq s_2))\Big) \qquad (\neg\alpha) \\ & \vee\ \exists(y_2,s_2) \in x_2\Big(s_2 \in P \wedge \forall q \leq p'' \\ & \quad (q \leq s_2 \wedge \forall(y_1,s_1) \in x_1((s_1 \in P \wedge q \Vdash y_1 = y_2) \rightarrow \neg\, q \leq s_1))\Big)\Big\}. \quad (\neg\beta) \end{aligned}$$

Aus der induktiven Definierbarkeitsannahme (b) folgt sofort, dass

(2) $D \in M$.

(3) D ist dicht in P.

Beweis. Betrachte $r \in P$. Erfüllt dann r die Eigenschaften (α) und (β), so ist $r \in D$, und die Dichtheitseigenschaft gilt. Wir nehmen nun an, dass eine der Bedingungen (α) bzw. (β) nicht erfüllt ist. O.E. sei (α) nicht erfüllt, d.h.,

$$\begin{aligned} & \exists(y_1,s_1) \in x_1\Big(s_1 \in P \wedge \\ & \underbrace{\{q \in P \mid q \leq s_1 \rightarrow \exists(y_2,s_2) \in x_2(s_2 \in P \wedge q \leq s_2 \wedge q \Vdash y_1 = y_2)\}}_{=D_{(\alpha)}(y_1,s_1,x_2)} \\ & \qquad \text{ist } \textbf{nicht} \text{ dicht in } P \text{ unter } r\Big). \end{aligned}$$

Da eine Menge C genau dann nicht dicht unter r ist, wenn es ein $p'' \leq r$ gibt, so daß für alle $q \leq p$ gilt $q \notin C$, ist die letzte Formel gleichwertig zu

$$\exists(y_1,s_1) \in x_1(s_1 \in P \wedge \exists p'' \leq r\, \forall q \leq p''\ q \notin D_{(\alpha)}(y_1,s_1,x_2)).$$

Wähle dementsprechend $p'' \leq r$ mit $\exists(y_1,s_1) \in x_1(s_1 \in P \wedge \forall q \leq p''\ q \notin D_{(\alpha)}(y_1,s_1,x_2))$. Es ist leicht zu sehen daß $q \notin D_{(\alpha)}(y_1,s_1,x_2)$ gleichwertig ist mit $q \leq s_1 \wedge \forall(y_2,s_2) \in x_2((s_2 \in P \wedge q \Vdash y_1 = y_2) \rightarrow \neg\, q \leq s_2)$. Also gilt $(\neg\alpha)$ für p'' und somit $p'' \in D$. Wegen $p'' \leq r$ ist p'' wie für die Dichtheit benötigt. qed(3)

Da G P-generisch über M ist, existiert wegen (2) und (3) ein $p'' \in G \cap D$. Der Satz ist bewiesen, wenn wir gezeigt haben:

(4) p'' erfüllt die Eigenschaften (α) und (β).

Beweis. Wenn dies nicht gilt, gilt $(\neg\alpha)$ oder $(\neg\beta)$ wegen $p'' \in D$. Aus Symmetriegründen können wir annehmen, daß $(\neg\alpha)$ für p'' erfüllt ist. Wähle $(y_1,s_1) \in x_1$ mit $s_1 \in P$ wie in $(\neg\alpha)$. Setzt man in $(\neg\alpha)$ $q :\equiv p''$, so folgt $p'' \leq s_1$, so dass

(4.1) $s_1 \in G$

wegen $p \in G$ folgt. Nach Definition von x_1^G ist dann $y_1^G \in x_1^G$, also $y_1^G \in x_2^G = \{y_2^G \mid \exists s_2 \in G\ (y_2, s_2) \in x_2\}$ wegen $x_1^G = x_2^G$. Wähle ein $(y_2, s_2) \in x_2$ mit

(4.2) $s_2 \in G$ und $y_1^G = y_2^G$.

Dann gilt $(s_2, y_1, y_2) R (s, x_1, x_2)$, so daß $y_1^G = y_2^G$ nach Induktionsvoraussetzung die Existenz eines

(4.3) $q' \in G$

impliziert, so dass

(4.4) $q' \Vdash y_1 = y_2$

gilt. Wähle $q \in G$ mit $q \leq p'', s_1, s_2, q'$. (Beachte: Nach (4.1) – (4.4) gilt $s_1, s_2, q' \in G$; nach Wahl von p'' ist $p'' \in G$.) Wegen $q \leq q'$ und (4.4) folgt $q \Vdash y_1 = y_2$, so dass für q gilt

$$q \leq p'' \wedge q \leq s_1 \wedge (y_2, s_2) \in x_2 \wedge s_2 \in P \wedge q \Vdash y_1 = y_2 \wedge q \leq s_2.$$

Dies widerspricht $(\neg\alpha)$. Also muß (4) doch richtig sein. qed(4)

Damit ist eine Implikation der in (a) behaupteten Äquivalenz gezeigt.
Umgekehrt betrachte $p \in G$ und $x_1, x_2 \in M$, die die Eigenschaften (α) und (β) erfüllen. Wir behaupten, dass $x_1^G = x_2^G$. Aus Symmetriegründen genügt es, $x_1^G \subseteq x_2^G$ zu zeigen. Hierzu betrachte $z \in x_1^G = \{y_1^G \mid \exists s_1 \in G\ (y_1, s_1) \in x_1\}$. Wähle $y_1 \in \mathrm{dom}(x_1)$ und ein $s_1 \in G$, so daß $(y_1, s_1) \in x_1$ und $z = y_1^G$ ist. Nach der Annahme (α) ist

$$D_{(\alpha)}(y_1, s_1, x_2) = \{q \in P \mid q \leq s_1 \to \exists (y_2, s_2) \in x_2 (s_2 \in P \wedge q \leq s_2 \wedge q \Vdash y_1 = y_2)\}$$

dicht in P unter p.

(5) $\exists q \in D_{(\alpha)}(y_1, s_1, x_2) \cap G\ \ q \leq s_1$.

Beweis. Sei $r \in G$ mit $r \leq p, s_1$. Da $D_{(\alpha)}(y_1, s_1, x_2)$ dicht unter p ist, ist $D_{(\alpha)}(y_1, s_1, x_2)$ auch dicht unter r. Da nach **??** $D_{(\alpha)}(y_1, s_1, x_2) \in M$ gilt und $r \in G$ ist, existiert nach **??** ein $q \in D_{(\alpha)}(y_1, s_1, x_2) \cap G$ mit $q \leq r$. Wegen $r \leq s_1$ ist q wie benötigt. qed(5)

Sei nun q wie in (5). Wegen $q \in D_{(\alpha)}(y_1, s_1, x_2)$ und $q \leq s_1$ existiert nach Definition von $D_{(\alpha)}(y_1, s_1, x_2)$ ein $(y_2, s_2) \in x_2$ mit $s_2 \in P$, $q \leq s_2$ und $q \Vdash y_1 = y_2$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $y_1^G = y_2^G$. Wegen $q \leq s_2$ und $q \in G$ ist $s_2 \in G$. Aus $(y_2, s_2) \in x_2$ folgt also $y_2^G \in x_2^G$ nach Definition von x_2^G. Insgesamt ergibt sich $z = y_1^G \in x_2^G$ und dieses war für (a) zu zeigen.
(b) Aus (a) folgt sofort, dass man die rekursive Definition von $p \Vdash v_1 = v_2$ auf das Tripel p, x_1, x_2 ausweiten kann, und dass diese im Grundmodell M ausgewertet werden kann.
(c) Angenommen, $x_1^G = x_2^G$. Wir hatten im Beweis von (a) aus der gleichen Annahme die Existenz eines $p'' \in G$ hergeleitet, dass die Eigenschaften (α) und (β) erfüllt (siehe (4)). Nach (a) gilt dann $p'' \Vdash x_1 = x_2$. QED

Die Behandlung der Formel $v_1 \in v_2$ ist wieder einfacher:

Lemma 16.9

(a) $p \Vdash x_1 \in x_2$ *gdw.* $D :\equiv \{q \in P \mid \exists (y,s) \in x_2\, (s \in P \wedge q \leq s \wedge q \Vdash x_1 = y)\}$ *ist dicht in P unter p*

(b) $\mathrm{Forc}_{v_1 \in v_2}$ *ist in M mit Hilfe der Formel aus (a) definierbar.*

(c) *Wenn $x_1^G \in x_2^G$, so gibt es eine Bedingung $p \in G$ mit $p \Vdash x_1 \in x_2$.*

Beweis. (a) Angenommen $p \Vdash x_1 \in x_2$. Um die Dichtheit von D zu zeigen, betrachte eine Bedingung $p' \leq p$. Dann gilt $p' \Vdash x_1 \in x_2$. Wähle einen Filter G, der P-generisch über M ist und so dass $p' \in G$. Dann ist $x_1^G \in x_2^G$. Nach Definition von x_2^G existiert ein $(y,s) \in x_2$ mit $s \in G$ und $x_1^G = y^G$. Nach Teil (c) des letzten Lemmas können wir ein $r \in G$ wählen mit $r \Vdash x_1 = y$. Wähle $q \in P$ mit $q \leq r, s, p'$. Dann ist $q \in D$ und $q \leq p'$.
Umgekehrt sei die Menge D dicht in P unter p. Betrachte einen P-generischen Filter G über M mit $p \in G$. Da D dicht in P unter $p \in G$ ist, können wir eine Bedingung $q \in D \cap G$ wählen. Nach Definition der Menge D wähle $(y,s) \in x_2$, so dass

$$s \in P \wedge q \leq s \wedge q \Vdash x_1 = y.$$

Dann ist $s \in G$ und $y^G \in x_2^G$. Weiter ist $x_1^G = y^G$. Also ist $x_1^G \in x_2^G$, wie gewünscht.
(b) folgt sofort aus (a).
(c) Angenommen $x_1^G \in x_2^G$. Nach Definition von x_2^G existiert ein $(y,s) \in x_2$ mit $s \in G$ und $x_1^G = y^G$. Nach Teil (c) des letzten Lemmas können wir ein $r \in G$ wählen mit $r \Vdash x_1 = y$. Wähle $p \in G$ mit $p \leq r, s$. Nach 16.5 gilt $p \Vdash x_1 = y$ und $p \Vdash y \in x_2$. Zusammen gilt dann $p \Vdash x_1 \in x_2$. QED

Die Lemmas 16.6, 16.8 und 16.9 ergeben zusammen mit der Definition der Forcing-Relation das folgende *Forcing-Theorem* als Schema über die Formel-Komplexität:

Satz 16.10 *Seien $\varphi(v_0, \ldots, v_{m-1})$ eine $\in$-Formeln. Dann gilt:*

(a) *Die Relation* Forc_φ *ist im Grundmodell M definierbar.*

(b) *Für alle Namen $\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1} \in M$ gilt: $M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$ gdw. es eine Bedingung $p \in G$ gibt mit $p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$.*

16.4 Eigenschaften der Forcing-Relation $\Vdash$.

Satz 16.11 *Sei M ein Grundmodell und $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung für M. Ferner sei φ eine $\in$-Formel und $\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1} \in M$. Dann gilt:*

(a) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- *(i)* $p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})$;
- *(ii)* $\forall q \leq p\; q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})$;
- *(iii)* $\{q \in P \mid q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\}$ *ist dicht in P unter p.*

(b) $\{p \in P \mid p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1}) \vee p \Vdash \neg\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\}$ *ist dicht in P und Element von M.*

Beweis. (a) Es genügt, (iii)→(i) zu zeigen. Angenommen, $D :\equiv \{q \in P \,|\, q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\}$ ist dicht in P unter p. Betrachte einen P-generischen Filter G über M mit $p \in G$. Nach dem Forcing-Theorem ist $D \in M$, und da G generisch über M ist, ist $D \cap G \neq \emptyset$. Wähle $q \in D \cap G$. Da $q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})$, ist $M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G)$. Also gilt $p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})$.
(b) folgt sofort aus 16.6(b) und 16.10. QED

Wir halten nochmals fest, wie sich das Erzwingen entlang des Formelaufbaus ergibt:

Satz 16.12 *Sei M ein Grundmodell und $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung für M. Ferner seien φ und ψ $\in$-Formeln und $\dot{x}, \dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1} \in M$. Dann gilt:*

(a) $p \Vdash \neg\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$ *gdw.* $\neg \exists q \leq p \; q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$.

(b) $p \Vdash (\varphi \wedge \psi)(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$ *gdw.* $p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$ *und* $p \Vdash \psi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$.

(c) $p \Vdash (\varphi \vee \psi)(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$ *gdw.* $\{q \in P \,|\, q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1}) \;\vee\; q \Vdash \psi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})\}$ *dicht in P unter p ist.*

(d) $p \Vdash \forall v_0 \varphi(v_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})$ *gdw.* $\forall \dot{x}_0 \in M \; p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$

(e) $p \Vdash \exists v_0 \, \varphi(v, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})$ *gdw.* $\{q \in P \,|\, \exists \dot{x}_0 \in M \; q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})\}$ *dicht in P unter p ist.*

(f) $p \Vdash \forall v_0 \, (v_0 \in \dot{x} \;\to\; \varphi(v, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1}))$ *gdw.* $\forall (\dot{x}_0, s) \in \dot{x} \; \{q \in P | q \leq s \to q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1}))\}$ *dicht in P unter p ist.*

(g) $p \Vdash \exists v_0 \, (v_0 \in \dot{x} \wedge \varphi(v, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1}))$ *gdw.* $\{q \in P \,|\, \exists (\dot{x}_0, s) \in \dot{x} \; (q \leq s \wedge q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1}))\}$ *dicht in P unter p ist.*

Beweis. Die Aussagen (a),(b) und (d) waren in 16.6 gezeigt.
(c) Angenommen $p \Vdash (\varphi \vee \psi)$. Betrachte $r \leq p$. Wähle einen P-generischen Filter G über M mit $r \in G$. Dann gilt $M[G] \models (\varphi \vee \psi)$. Falls $M[G] \models \varphi$, wähle ein $s \in G$ mit $s \Vdash \varphi$. Wähle ein $q \leq r, s$. Dann gilt $q \Vdash \varphi$. Ähnlich verfährt man, falls $M[G] \models \psi$. Damit ist die gewünschte Dichtheit gezeigt.
Umgekehrt sei die Menge $D :\equiv \{q \in P \,|\, q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1}) \;\vee\; q \Vdash \psi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})\}$ dicht in P unter p. Betrachte einen P-generischen Filter G über M mit $p \in G$. Da G generisch ist, kann man $q \in G \cap D$, $q \leq p$ wählen. Dann ist $q \Vdash \varphi$ oder $q \Vdash \psi$, $M[G] \models \varphi$ oder $M[G] \models \psi$. Also $M[G] \models (\varphi \vee \psi)$.
(e) Angenommen $p \Vdash \exists v_0 \, \varphi(v, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Betrachte $r \leq p$. Wähle einen P-generischen Filter G über M mit $r \in G$. Dann gilt $M[G] \models \exists v_0 \, \varphi(v, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$. Wähle ein $\dot{x}_0 \in M$ mit $M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$. Wähle ein $s \in G$ mit $s \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Wähle ein $q \leq r, s$. Dann gilt $q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Damit ist die gewünschte Dichtheit bewiesen.
Umgekehrt sei die Menge $D :\equiv \{q \in P \,|\, \exists \dot{x}_0 \in M \; q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})\}$ dicht in P unter p. Betrachte einen P-generischen Filter G über M mit $p \in G$. Da G generisch ist, kann man $q \in G \cap D$, $q \leq p$ wählen. Wähle $\dot{x}_0 \in M$ mit $q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Dann gilt $M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$ und $M[G] \models \exists v_0 \, \varphi(v_0, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$.
(f) Angenommen, $p \Vdash \forall v_0 \, (v_0 \in \dot{x} \to \varphi(v, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1}))$. Betrachte $(\dot{x}_0, s) \in \dot{x}$. Setze $D :\equiv \{q \in P | q \leq s \to q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1}))\}$. Um die Dichtheit von D unter p zu zeigen, betrachte weiter $r \leq p$. Wenn $\neg r \leq s$, so ist bereits $r \in D$. Es sei also angenommen,

dass $r \leq s$. Wähle einen P-generischen Filter G über P mit $r \in G$. Dann ist $p \in G$ und $M[G] \models \forall v_0 \, (v_0 \in \dot{x}^G \to \varphi(v, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G))$. Weiter ist $s \in G$ und $\dot{x}_0^G \in \dot{x}^G$. Also $M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G))$. Wähle $t \in G$ mit $t \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1}))$. Wähle $q \leq r, t$. Dann ist $q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1}))$ und $q \in D$.
Umgekehrt sei $\forall (\dot{x}_0, s) \in \dot{x} \; \{q \in P | q \leq s \to q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1}))\}$ dicht in P unter p. Betrachte einen P-generischen Filter G über M mit $p \in G$. Betrachte ein $z \in \dot{x}^G$. Nach Definition der Interpretationsfunktion gibt es $(\dot{x}_0, s) \in \dot{x}$ mit $s \in G$ und $\dot{x}_0^G = z$. Setze $D :\equiv \{q \in P | q \leq s \to q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1}))\}$. Wähle ein $t \in G$ mit $t \leq s, p$. Nach Voraussetzung ist D dicht in P unter p und daher dicht in P unter $t \in G$. Mit der Generizität von G wähle $q \in G \cap D$, $q \leq t$. Dann ist $q \leq s$ und nach Definition von D ist $q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1}))$. $M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G))$ und $M[G] \models \varphi(z, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G))$. Da z beliebiges Element von $\dot{x}^G$ war, gilt $M[G] \models \forall v_0 \in \dot{x}\varphi(v_0, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G))$. Also $p \Vdash \forall v_0 \, (v_0 \in \dot{x} \to \varphi(v, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1}))$.
(g) Angenommen $p \Vdash \exists v_0 \, (v_0 \in \dot{x} \wedge \varphi(v, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1}))$. Betrachte $r \leq p$. Wähle einen P-generischen Filter G über M mit $r \in G$. Dann gilt $M[G] \models \exists v_0 \, (v_0 \in \dot{x}^G \wedge \varphi(v, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G))$. Wähle ein $y \in \dot{x}^G$ mit $M[G] \models \varphi(y, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$. Nach Definition der Interpretation $\dot{x}^G$ von $\dot{x}$ können wir $(\dot{x}_0, s) \in \dot{x}$ wählen mit $s \in G$ und $\dot{x}_0^G = y$. Dann ist $M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$. Wähle $t \in G$ mit $t \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1})$. Wähle $q \leq r, s, t$. Dann zeigt q die gewünschte Dichtheit.
Umgekehrt sei die Menge $D :\equiv \{q \in P \,|\, \exists (\dot{x}_0, s) \in \dot{x} \; (q \leq s \wedge q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1}))\}$ dicht in P unter p. Betrachte einen P-generischen Filter G über M mit $p \in G$. Da G generisch ist, kann man $q \in G \cap D$, $q \leq p$ wählen. Wähle $(\dot{x}_0, s) \in \dot{x}$ mit $q \leq s \wedge q \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{m-1}))$. Dann gilt $\dot{x}_0^G \in \dot{x}^G$. Weiter gilt $M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$. Also $M[G] \models \exists v_0 \, (v_0 \in \dot{x}^G \wedge \varphi(v_0, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{m-1}^G)$. QED

Bemerkung 16.13 Die umständlichen Formeln für das Erzwingen der atomaren Formeln $x_0 = x_1$ bzw. $x_0 \in x_1$ lassen sich durch die Fälle (f) und (g) des gerade bewiesenen Satzes erklären: beachte, dass $x_0 = x_1 \leftrightarrow \forall y_0 \in x_0 \exists y_1 \in x_1 \; y_0 = y_1 \wedge \forall y_1 \in x_1 \exists y_0 \in x_0 \; y_0 = y_1$ bzw. $x_0 \in x_1 \leftrightarrow \exists y_1 \in x_1 x_0 = y_1$.

17 ZFC in $M[G]$.

Durch die im Grundmodell M definierbare Forcing-Relation haben wir uns nun die Möglichkeit verschafft, Namen für die Mengenexistenzen in den komplizierteren Zermelo-Fraenkelschen Axiomen zu konstruieren.

Satz 17.1 *Es gilt* $(\mathbf{Aus})^{M[G]}$.

BEWEIS. Sei $\varphi(v, \vec{w})$ eine $\in$-Formel und seien $y, \vec{z} \in M[G]$. Nach 11.4 haben wir zu zeigen:

(1) $\quad \{v \in y \mid \varphi(v, \vec{z})^{M[G]}\} \in M[G]$.

Beweis. Wähle Namen $\dot{y}, \vec{\dot{z}} \in M$ mit $y = \dot{y}^G$ und $\vec{z} = \vec{\dot{z}^G}$ und setze

$$t :\equiv \{(\dot{x}, p) \mid \dot{x} \in \mathrm{dom}(\dot{y}) \wedge p \in P \wedge p \Vdash (\dot{x} \in \dot{y} \wedge \varphi(\dot{x}, \vec{\dot{z}}))\}.$$

Es gilt $t \in M$, da die Forcing-Relation in M definierbar ist und M insbesondere das Aussonderungsschema erfüllt. (1) folgt nun sofort aus

(1.1) $t^G = \{v \in \dot{y}^G \mid \varphi(v, \vec{\dot{z}^G})^{M[G]}\}$.

Beweis. zu „$\subseteq$". Sei $v \in t^G$. Nach Definition von $M[G]$ gilt dann $v = \dot{x}^G$, wobei $(\dot{x}, p) \in t$ für ein $p \in G$. Aus $(\dot{x}, p) \in t$ folgt $p \Vdash (\dot{x} \in \dot{y} \wedge \varphi(\dot{x}, \vec{\dot{z}}))$, was wegen $p \in G$ nach dem Forcing-Theorem auf $(\dot{x}^G \in \dot{y}^G \wedge \varphi(\dot{x}^G, \vec{\dot{z}^G}))^{M[G]}$, also $\dot{x}^G \in \dot{y}^G \wedge \varphi(\dot{x}^G, \vec{\dot{z}^G})^{M[G]}$ führt. Wegen $v = \dot{x}^G$ bedeutet dies gerade, daß v Element der Menge auf der rechten Seite von (1.1) ist.
zu „$\supseteq$". Es gelte $v \in \dot{y}^G \wedge \varphi(v, \vec{\dot{z}^G})^{M[G]}$. Wegen $v \in \dot{y}^G$ existiert nach Definition von $\dot{y}^G$ ein $(\dot{x}, q) \in \dot{y}$ mit $q \in G$, so daß $v = \dot{x}^G$ ist. Nach 16.5 gilt

$(*)$ $\quad q \Vdash \dot{x} \in \dot{y}$.

Wegen $\varphi(\dot{x}^G \vec{\dot{z}^G})^{M[G]}$ existiert nach dem Forcing-Theorem ein $r \in G$ mit

$(**)$ $\quad r \Vdash \varphi(\dot{x}, \vec{\dot{z}})$.

Sei $p \in G$ eine gemeinsame Verstärkung von q, r. Dann gelten $(*)$ und $(**)$, wenn man q bzw. r durch p ersetzt, so daß $(\dot{x}, p) \in t$ ist. Wegen $p \in G$ ist dann $v = \dot{x}^G \in t^G$. qed(1.1)

Damit ist (1) bewiesen. qed(1)

Aus (1) ergibt sich $(\mathbf{Aus})^{M[G]}$. QED

Satz 17.2 *Es gilt* $(\mathbf{Pot})^{M[G]}$.

Beweis. Sei $a \in M[G]$, etwa $a = \dot{a}^G$ mit $\dot{a} \in M$. Nach 11.4 ist $\mathcal{P}(a) \cap M[G] \in M[G]$ zu zeigen. Setze

$$s :\equiv \{\dot{y} \in M \mid \dot{y} \subseteq \mathrm{dom}(\dot{a}) \times P\}.$$

Wegen $(\mathbf{Pot})^M$ und $\mathrm{dom}(\dot{a}) \times P \in M$ ist $s \in M$. s ist die Menge von kanonischen Namen für Teilmengen von a. Wir setzen $t :\equiv \{(\dot{y}, 1_P) \mid \dot{y} \in s\}$. Wegen $s \in M$ und $(\mathbf{Ers})^M$ ist $t \in M$: $t = \{z \in M \mid \exists \dot{y} \in s\ (z = (\dot{y}, 1_P))^M\}$.

(1) $\quad \mathcal{P}(a) \cap M[G] \subseteq t^G$.

Beweis. Sei $z \subseteq a$, $z \in M[G]$. Sei $\dot{z} \in M$ mit $\dot{z}^G = z$. Wir definieren einen „kanonischen Namen" für z durch $\dot{y} :\equiv \{(\dot{x}, p) \in \mathrm{dom}(\dot{a}) \times P \mid p \Vdash (\dot{x} \in \dot{z})\}$. Wegen $\mathrm{dom}(\dot{a}) \times P \in M$ und $(\mathbf{Aus})^M$ ist $\dot{y} \in M$. Folglich ist $\dot{y} \in s$ und somit $(\dot{y}, 1_P) \in t$, was

(1.1) $\quad \dot{y}^G \in t^G$

impliziert. Es verbleibt zu zeigen, daß $\dot{y}$ tatsächlich ein Name für z ist, daß also gilt

(1.2) $\quad \dot{z}^G = \dot{y}^G$.

Beweis von (1.2). zu „$\subseteq$". Sei $x \in \dot{z}^G$. Wegen $\dot{z}^G \subseteq a = \dot{a}^G$ ist dann auch $x \in \dot{a}^G$, so daß nach Definition von $\dot{a}^G$ ein Paar $(\dot{x}, q) \in \mathrm{dom}(\dot{a}) \times P$ mit $q \in G$ existiert, so daß $x = \dot{x}^G$ gilt. Wir haben dann $\dot{x}^G \in \dot{z}^G$, was auf $(\dot{x}^G \in \dot{z}^G)^{M[G]}$ führt. Nach dem Forcing-Theorem existiert ein $p \in G$ mit $p \Vdash (\dot{x} \in \dot{z})$. Dann ist $(\dot{x}, p) \in \dot{y}$. Wegen $p \in G$ folgt hieraus $\dot{x}^G \in \dot{y}^G$, was $x \in \dot{y}^G$ bedeutet. Dies war zu zeigen.
zu „$\supseteq$". Sei $x \in \dot{y}^G$. Dann existiert nach Definition von $\dot{y}^G$ und $\dot{y}$ ein Paar $(\dot{x}, p) \in \mathrm{dom}(\dot{a}) \times P$ mit $p \Vdash (\dot{x} \in \dot{z})$ und $p \in G$, so daß $x = \dot{x}^G$ ist. Aus $p \Vdash (\dot{x} \in \dot{z})$ folgt $(\dot{x}^G \in \dot{z}^G)^{M[G]}$ nach dem Forcing-Theorem. Letzteres ist mit $\dot{x}^G \in \dot{z}^G$, also $x \in \dot{z}^G$ gleichwertig. Dies war zu zeigen. qed(1.2)

Aus (1.1) und (1.2) folgt sofort $z \in t^G$; dies war zu zeigen. qed(1)

Da $z \subseteq a$ eine Σ_0-Formel ist, folgt aus (1): $\mathcal{P}(a) \cap M[G] = \{z \in t^G \mid z \subseteq a\} = \{z \in t^G \mid (z \subseteq a)^{M[G]}\}$. Wegen $(\mathbf{Aus})^{M[G]}$ ist die rechts stehende Klasse ein Element von $M[G]$. Dies war zu zeigen. QED

Satz 17.3 *Es gilt* $(\mathbf{Ers})^{M[G]}$.

Beweis. Sei $\varphi(u, v, \vec{w})$ eine $\in$-Formel. Seien $a, \vec{z} \in M[G]$, so daß

$(*) \qquad \forall x, y, y' \in M[G]\ ((\varphi(x, y, \vec{z})^{M[G]} \wedge \varphi(x, y', \vec{z})^{M[G]}) \longrightarrow y = y')$

gilt. Es ist zu zeigen, daß $s :\equiv \{y \in M[G] \mid \exists x \in a\ \varphi(x, y, \vec{z})^{M[G]}\} \in M[G]$ ist. Wegen $(\mathbf{Aus})^{M[G]}$ genügt es, ein $t \in M$ zu finden, so daß $s \subseteq t^G$ gilt. Sei $a = \dot{a}^G$, $\vec{z} = \vec{\dot{z}}^G$. Wähle mit Hilfe des Ersetzungsaxioms in M ein $S \in M$, so daß für alle $\dot{x} \in \mathrm{dom}(\dot{a})$ gilt

(1) $\qquad \forall p \in P\ \Big((\exists \dot{y} \in M\ p \Vdash \varphi(\dot{x}, \dot{y}, \vec{\dot{z}})) \longrightarrow \exists \dot{y} \in S\ p \Vdash \varphi(\dot{x}, \dot{y}, \vec{\dot{z}})\Big)$.

Sei nun $t :\equiv \{(r, 1) \mid r \in S\}$. Mit den üblichen Argumenten folgt $t \in M$. Wir zeigen $s \subseteq t^G$. Hierzu sei $y \in s$. Dann existiert ein $x \in a$ mit

(2) $\qquad \varphi(x, y, \vec{z})^{M[G]}$.

Wegen $x \in a = \dot{a}^G$ existiert ein Paar $(\dot{x}, q) \in \dot{a}$ mit $q \in G$, so daß $x = \dot{x}^G$ ist. Sei $\dot{y} \in M$ mit $y = \dot{y}^G$. (2) bedeutet dann

(3) $\qquad \varphi(\dot{x}^G, \dot{y}^G, \vec{\dot{z}}^G)^{M[G]}$.

Nach dem Forcing-Theorem existiert ein $p \in G$ mit $p \Vdash \varphi(\dot{x}, \dot{y}, \vec{\dot{z}})$. Nach (1) existiert ein $\dot{y}' \in S$ mit $p \Vdash \varphi(\dot{x}, \dot{y}', \vec{\dot{z}})$. Wegen $p \in G$ impliziert das Forcing-Theorem

$$\varphi(\dot{x}^G, \dot{y}^G, \vec{\dot{z}}^G)^{M[G]} \wedge \varphi(\dot{x}^G, \dot{y}'^G, \vec{\dot{z}}^G)^{M[G]},$$

was nach $(*)$ $\dot{y}^G = \dot{y}'^G$ impliziert. Da aus $\dot{y}' \in S$ folgt $\dot{y}'^G \in t^G$, haben wir $y = \dot{y}^G = \dot{y}'^G \in t^G$ nachgewiesen. Dies war zu zeigen. QED

Satz 17.4 *Es gilt* $\mathbf{ZF}^{M[G]}$.

Satz 17.5 *Sei* N *ein transitives* **ZF** *-Obermodell von* M*, das* G *als Element enthält; d.h.,* N *ist ein transitiver Term mit* $\mathbf{ZF}^N$*,* $M \subseteq N$ *und* $G \in N$*. Dann gilt*
(a) $(\dot{x}^G)^N = \dot{x}^G \in N$ *für alle* $\dot{x} \in M$.
(b) Definiert man $\mathrm{int}_G\colon M \to V$ *durch* $\mathrm{int}_G(\dot{y}) :\equiv \dot{y}^G$*, so ist* $\mathrm{int}_G \restriction x \in N$ *für alle* $x \in M$.

Beweis. zu (a). Wir zeigen dies durch eine Induktion über die Relation R aus **??**. Sei $\dot{x} \in M$ und für alle $\dot{y}R\dot{x}$ sei $(\dot{y}^G)^N = \dot{y}^G \in N$ gezeigt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\dot{x}^G &= \{z \mid \exists p \in G\, \exists \dot{y}\, ((\dot{y}, p) \in \dot{x} \wedge z = \dot{y}^G)\} \\
&= \bigcup \Big\{ \{z \mid \exists p \in G\, \exists \dot{y}\, ((\dot{y}, p) = w \wedge z = \dot{y}^G)\} \;\Big|\; w \in \dot{x} \Big\} \\
&= \bigcup \Big\{ \{z \in N \mid \exists p \in G\, \exists \dot{y} \in N\, ((\dot{y}, p) = w \wedge z = (\dot{y}^G)^N)\} \;\Big|\; w \in \dot{x} \Big\} \quad \text{(nach Ind.Vor.)} \\
&= \bigcup \Big\{ \underbrace{\{z \in N \mid \exists p \in G\, (\exists \dot{y}\, ((\dot{y}, p) = w \wedge z = \dot{y}^G))^N\}}_{\in N \text{ wegen } (\mathbf{Ers})^N \text{ und } G \in N} \;\Big|\; w \in \dot{x} \Big\} \\
&= \bigcup \Big\{ v \in N \;\Big|\; \exists w \in \dot{x}\; v = \{z \in N \mid \exists p \in G\, (\exists \dot{y}\, ((\dot{y}, p) = w \wedge z = \dot{y}^G))^N\} \Big\} \\
&= \bigcup \underbrace{\Big\{ v \in N \;\Big|\; \exists w \in \dot{x}\, (v = \{z \mid \exists p \in G\, \exists \dot{y}\, ((\dot{y}, p) = w \wedge z = \dot{y}^G)\})^N \Big\}}_{\in N \text{wegen } (\mathbf{Ers})^N} \\
&\in N, \quad \text{wegen } (\textstyle\bigcup\text{-}\mathbf{Ax})^N.
\end{aligned}$$

$(\dot{x}^G)^N = \dot{x}^G$ beweist man nun genau wie $(\dot{x}^G)^{M[G]} = \dot{x}^G$ im Beweis von **??**.
zu (b). Sei $x \in M$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{int}_G \restriction x &= \{u \in N \mid \exists \dot{y} \in x\, \exists z \in N\, (z = \dot{y}^G \wedge u = (y, z))\} \quad (\text{wegen } \dot{y}^G \in N \text{ und } (\mathbf{Paar})^N) \\
&= \{u \in N \mid \exists \dot{y} \in x\, (\exists z\, (z = \dot{y}^G \wedge u = (y, z)))^N\} \quad (\text{wegen (a)}) \\
&\in N, \quad \text{wegen } (\mathbf{Ers})^N.
\end{aligned}$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. QED

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir:

Corollar 17.6 $M[G]$ *ist das* $\subseteq$*-kleinste transitive Modell* N *von* **ZF** *mit* $M \subseteq N$ *und* $G \in N$.

Beweis. Nach Teil (a) des Satzes ist für jedes solche N $\dot{x}^G \in N$ für alle $\dot{x} \in M$, also $M[G] \subseteq N$. Wegen $\mathbf{ZF}^{M[G]}$ ist also $M[G]$ das $\subseteq$-kleinste transitive **ZF**-Modell, das M erweitert und G als Element enthält. QED

Mit Hilfe von 17.5 zeigen wir außerdem, daß das Auswahlaxiom in $M[G]$ gilt.

Lemma 17.7 *Es gilt* $(\mathbf{AC})^{M[G]}$.

Beweis. Da bereits $\mathbf{ZF}^{M[G]}$ nachgewiesen ist, genügt es, eine unter **ZF** zu **(AC)** äquivalente Aussage zu beweisen. Hierzu zeigen wir zunächst

(1) $\mathbf{ZF} \vdash (\mathbf{AC}) \longleftrightarrow \forall x\, \exists x'\, \exists \beta \in \mathrm{On}\ \exists f\ (x' \supseteq x \ \wedge\ f\colon \beta \xrightarrow{surj.} x')$.

Beweis. Nach 6.1 gilt:

$(*)$ $\mathbf{ZF} \vdash (\mathbf{AC}) \longleftrightarrow \forall x\, \exists \beta \in \mathrm{On}\ \exists f\ f\colon \beta \xrightarrow{bij.} x$.

Hieraus folgt sofort „$\Rightarrow$“.

zu „$\Leftarrow$“. Sei $x' \supseteq x$ und $f\colon \beta \xrightarrow{surj.} x'$. Setze $u :\equiv \{\min f^{-1}[\{y\}] \mid y \in x\}$. Dann ist $u \subseteq \beta$ und $g :\equiv f \restriction u$ ist eine Bijektion $g\colon u \xrightarrow{bij.} x$. Sei γ der Mostowski-Kollaps von $(u, <)$ und $\pi\colon \gamma \xrightarrow{bij.} u$ die Inverse des Mostowski-Isomorphismus' von $(u, <)$. Dann ist $g \circ \pi\colon \gamma \xrightarrow{bij.} x$. Also ist die rechte Seite von $(*)$ erfüllt. qed(1)

$(\mathbf{AC})^{M[G]}$ ist also gezeigt, wenn wir verifizieren:

(2) $(\forall x\, \exists x'\, \exists \beta \in \mathrm{On}\ \exists f\ (x' \supseteq x \ \wedge\ f\colon \beta \xrightarrow{surj.} x'))^{M[G]}$.

Beweis. Die zu zeigende Behauptung ist wegen $\mathrm{On}^{M[G]} = \mathrm{On}^M = \mathrm{On} \cap M$ (siehe 15.12) und der $M[G]$-V-Absolutheit von $x \subseteq x'$ und $f\colon \beta \xrightarrow{surj.} x'$ (siehe **??**) gleichwertig mit

$$\forall x \in M[G]\, \exists x' \in M[G]\, \exists \beta \in \mathrm{On} \cap M\ \exists f \in M[G]\ (x' \supseteq x \ \wedge\ f\colon \beta \xrightarrow{surj.} x').$$

Sei also $x \in M[G]$. Sei $\dot{x} \in M$ mit $x = \dot{x}^G$. Da $\mathbf{ZFC}^M$ gilt, folgt aus $(*)$: $(\exists g\, \exists \beta \in \mathrm{On}\, g\colon \beta \xrightarrow{bij.} \mathrm{dom}(\dot{x}))^M$. Wegen $(g\colon \beta \xrightarrow{bij.} \mathrm{dom}(\dot{x}))^M \iff g\colon \beta \xrightarrow{bij.} \mathrm{dom}(\dot{x})$ bedeutet dies $\exists g \in M\, \exists \beta \in \mathrm{On} \cap M\ g\colon \beta \xrightarrow{bij.} \mathrm{dom}(\dot{x})$. Sei also $\beta \in \mathrm{On} \cap M$ und $g \in M$ mit $g\colon \beta \xrightarrow{bij.} \mathrm{dom}(\dot{x})$. Nach 17.5 ist $h :\equiv \mathrm{int}_G \restriction \mathrm{dom}(\dot{x}) \in M[G]$. Also ist $x' :\equiv \mathrm{ran}(h) \in M[G]$; nach Definition von $\dot{x}^G$ ist $\dot{x}^G \subseteq x'$. Sei $f :\equiv h \circ g$. Es ist $\mathrm{ran}(f) = \mathrm{ran}(h) = x'$. Es verbleibt also, $f \in M[G]$ zu zeigen. Hierzu:

$$\begin{aligned} h \circ g &= \{z \in \mathrm{dom}(g) \times \mathrm{ran}(h) \mid \exists u, v, w\, ((u, v) \in g \ \wedge\ (v, w) \in h \ \wedge\ z = (u, w))\} \\ &= \{z \in \mathrm{dom}(g) \times \mathrm{ran}(h) \mid \exists u, v, w \in M[G]\ ((u, v) \in g \ \wedge\ (v, w) \in h \ \wedge\ z = (u, w))\} \\ &\quad \text{(wegen } g, h \in M[G]) \\ &= \{z \in \mathrm{dom}(g) \times \mathrm{ran}(h) \mid (\exists u, v, w\, ((u, v) \in g \ \wedge\ (v, w) \in h \ \wedge\ z = (u, w)))^{M[G]}\} \in M[G] \\ &\quad \text{(wegen } (\mathbf{Aus})^{M[G]}). \end{aligned}$$

x', β und f sind also wie benötigt. qed(2)

Damit ist das Lemma bewiesen. QED

Aus 17.6 und 17.7 folgt sofort:

Satz 17.8 $M[G]$ *ist ein abzählbares, transitives Modell von* **ZFC**. *Es ist das* $\subseteq$*-kleinste transitive* **ZFC**-*Obermodell von* M, *das* G *als Element enthält.*

18 Ein Modell für die Kontinuums-Hypothese

Zu Beginn der Entwicklung der Mengenlehre zeigte Georg Cantor, dass die Menge der reellen Zahlen überabzählbar ist (Satz 1.1). Ihre Kardinalität lässt sich kardinalzahlarithmetisch ausdrücken als

$$\overline{\overline{\mathbb{R}}} = 2^{\aleph_0}.$$

Cantor vermutete, dass die Kardinalität der Menge der reellen Zahlen die kleinste überabzählbare Kardinalzahl ist, d.h. dass $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = \aleph_1$. Wir wollen in diesem Kapitel durch Forcing ein Modell der Mengenlehre konstruieren, in dem diese Kontinuumshypothese, abgekürzt **CH**gilt.
Als Forcing-Halbordnung wird die Menge aller abzählbaren Approximationen an eine Surjektion von $\aleph_1$ auf $\mathcal{P}(\omega)$ verwendet. In der generischen Erweiterung existiert dann eine solche Surjektion von der Zahl $\aleph_1$ *des Grundmodells* auf die Menge $\mathcal{P}(\omega)$ *des Grundmodells*. Es bleibt zu zeigen, dass in der betrachteten Situation $\aleph_1$ und $\mathcal{P}(\omega)$ zwischen Grundmodell und Erweiterung absolut sind.
Wir fixieren ein Grundmodell M. Definiere eine Forcing-Halbordnung $P = (P, \leq, 1_P)$ in M:
Es sei $P :\equiv \mathrm{Fn}(\aleph_1, \mathcal{P}(\omega), \aleph_1)^M = \{p \in M \mid p\colon \mathrm{dom}(p) \to \mathcal{P}(\omega) \wedge \overline{\overline{p}}^M < \aleph_1\}$ die Menge aller abzählbaren partiellen Funktionen von $\aleph_1$ in $\mathcal{P}(\omega)$, gebildet im Grundmodell M. Definiere die Halbordnung auf P durch: $p \leq q :\equiv p \supseteq q$, und $1_P :\equiv \emptyset$.
Sei G ein P-generischer Filter über M mit zugehöriger generischer Erweiterung $M[G]$. Wir wissen bereits, dass $M[G] \models$ **ZFC**, und wir wollen zeigen, dass $M[G] \models$ **CH**.

Lemma 18.1 $\exists f \in M[G]\ f\colon \aleph_1^M \xrightarrow{surj.} \mathcal{P}(\omega)^M$.

Beweis. Sei $f :\equiv \bigcup G$. Es ist $f \in M[G]$ wegen $(\bigcup\text{-}\mathbf{Ax})^{M[G]}$.

(1) $f\colon \aleph_1^M \to \mathcal{P}(\omega)^M$.

Beweis. Da die Elemente von G paarweise kompatible partielle Funktionen $p\colon \aleph_1^M \supset\!\!\to \mathcal{P}(\omega)^M$ sind, folgt $f\colon \aleph_1^M \supset\!\!\to \mathcal{P}(\omega)^M$. Um $\mathrm{dom}(f) = \aleph_1^M$ zu verifizieren, betrachte $\alpha < \aleph_1^M$; es ist $\alpha \in \mathrm{dom}(f)$ zu zeigen. Setze hierzu

$$D :\equiv \{p \in P \mid \alpha \in \mathrm{dom}(p)\}.$$

Wegen $D = \{p \in P \mid (\alpha \in \mathrm{dom}(p))^M\}$ ist $D \in M$ nach $(\mathbf{Aus})^M$. D ist dicht in P. Um dies zu sehen, fixiere $p \in P$. Ist $\alpha \in \mathrm{dom}(p)$, so ist $p \in D$ und wir sind fertig. Ist $\alpha \notin \mathrm{dom}(p)$, so setze $q :\equiv p \cup \{(\alpha, g)\}$, wobei $g \in ({}^{\omega}2)^M$ beliebig ist, etwa die Nullfunktion: $g(n) = 0$ für alle $n < \omega$. Offenbar ist $q \in P$ und $q \leq p$; ferner gilt $q \in D$. Also ist D Element von M und dicht in P. Da G generisch über M ist, existiert $p \in G \cap D$. Dann ist $p \subseteq f$ und es gilt $\alpha \in \mathrm{dom}(p) \subseteq \mathrm{dom}(f)$. Dies war zu zeigen. qed(1)

(2) $\mathrm{ran}(f) = \mathcal{P}(\omega)^M$.

Beweis. Sei $z \in \mathcal{P}(\omega)^M = \mathcal{P}(\omega) \cap M$. Es ist $z \in \operatorname{ran}(f)$ zu zeigen. Die Menge

$$D :\equiv \{p \in P \mid z \in \operatorname{ran}(p)\}$$

ist ein Element von M. Um zu sehen, daß D dicht in P ist, betrachte $p \in P$. Wegen $\overline{\overline{p}}^M < \aleph_1^M$ kann p nicht jedem $\alpha < \aleph_1^M$ einen Wert zuweisen. Also existiert $\alpha < \aleph_1^M$ mit $\alpha \notin \operatorname{dom}(p)$. Sei $q :\equiv p \cup \{(\alpha, z)\}$. Dann gilt $q\colon \aleph_1^M \supset\!\!\to \mathcal{P}(\omega)^M$, $\overline{\overline{q}}^M < \aleph_1^M$ und $q \leq p$. Ferner ist $q \in D$. Also ist D in der Tat dicht in P. Da G ein P-generischer Filter über M ist, existiert $p \in G \cap D$. Dann ist $p \subseteq f$ und es gilt $z \in \operatorname{ran}(p) \subseteq \operatorname{ran}(f)$. Dies war zu zeigen. qed(2)

Für den Absolutheitsbeweis von $\aleph_1$ und $\mathcal{P}(\omega)$ zwischen M und $M[G]$ brauchen wir einige Vorbereitungen:

Definition 18.2 Sei $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung. P ist $\aleph_1$**-abgeschlossen** oder **abzählbar abgeschlossen** $:\equiv \forall \lambda < \aleph_1\ \forall p \in {}^{\lambda}P\ \exists q \in P\ \Big(\forall i, j \in \lambda\ (i < j \to p(j) \leq p(i)) \longrightarrow \forall i < \lambda\ q \leq p(i)\Big)$.

Bemerkung 18.3 P ist also genau dann abzählbar abgeschlossen, wenn jede abzählbare absteigende $\leq$-Kette in P eine untere Schranke in P hat.

Die oben definierte Forcing-Halbordnung$(P, \leq, 1_P)$ ist, im Grundmodell M, abzählbar abgeschlossen, denn die Vereinigung einer abzählbaren Menge paarweise kompatibler Funktionen aus P ist wieder ein Element von P und eine gemeinsame untere Schranke der Menge.
Es gilt nun der folgende wichtige Erhaltungssatz:

Lemma 18.4 *Für $a, b \in M$ mit $\overline{\overline{a}}^M < \aleph_1^M$ und $h \in M[G]$ mit $h\colon a \to b$ ist $h \in M$.*

Beweis. Es genügt, den Spezialfall $a = \omega$ zu betrachten. Wähle einen Namen $\dot{h} \in M$ mit $\dot{h}^G = h$. $M[G] \models \dot{h}^G : \check{\omega}^G \to b = \check{b}^G$. Wähle eine Bedingung $p \in G$ mit $p \Vdash \dot{h} : \check{\omega} \to \check{b}$. Wir arbeiten mit einem Dichtheitsargument:

(1) Die Menge $D :\equiv \{q \mid \exists f \in M\ q \Vdash \dot{h} = \check{f}\}$ ist dicht in P unter p.

Beweis. Betrachte $r \leq p$. Arbeite in M und definiere eine Funktion $f : \omega \to b$ und eine Folge $(r_i \mid i < \omega)$ von Bedingungen durch eine gemeinsame Rekursion: Für alle $n < \omega$ gilt $r \Vdash \exists z \in \check{b}\ \dot{h}(\check{n}) = z$. Nach dem Satz über das Erzwingen von beschränkt quantifizieren Formeln können wir ein $r_0 \leq r$ und ein $f(0) \in b$ wählen mit $r_0 \Vdash \dot{h}(\check{0}) = (f(0))\check{}$. Rekursiv wähle entsprechend $r_{n+1} \leq r_n$ und $f(n{+}1) \in b$ mit $r_{n+1} \Vdash \dot{h}((n{+}1)\check{}) = (f(n{+}1))\check{}$. Dann ist $(r_n | n < \omega)$ eine absteigende ω-Folge in P, und wegen der abzählbaren Abgeschlossenheit von P gibt es ein $q \in P$ mit $\forall n\ q \leq r_n$. $q \Vdash \dot{h} : \check{\omega} \to \check{b}$ und für alle $n < \omega$, $q \Vdash \dot{h}(\check{n}) = (f(n))\check{} = \check{f}(\check{n})$. $q \Vdash \forall m \in \check{\omega}\ \dot{h}(\check{m}) = \check{f}(m)$ und $q \Vdash \dot{h} = \check{f}$. qed(1)

Da G generisch ist und $p \in G$, gibt es ein $q \in G \cap D$. Wähle $f \in M$ mit $q \Vdash \dot{h} = \check{f}$. Dann ist $h = \dot{h}^G = \check{f}^G = f \in M$. QED

Lemma 18.5 $\aleph_1^M = \aleph_1^{M[G]}$.

BEWEIS. Wir zeigen, dass $\aleph_1^M$ eine Kardinalzahl in $M[G]$ ist. Falls nicht, so gibt es eine Ordinalzahl $\alpha < \aleph_1^M$ und eine Bijektion $h : \alpha \leftrightarrow \aleph_1^M$, $h \in M[G]$. Nach dem vorangehenden Lemma ist $h \in M$, und wir haben: $M \models h : \alpha \leftrightarrow \aleph_1^M$. Daraus würde folgen $M \models \aleph_1^M$ ist keine Kardinalzahl, Widerspruch. QED

Lemma 18.6 $\mathcal{P}(\omega)^M = \mathcal{P}(\omega)^{M[G]}$.

BEWEIS. Betrachte $x \subseteq \omega$, $x \in M[G]$. Es genügt zu zeigen, dass $x \in M$. Sei $h : \omega \to \{0, 1\}$ die charakteristische Funktion von x: $h(n) = 1$ gdw. $n \in x$. Wegen der Absolutheit der Definition ist $h \in M[G]$. Nach dem obigen Lemma ist $h \in M$. Dann aber ist $x = h^{-1}[1] \in M$. QED

Zusammen erhalten wir: $f\colon \aleph_1^M \xrightarrow{surj.} \mathcal{P}(\omega)^M$. QED

Das Lemma besagt aber gerade, dass in $M[G]$ die Cantorsche Kontinuumshypothese erfüllt ist.
Wir haben gezeigt, dass man aus jedem Grundmodell ein Modell von **ZFC**+**CH** konstruieren kann:

Satz 18.7 (Gödel) *Wenn* **ZFC** *konsistent ist, so ist auch das System* **ZFC** + **CH** *konsistent*

Wir müssen jetzt noch eine Analyse der Verwendung von Grundmodellen anschließen.

19 Ein Modell für $\neg$CH

In diesem Kapitel definieren wir generische Erweiterungen, in denen die Cantorsche Kontinuumshypothese verletzt ist. Durch eine geeignete Forcing-Halbordnung werden zu einem Grundmodell viele reelle Zahlen adjungiert, ohne die Kardinalzahlstruktur des Grundmodells zu verändern. Unter einer reellen Zahl verstehen wir hier eine Funktion $c\colon \omega \to 2$.
Sei also M ein Grundmodell und $\kappa \in \mathrm{Card}^M$. Definiere die Forcing-Halbordnung $(P, \leq, 1_P)$ durch:

$$P = \mathrm{Fn}(\kappa \times \omega, 2, \aleph_0) = \{p \,|\, p\colon \mathrm{dom}(p) \to 2,\ \mathrm{dom}(p) \subseteq \kappa \times \omega,\ \overline{\overline{p}} < \aleph_0\};$$

Wie zuvor definiere die Halbordnung auf P durch: $p \leq q :\equiv p \supseteq q$, und $1_P :\equiv \emptyset$.
Sei G ein P-generischer Filter über M mit zugehöriger generischer Erweiterung $M[G]$. Wir wissen bereits, dass $M[G] \models$ **ZFC**, und wir wollen zeigen, dass $M[G] \models \neg$**CH**. Wir

zeigen zunächst, dass es in M[G]κ paarweise verschiedene reelle Zahlen gibt. Arbeiten in $M[G]$. Sei $f :\equiv \bigcup G$.

(1) $f\colon \kappa \times \omega \to 2$.

BEWEIS. Da die Elemente von G paarweise kompatible partielle Funktionen $p\colon \kappa\times\omega \supset\!\!\to 2$ sind, folgt $f\colon \kappa\times\omega \supset\!\!\to 2$. Um $\mathrm{dom}(f) = \kappa\times\omega$ zu verifizieren, fixiere $(\alpha, n) \in \kappa\times\omega$ beliebig. Wir arbeiten in V, um $(\alpha, n) \in \mathrm{dom}(f)$ zu beweisen. Die Menge

$$D :\equiv \{p \in P \mid (\alpha, n) \in \mathrm{dom}(p)\}$$

ist wegen $(\alpha, n) \in \mathrm{dom}(p) \iff ((\alpha, n) \in \mathrm{dom}(p))^M$ nach $(\mathbf{Aus})^M$ ein Element von M. D ist dicht in P. Um dies zu sehen, sei $p \in P$ beliebig. Ist $(\alpha, n) \in \mathrm{dom}(p)$, so sind wir fertig. Ist $(\alpha, n) \notin \mathrm{dom}(p)$, so setzte $q :\equiv p \cup \{((\alpha, n), 0)\}$. Dann gilt $q \in P$ und $q \leq p$. Ferner ist $q \in D$. Also ist D dicht in P. Sei $p \in G \cap D$. Dann ist $p \subseteq f$ und es folgt $(\alpha, n) \in \mathrm{dom}(p) \subseteq \mathrm{dom}(f)$. Wegen der Absolutheit der Formel $(\alpha, n) \in \mathrm{dom}(f)$ folgt $((\alpha, n) \in \mathrm{dom}(f))^{M[G]}$; dies war zu zeigen. qed(1)

Für $\alpha < \kappa$ definiere

$$c_\alpha :\equiv (f(\alpha, n) \mid n < \omega).$$

Nach (1) ist $c_\alpha \in {}^{\omega}2$. Diese COHEN-Zahlen sind paarweise verschieden:

(2) $\forall \alpha < \beta < \kappa\ \exists n < \omega\ c_\alpha(n) \neq c_\beta(n)$.

BEWEIS. Es ist die Existenz eines $n < \omega$ zu zeigen, so daß $f(\alpha, n) \neq f(\beta, n)$ ist. Hierzu arbeiten wir in V. Sei

$$D :\equiv \left\{p \in P \;\middle|\; \exists n < \omega\ ((\alpha, n) \in \mathrm{dom}(p)\ \wedge\ (\beta, n) \in \mathrm{dom}(p)\ \wedge\ p(\alpha, n) \neq p(\beta, n))\right\}.$$

Man sieht leicht, daß die definierende Formel von D ohne Veränderung der Aussage auf M relativiert werden kann; z.B. gilt im Fall (α, n), $(\beta, n) \in \mathrm{dom}(p)$:

$$\begin{aligned}(p(\alpha, n) \neq p(\beta, n))^M &\overset{??}{\iff} (p(\alpha, n))^M \neq (p(\beta, n))^M \overset{??}{\iff} p^M(\alpha, n) \neq p^M(\beta, n)\\ &\iff p(\alpha, n) \neq p(\beta, n).\end{aligned}$$

Nach $(\mathbf{Aus})^M$ gilt also $D \in M$. D ist dicht in P. Um dies zu sehen, fixiere $p \in P$ beliebig. Wegen $(\overline{\overline{p}} < \aleph_0)^M$ und $(\overline{\overline{\kappa \times \omega}} = \overline{\overline{\kappa}} \cdot \aleph_0 \geq \aleph_0)^M$ existiert ein $n < \omega$ mit $(\alpha, n) \notin \mathrm{dom}(p)$ und $(\beta, n) \notin \mathrm{dom}(p)$. Sei

$$q :\equiv p \cup \{((\alpha, n), 0), ((\beta, n), 1)\}.$$

Dann ist q eine partielle Funktion von $\kappa \times \omega$ nach 2, ferner $q \in M$ und $\overline{\overline{q}}^M < \aleph_0$. Es gilt $q \leq p$ und $q \in D$. Also ist D in der Tat dicht in P. Sei nun $p \in G \cap D$. Dann gilt $p \subseteq f$. Wähle $n < \omega$ mit $(\alpha, n), (\beta, n) \in \mathrm{dom}(p)$ und $p(\alpha, n) \neq p(\beta, n)$. Dann gilt

$$f(\alpha, n) = p(\alpha, n) \neq p(\beta, n) = f(\beta, n).$$

Hieraus folgt $(f(\alpha,n) \neq f(\beta,n))^{M[G]}$; dies war zu zeigen. qed(2)

Im Modell M[G] gilt daher:

$$2^{\aleph_0} = \overline{\overline{\omega 2}} \geq \overline{\overline{\{c_\alpha \mid \alpha < \kappa\}}} \stackrel{(2)}{=} \overline{\overline{\kappa}} \stackrel{(*)}{=} \kappa.$$

Im Fall $\kappa = \aleph_2^M$ ist damit aber noch nicht die Negation der Kontinuumshypothese in M[G] gezeigt, da es denkbar wäre, dass die Kardinalzahl $\aleph_2$ des Grundmodells kleiner als die Kardinalzahl $\aleph_2$ der generischen Erweiterung ist. Tatsächlich aber sind bei der vorgestellten Konstruktion Kardinalzahlen absolut zwischen M und M[G]. Hierfür zeigen wir, dass die benutzte Forcing-Halbordnung eine bestimmte kombinatorische Eigenschaft hat, die die Absolutheit der Kardinalzahlen impliziert.

19.1 Kombinatorische Eigenschaften von P

Die Kardinalzahlstruktur eines Modells wird durch die Klasse der Abbildungen $f : \alpha \to \beta$ bestimmt. Angenommen, $\dot{f}^G : \alpha \to \beta$ und $1_P \Vdash \dot{f} : \check{\gamma} \to \check{\delta}$. Falls $p \Vdash \dot{f}(\check{\alpha}) = \beta_0$, $q \Vdash \dot{f}(\check{\alpha}) = \beta_1$, und $\beta_0 \neq \beta_1$, so sind die Bedingungen p und q inkompatibel, $p \perp q$. Wenn wir unter einem *potentiellen Wert* von $\dot{f}(\check{\alpha})$ ein β verstehen, für das es eine Bedingung p mit $p \Vdash \dot{f}(\check{\alpha}) = \beta$ gibt, so führt eine große Menge von potentiellen Werten zu einer ebenso großen *Antikette* in P, d.h. zu einer Menge von paarweise unverträglichen Bedingungen. Auf diese Weise lässt sich der Wertebereich von $\dot{f}$ schon im Grundmodell beschränken.

Definition 19.1 Sei $(P, \leq, 1_P)$ eine Forcing-Halbordnung und $\kappa \in$ Card. Wir definieren:

(a) A ist eine **Antikette** in $P :\equiv A \subseteq P \wedge \forall p, q \in A\ (p \neq q \longrightarrow p \perp q)$.

(b) A ist **maximale Antikette** in P
$:\equiv A$ ist Antikette in $P \wedge \forall A'(A' \supseteq A \wedge A'$ ist Antikette in $P \longrightarrow A' = A)$.

(c) $(P, \leq, 1_P)$ hat die κ-**Antiketten-Eigenschaft** $:\equiv \forall A\ (A$ ist Antikette in $P \longrightarrow \overline{\overline{A}} < \kappa)$.

(d) $(P, \leq, 1_P)$ hat die **abzählbare Antiketten-Eigenschaft** $:\equiv (P, \leq, 1_P)$ hat die $\aleph_1$-Antiketten-Eigenschaft.

Satz 19.2 *Für alle Mengen X besitzt die Halbordnung* $\mathrm{Fn}(X, 2, \aleph_0)$ *die abzählbare Antiketten-Eigenschaft.*

Beweis. Angenommen, A sei eine überabzählbare Antikette in $\mathrm{Fn}(X, 2, \aleph_0)$. Da die Vereinigung von abzählbar vielen höchstens abzählbaren Mengen höchstens abzählbar ist, gibt es ein $n < \omega$ und ein überabzählbares $A' \subseteq A$, so dass $\forall p \in A'\, \overline{\overline{p}} = n$. Wähle ein bezüglich der Inklusion maximales $r \in \mathrm{Fn}(X, 2, \aleph_0)$, so dass es ein überabzählbares $A'' \subseteq A'$ gibt mit $\forall p \in A''\, r \subseteq p$. Wähle ein beliebiges $p_0 \in A''$. Wegen der Maximalität von r können wir für jedes $x \in \mathrm{dom}(p_0 \setminus r)$ ein höchstens abzählbares $B_x \subseteq A''$ wählen, so dass $\forall p \in A'' \setminus B_x\ x \notin \mathrm{dom}(p)$. Setze $B = \bigcup_{x \in \mathrm{dom}(p_0 \setminus r)} B_x$. Für alle $p \in A'' \setminus B$ gilt dann $\text{dom}(p) \cap \text{com}(p_0) = \text{dom}(r)$ und $p \cup p_0$ ist eine Bedingung in $\text{Fn}(X, 2, \aleph_0)$. Dann aber sind p und p_0 verschieden und kompatibel, obwohl A eine Antikette in $\text{Fn}(X, 2, \aleph_0)$ ist. Widerspruch. QED

Wir können nun eine "Überdeckungseigenschaft" für Funktionen zeigen, die besagt, dass wir Funktionen der generischen Erweiterung im Grundmodell bis auf abzählbare Abweichungen approximieren können.

Satz 19.3 *Seien $a, b \in M$ und $f \in M[G]$, $f\colon a \to b$. Dann gibt es eine Funktion $F \in M$, $F\colon a \to \mathcal{P}(b)$, so dass*
(a) $\forall x \in a\ f(x) \in F(x)$;
(b) $\forall x \in a\ \overline{\overline{F(x)}} \leq \aleph_0$.

Beweis. Wähle einen Namen $\dot{f} \in M$ mit $\dot{f}^G = f$. Wähle ein $p \in G$ mit $p \Vdash \dot{f}\colon \check{a} \to \check{b}$. Definiere $F\colon a \to \mathcal{P}(b)$ durch $F(x) = \{y \in b \,|\, \exists q \leq p\ q \Vdash \dot{f}(x) = \check{y}\}$. Wegen der Definierbarkeit der Forcing-Relation in M ist $F \in M$.
(a) Betrachte $x \in a$. Sei $f(x) = y$. Dann gibt es ein $q \in G$, $q \leq p$ mit $q \Vdash \dot{f}(x) = \check{y}$. Nach Definition von F ist dann $f(x) \in F(x)$.
(b) Betrachte $x \in a$. For all $y \in F(x)$ wähle eine Bedingung $p_y \leq p$ mit $p_y \Vdash \dot{f}(x) = \check{y}$.

(1) Für $y, z \in F(x)$, $y \neq z$ ist $p_y \perp p_z$.

Beweis. Angenommen, es wäre $q \leq p_y, p_z$. Dann $q \Vdash \dot{f}(x) = \check{y}$, $q \Vdash \dot{f}(x) = \check{z}$ und $q \Vdash \dot{f}\colon \check{a} \to \check{b}$. Also $q \Vdash \check{y} = \check{z}$ und $y = z$, Widerspruch. qed(1)

Damit ist die Abbildung $y \mapsto p_y$ eine Injektion von $F(x)$ in die Antikette $\{p_y \,|\, y \in F(x)$. Nach dem vorangehenden Satz ist $\{p_y \,|\, y \in F(x)$ höchstens abzählbar, also $\overline{\overline{F(x)}} \leq \aleph_0$. QED

Satz 19.4 *Angenommen, die Forcing-Halbordnung P besitzt die abzählbare Antiketten-Eigenschaft. Dann ist die Formel "β ist eine Kardinalzahl" absolut zwischen M und $M[G]$.*

Beweis. Wenn $M[G] \models$"β ist eine Kardinalzahl", so ist auch $M \models$"β ist eine Kardinalzahl", da die Menge der Abbildungen von β nach β in M der in $M[G]$ vorhandenen Abbildungen ist.
Betrachte nun den Fall, dass $M[G] \models$"β ist **keine** Kardinalzahl". Wähle ein $\alpha < \beta$ und eine Surjektion $f\colon \alpha \to \beta$. Dann ist $\alpha > \omega$. Nach dem vorangehenden Satz können wir eine Funktion $F \in M$ wählen mit $F\colon \alpha \to \mathcal{P}(\beta)$ und
(a) $\forall x \in \alpha\ f(x) \in F(x)$;
(b) $\forall x \in \alpha\ \overline{\overline{F(x)}}^M \leq \aleph_0$.

Da f surjektiv ist, gilt: $\beta \subseteq \bigcup_{x \in \alpha} F(x)$ und $\overline{\overline{\beta}}^M \leq \sum_{x \in \alpha} \aleph_0 \leq \overline{\overline{\alpha}}^M \aleph_0 \leq \overline{\overline{alpha}}^M \leq \alpha$. Also $M \models$"β ist **keine** Kardinalzahl". QED

Wenn wir nun die obige Forcing-Halbordnung $\mathrm{Fn}(\kappa \times \omega, 2, \aleph_0)$ mit $\kappa = \aleph_2^M$ vornehmen, so gilt für eine generische Erweiterung M[G]:

$$(2^{\aleph_0})^{M[G]} \geq \kappa = \aleph_2^M = \aleph_2^{M[G]}.$$

Damit ist M[G] ein Modell der Negation der Kontinuums-Hypothese. Wir erhalten als relatives Konsistenzresultat:

Satz 19.5 (Cohen) *Wenn* **ZFC** *konsistent ist, so ist auch das System* **ZFC** + **¬CH** *konsistent*

20 Die relative Konsistenz von ¬ (AC).

Um Kon(**ZFC**) $\longrightarrow$ Kon(**ZF** + ¬ (**AC**)) zu beweisen, haben wir nach **??** **ZFC** und die Existenz eines Grundmodells M vorauszusetzen und die Existenz eines Termes M' zu verifizieren, so daß $(\mathbf{ZF} + \neg\,(\mathbf{AC}))^{M'}$ gilt. Bisher war stets M' eine gewisse generische Erweiterung von M. Dies ist in dem nun zu behandelnden Fall nicht möglich, da in jeder generischen Erweiterung von M das Auswahlaxiom gilt. Wir wählen für M' eine geeignete Teilklasse einer geeigneten generischen Erweiterung von M.
Beim Nachweis der relativen Konsistenz von (**AC**) haben wir das innere Modell HOD der erblich ordinalzahldefinierbaren Mengen betrachtet, siehe 13.5. Wir verallgemeinern diese Konstruktion wie folgt. Sei A ein Term mit $A \in V$. Sei

$$\begin{aligned}\mathrm{OD}(A) :\equiv \Big\{x \,\Big|\, & \exists\, \theta \in \mathrm{On}\, \exists \chi \in \mathrm{Fml}_4(\dot\in)\, \exists \alpha < \theta\, \exists z \in {}^{<\,\omega}A \\ & (\, x \in V_\theta \,\wedge\, z \in V_\theta \,\wedge\, A \in V_\theta \,\wedge\, \forall y \in V_\theta\, (y = x \leftrightarrow (V_\theta, \in) \models \chi[y, \alpha, z, A]))\Big\}\end{aligned}$$

die **Klasse der über** A **ordinalzahldefinierbaren Mengen** und

$$\mathrm{HOD}(A) :\equiv \{x \mid \mathrm{TC}(\{x\}) \in \mathrm{OD}(A)\}$$

die **Klasse der über** A **erblich-ordinalzahldefinierbaren Mengen**. Entsprechend 13.7 zeigt man, daß HOD(A) ein inneres Modell der Mengenlehre ist, d.h., wir haben

Satz 20.1 *Es gilt* **ZFC** $\vdash$ (HOD(A) *ist transitiv*). *Ist ferner* φ *ein* **ZF** *-Axiom oder eine Instanz eines* **ZF** *-Schemas, so gilt* **ZFC** $\vdash \varphi^{\mathrm{HOD}(A)}$.

Außerdem folgt

Lemma 20.2 $A \in \mathrm{HOD}(A)$.

Beweis. Wegen $A \in V$ existiert ein $\theta \in \mathrm{On}$ mit $\mathrm{TC}(\{A\}) \in V_\theta$. Wir können $\theta \geq \omega$ annehmen. Sei

$$\chi(y, u, v, w) :\equiv \ulcorner \forall x\, (x \in y \longleftrightarrow x \in \mathrm{TC}(\{w\}))\urcorner.$$

Dann gilt, mit $z :\equiv \emptyset$, $\alpha :\equiv 1$,

$$\mathrm{TC}(\{A\}) \in V_\theta \wedge z \in V_\theta \wedge A \in V_\theta \wedge \forall y \in V_\theta\, (y = \mathrm{TC}(\{A\}) \longleftrightarrow (V_\theta, \in) \models \chi[y, \alpha, z, A]),$$

also $\mathrm{TC}(\{A\}) \in \mathrm{OD}(A)$. Dies bedeutet $A \in \mathrm{HOD}(A)$. QED

Sei nun M ein Grundmodell und $P :\equiv \mathrm{Fn}(\omega \times \omega, 2, \aleph_0)^M$. Sei G ein P-generischer Filter über M. Wie im letzten Kapitel gesehen, adjungiert P $\aleph_0$-viele COHEN-Reals $(c_i | i < \omega)$ zu M hinzu; es ist $c_i = f(i, .)$ mit $f = \bigcup G$. Wir interpretieren $c_i \in {}^\omega 2$ als charakteristische Funktion einer Teilmenge a_i von ω; d.h., für $i < \omega$ setzen wir

$$a_i :\equiv \{n < \omega \mid c_i(n) = 1\}.$$

Man sieht sofort $a_i \in M[G]$ und

$$A :\equiv \{a_i \mid i < \omega\} \in M[G].$$

Sei $M' :\equiv (\mathrm{HOD}(A))^{M[G]}$.

Satz 20.3 *M' ist transitiv und es gilt* $\mathbf{ZF}^{M'}$.

BEWEIS. Wegen $\mathbf{ZFC} \vdash \forall u \forall v\, ((u \in v \wedge v \in \mathrm{HOD}(A)) \longrightarrow u \in \mathrm{HOD}(A))$ folgt

$$\Big(\forall u \forall v\, ((u \in v \wedge v \in \mathrm{HOD}(A)) \longrightarrow u \in \mathrm{HOD}(A))\Big)^{M[G]},$$

also

$$\forall u \in M[G]\, \forall v \in M[G]\, ((u \in v \wedge v \in \mathrm{HOD}(A)^{M[G]}) \longrightarrow u \in \mathrm{HOD}(A)^{M[G]}).$$

Da $M[G]$ transitiv und $\mathrm{HOD}(A)^{M[G]} \subseteq M[G]$ gilt, kann man hier die Beschränkung der Laufvariablen auf $M[G]$ ohne Veränderung der Aussage eliminieren. Die entstehende $\in$-Formel besagt gerade, daß M' transitiv ist.

Sei nun φ ein **ZF**-Axiom oder eine Instanz eines **ZF**-Schemas. Es ist $\varphi^{M'}$ zu zeigen. Nach 20.1 gilt $\mathbf{ZFC} \vdash \varphi^{\mathrm{HOD}(A)}$. Nach dem Modell-Lemma **??** folgt hieraus $\left(\varphi^{\mathrm{HOD}(A)}\right)^{M[G]}$ wegen $\mathbf{ZFC}^{M[G]}$. Es genügt also, folgendes zu zeigen:

(1) Sei φ eine $\in$-Formel. Dann gilt: $\varphi^{M'} \longleftrightarrow \left(\varphi^{\mathrm{HOD}(A)}\right)^{M[G]}$.

BEWEIS. Wir machen eine Induktion über den Aufbau der $\in$-Formeln. Der einzige nicht-triviale Fall ist der Fall $\varphi \equiv \exists x\, \psi(x, \vec{y})$. Hier folgt

$$\begin{aligned} \varphi^{M'} &\iff \exists x \Big(x \in M' \wedge \psi^{M'}(x, \vec{y})\Big) \\ &\iff \exists x \Big(x \in M' \wedge (\psi(x, \vec{y})^{\mathrm{HOD}(A)})^{M[G]}\Big) \quad \text{(nach Ind.Vor.)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff \exists x\Big(x \in (\mathrm{HOD}(A))^{M[G]} \wedge (\psi(x,\vec{y})^{\mathrm{HOD}(A)})^{M[G]}\Big)\\
&\iff \exists x \in M[G]\Big(x \in (\mathrm{HOD}(A))^{M[G]} \wedge (\psi(x,\vec{y})^{\mathrm{HOD}(A)})^{M[G]}\Big)\\
&\qquad (\text{wegen } (\mathrm{HOD}(A))^{M[G]} \subseteq M[G])\\
&\iff \exists x \in M[G]\Big(x \in \mathrm{HOD}(A) \wedge \psi(x,\vec{y})^{\mathrm{HOD}(A)}\Big)^{M[G]}\\
&\iff \Big(\exists x\,(x \in \mathrm{HOD}(A) \wedge \psi(x,\vec{y})^{\mathrm{HOD}(A)})\Big)^{M[G]}\\
&\iff \Big(\varphi^{\mathrm{HOD}(A)}\Big)^{M[G]}.
\end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. qed(1)

Damit ist der Satz bewiesen. QED

Wir zeigen nun

Satz 20.4 *A hat keine Wohlordnung in M'. Insbesondere gilt also $(\neg\,(\mathbf{AC}))^{M'}$.*

Beweis. Angenommen, dies ist nicht der Fall, d.h., es gilt $(A$ hat eine Wohlordnung$)^{M'}$. Da nach 6.1 die Existenz einer Wohlordnung einer Menge unter **ZF** gleichwertig ist zur Existenz einer Bijektion von einer Ordinalzahl auf diese Menge, folgt hieraus $(\exists f\,\exists\eta\,(\eta \in \mathrm{On} \wedge f\colon \eta \xrightarrow{bij.} A))^{M'}$. Durch Hineinziehen der Relativierung und Ausnutzen der üblichen Absolutheitsargumente erhält man als äquivalente Aussage die Existenz eines $f \in M'$ und eines $\eta \in \mathrm{On} \cap M'$ mit $f\colon \eta \xrightarrow{bij.} A$.

(1) Es gibt eine $\in$-Formel $\chi(v_0,v_1,v_2,v_3,v_4)$, ein $\alpha \in \mathrm{On}\cap M[G]$ und ein $z \in {}^{<\omega}A$, so daß folgendes gilt: Ist $i<\omega$, so existiert ein $\beta<\eta$ mit $(a_i = \iota x.\,\chi(x,\alpha,\beta,z,A))^{M[G]}$. Hierbei ist

$$\iota x.\,\psi(x,\vec{y}) :\equiv \Big\{z \;\Big|\; \forall x\,((\psi(x,\vec{y}) \wedge \forall x'\,(\psi(x',\vec{y}) \to x = x')) \longrightarrow z \in x)\Big\}$$

dasjenige eindeutig bestimmte x mit $\psi(x,\vec{y})$, falls ein solches existiert (und $=V$ sonst).

Beweis. Wir arbeiten in $M[G]$. Sei $i \mapsto \varphi_i$ eine definierbare Bijektion zwischen ω und $\mathrm{Fml}_4(\dot{\in})$, vgl. **??**. Sei

$$\varphi(v,\theta,i,\gamma,v_3,v_4) :\equiv (v \in V_\theta \wedge v_3 \in V_\theta \wedge v_4 \in V_\theta \wedge \forall v_5 \in V_\theta\ (v_5 = v \leftrightarrow (V_\theta,\in) \models \varphi_i[v_5,\alpha,v_3,v_4])).$$

Wegen $f \in \mathrm{HOD}(A)$, also $\mathrm{TC}(\{f\}) \subseteq \mathrm{OD}(A)$, und $f \in \mathrm{TC}(\{f\})$ ist $f \in \mathrm{OD}(A)$. Also existieren $\theta \in \mathrm{On}$, $i<\omega$, $\gamma<\theta$ und $z \in {}^{<\omega}A$ mit $\varphi(f,\theta,i,\gamma,z,A)$. Man sieht leicht, daß

(1.1) $\forall v\,(\varphi(v,\theta,i,\gamma,z,A) \longleftrightarrow v = f)$

gilt. Wir fassen die Parameter θ, i, γ zu einem Ordinalzahlparameter zusammen. Hierzu statten wir On $\times$ On $\times$ On mit der lexikographischen Wohlordnung $\prec$ aus: Für $(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2), (\xi_0, \xi_1, \xi_2) \in$ On $\times$ On $\times$ On ist gesetzt

$$(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2) \prec (\xi_0, \xi_1, \xi_2) :\equiv (\zeta_0 < \xi_0 \vee (\zeta_0 = \xi_0 \wedge \zeta_1 < \xi_1) \vee (\zeta_0 = \xi_0 \wedge \zeta_1 = \xi_1 \wedge \zeta_2 < \xi_2)).$$

Sei h der MOSTOWSKI-Isomorphismus von $\prec$; dann ist $h[\mathrm{On} \times \mathrm{On} \times \mathrm{On}] = \mathrm{On}$. Sei

$$\psi(v, v_1, v_3, v_4) :\equiv \exists u_0, u_1, u_2\, ((u_0, u_1, u_2) = h^{-1}[\{v_1\}] \wedge \varphi(v, u_0, u_1, u_2, v_3, v_4))$$ [21]

und $\alpha :\equiv h((\theta, i, \gamma))$. Dann gilt $\varphi(v, \theta, i, \gamma, v_3, v_4) \longleftrightarrow \psi(v, \alpha, v_3, v_4)$, so daß aus (1.1)

(1.2) $\quad \forall v\, (\psi(v, \alpha, z, A) \longleftrightarrow v = f)$

folgt. Da f eine Bijektion zwischen η und A ist, existiert ein $\beta < \eta$ mit $a_i = f(\beta)$. Sei

$$\chi(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4) :\equiv \exists v\, (\psi(v, v_1, v_3, v_4) \wedge (v_2, v_0) \in v).$$

Aus (1.2) und $(\beta, a_i) \in f$ folgt

$$\forall v_0\, (\chi(v_0, \alpha, \beta, z, A) \longleftrightarrow v_0 = a_i),$$

d.h., $a_i = \iota x.\, \chi(x, \alpha, \beta, z, A)$. Dies war zu zeigen. qed(1)

Wir konstruieren nun spezielle Namen für die an unseren Untersuchungen involvierten Elemente von $M[G]$.

(2) Für $i < \omega$ ist $\dot{a}_i :\equiv \{(\check{n}, p) \mid n < \omega \wedge p \in P \wedge p(i, n) = 1\}$ ein M-Name von a_i. Für $i, j < \omega$, $i \neq j$, gilt $1_P \Vdash \dot{a}_i \neq \dot{a}_j$.

BEWEIS. Fixiere $i < \omega$. Aus $P \in M$ folgt leicht $\dot{a}_i \in M$. Ferner gilt

$$\dot{a}_i^G = \{n < \omega \mid \exists p \in G\, p(i, n) = 1\}.$$

Wegen $c_i(n) = 1 \iff (\bigcup G)(i, n) = 1 \iff \exists p \in G\, p(i, n) = 1$ folgt hieraus und aus der Definition von a_i, daß $\dot{a}_i^G = a_i$ ist, wie behauptet.

Seien nun $i, j < \omega$ mit $i \neq j$. Sei H ein beliebiger P-generischer Filter über M. Wie im Beweis von **??** gesehen, ist

$$D :\equiv \{p \in P \mid \exists n < \omega\, ((i, n) \in \mathrm{dom}(p) \wedge (j, n) \in \mathrm{dom}(p) \wedge p(i, n) \neq p(j, n))\}$$

ein Element von M und dicht in P. Sei $p \in D \cap H$. Wähle $n < \omega$ mit $p(i, n) \neq p(j, n)$. Wir können o.E. $p(i, n) = 1$ und $p(j, n) = 0$ annehmen. Dann ist $(\check{n}, p) \in \dot{a}_i$, so daß $n \in \dot{a}_i^H$ folgt. Andererseits kann es kein $q \in H$ geben mit $(\check{n}, q) \in \dot{a}_j$. In diesem Fall wäre nämlich $q(j, n) = 1 \neq p(j, n)$, als Elemente des Filters H müssen p und q aber kompatibel sein. Es folgt $n \notin \dot{a}_j^H$, so daß wir $\dot{a}_i^H \neq \dot{a}_j^H$ nachgewiesen haben. Damit ist alles gezeigt. qed(2)

Aus (2) und der Definition von A folgt sofort

[21] Beachte, daß h definierbar ist, d.h., eine $\in$-Formel μ existiert, so daß für alle x, y gilt: $y = h(x) \iff \mu(x, y)$; vgl. die Definition des MOSTOWSKI-Isomorphismus' in **??**.

(3) $\dot{A} :\equiv \{(\dot{a}_i, 1_P) \mid i < \omega\}$ ist ein M-Name für A.

Für $i < \omega$ und $m < \omega$ sei

$$(m, \dot{a}_i)^0 :\equiv \Big\{ \Big(\{(\check{m}, 1_P)\}, 1_P\Big), \Big(\{(\check{m}, 1_P), (\dot{a}_i, 1_P)\}, 1_P\Big) \Big\}.$$

Ferner sei $\bar{m} :\equiv |z|$, und $l\colon \bar{m} \to \omega$ definiert durch $z = (a_{l(m)} \mid m < \bar{m})$.

(4) $\dot{z} :\equiv \Big\{ ((m, \dot{a}_i)^0, 1_P) \;\Big|\; m < \bar{m} \wedge i < \omega \wedge i = l(m) \Big\}$ ist ein M-Name für z.

Beweis. Es ist leicht zu sehen, daß $(m, \dot{a}_i)^0 \in M$ ist für $m, i < \omega$. Wegen $\bar{m} < \omega$ ist $\bar{m} \in M$. Da P in M $\aleph_0$-abgeschlossen ist (vgl. **??**), folgt aus $\bar{m} \in M$, $\overline{\overline{\bar{m}}} < \aleph_0$, $\omega \in M$, daß $l \in M[G]$ schon in M existiert. Nun ergibt sich sofort $\dot{z} \in M$. Ferner folgt

$$\begin{aligned}
\dot{z}^G &= \Big\{ ((m, \dot{a}_i)^0)^G \;\Big|\; m < \bar{m} \wedge i < \omega \wedge i = l(m) \Big\} \\
&= \Big\{ \{\{(\check{m}, 1_P)\}^G, \{(\check{m}, 1_P), (\dot{a}_i, 1_P)\}^G\} \;\Big|\; m < \bar{m} \wedge i < \omega \wedge i = l(m) \Big\} \\
&= \Big\{ \underbrace{\{\{m\}, \{m, \dot{a}_i^G\}\}}_{=(m, \dot{a}_i^G)} \;\Big|\; m < \bar{m} \wedge i < \omega \wedge i = l(m) \Big\} \\
&\overset{(2)}{=} \Big\{ (m, a_{l(m)}) \;\Big|\; m < \bar{m} \Big\} \\
&= z.
\end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. qed(4)

Wir fixieren nun $i < \omega$ mit $a_i \notin \operatorname{ran}(z)$. Ein solches i existiert, da z endlich und die a_i paarweise verschieden sind. Wegen $(\dot{a}_i^G = \iota x.\, \chi(x, \alpha, \beta, \dot{z}^G, \dot{A}^G))^{M[G]}$ existiert nach dem Forcing-Theorem ein $p_0 \in G$ mit

(5) $p_0 \Vdash \dot{a}_i = \iota x.\, \chi(x, \check{\alpha}, \check{\beta}, \dot{z}, \dot{A})$.

Wähle ein $j < \omega$, $j \neq i$ mit $a_j \notin \operatorname{ran}(z)$. Da p endlich ist, können wir $(\{j\} \times \omega) \cap \operatorname{dom}(p_0) = \emptyset$ erreichen. Sei $\pi\colon \omega \xrightarrow{bij.} \omega$ diejenige Permutation, die i und j vertauscht und alle anderen Elemente nicht bewegt. Offenbar gilt $\pi \in M$. Wir setzen π zu einer wiederum mit π bezeichneten Abbildung mit Definitionsbereich P fort durch

$$\pi(p) :\equiv \Big\{ ((\pi(k), n), y) \;\Big|\; (k, n) \in \omega \times \omega \wedge y \in 2 \wedge ((k, n), y) \in p \Big\}.$$

$\pi(p)$ weist also allen Argumenten $(k, n) \in \operatorname{dom}(\pi(p))$ mit $k \notin \{i, j\}$ denselben Funktionswert wie p zu; jedem Argument $(i, n) \in \operatorname{dom}(\pi(p))$ wird der Wert $p(j, n)$ zugewiesen; jedem Argument $(j, n) \in \operatorname{dom}(\pi(p))$ wird der Wert $p(i, n)$ zugewiesen. Man verifiziert leicht:

(6) π ist eine ordnungstreue Bijektion von P und es gilt $\pi \in M$.

Die Bedeutung von π liegt in

(7) $\quad p_0 \parallel \pi(p_0)$.

Beweis. Es ist zu zeigen, daß p_0 und $\pi(p_0)$ denjenigen Argumenten, die im Definitionsbereich beider Funktionen liegen, dieselben Werte zuweisen. Wegen $(\{j\} \times \omega) \cap \mathrm{dom}(p_0) = \emptyset$ ist $(\{i\} \times \omega) \cap \mathrm{dom}(\pi(p_0)) = \emptyset$ und somit

$$\mathrm{dom}(p_0) \cap \mathrm{dom}(\pi(p_0)) \subseteq (\omega \setminus \{i, j\}) \times \omega.$$

Nach Definition von π stimmen p_0 und $\pi(p_0)$ auf der rechts stehenden Menge überein. qed(7)

Wir zeigen unten:

(8) $\quad \pi(p_0) \Vdash \dot{a}_j = \iota x.\, \chi(x, \check{\alpha}, \check{\beta}, \dot{z}, \dot{A})$.

Ist dann q eine gemeinsame Verstärkung von $p_0, \pi(p_0)$, so gilt

$$q \Vdash \dot{a}_i = \iota x.\, \chi(x, \check{\alpha}, \check{\beta}, \dot{z}, \dot{A})$$

wegen (5) und $q \leq p_0$, sowie

$$q \Vdash \dot{a}_j = \iota x.\, \chi(x, \check{\alpha}, \check{\beta}, \dot{z}, \dot{A})$$

wegen (8) und $q \leq \pi(p_0)$, so daß sich $q \Vdash \dot{a}_i = \dot{a}_j$ ergibt. Andererseits gilt nach (2) $q \Vdash \dot{a}_i \neq \dot{a}_j$ wegen $i \neq j$ und $q \leq 1_P$. Beides zusammen ist nicht möglich. Der Widerspruch zeigt, daß unsere Annahme einer Wohlordnung von A in M' falsch sein muß, was den Satz beweist. Es verbleibt, (8) zu verifizieren.

Beweis von (8). Sei H ein P-generischer Filter über M mit $\pi(p_0) \in H$. Sei $H' :\equiv \pi[H]$. Man sieht leicht, daß H' ein P-generischer Filter über M ist. Wegen $\pi \in M$ ist $H' = \pi[H] \in M[H]$ und $H = \pi^{-1}[H'] \in M[H']$, so daß

(8.1) $\quad M[H] = M[H']$

gilt. Wir berechnen die Interpretationen unserer oben definierten speziellen Namen bzgl. H und H'.

Ist $k \notin \{i, j\}$ so gilt

(8.2) $\quad \dot{a}_k^H = \{n < \omega \mid \exists p \in H \ \underbrace{p(k,n)}_{=\pi(p)(k,n)} = 1\} = \{n < \omega \mid \exists p' \in \pi[H]\ p'(k,n) = 1\} = \dot{a}_k^{H'}$.

Im Fall $k = i$ folgt

(8.3) $\quad \dot{a}_i^H = \{n < \omega \mid \exists p \in H \ \underbrace{p(i,n)}_{=\pi(p)(j,n)} = 1\} = \{n < \omega \mid \exists p' \in \pi[H]\ p'(j,n) = 1\} = \dot{a}_j^{H'}$.

Aus Symmetriegründen folgt hieraus noch

(8.4) $\quad \dot{a}_j^H = \dot{a}_i^{H'}$.

Ferner ergibt sich aus (8.2)–(8.4)

(8.5) $\dot{A}^H = \{\dot{a}_k^H \mid k < \omega\} = \{\dot{a}_k^{H'} \mid k < \omega\} = \dot{A}^{H'}$.

Für $k \notin \{i, j\}$ berechnen wir mit (8.2) elementar

(8.6) $((m, \dot{a}_k)^0)^H = (m, \dot{a}_k^H) = (m, \dot{a}_k^{H'}) = ((m, \dot{a}_k)^0)^{H'}$.

Da a_i und a_j in $\mathrm{ran}(z)$ nicht vorkommen, ist $l(m) \notin \{i, j\}$ für $m < \bar{m}$, so daß aus (8.6) folgt

(8.7) $\dot{z}^H = \Big\{((m, \dot{a}_k)^0)^H \;\Big|\; m < \bar{m} \wedge k = l(m)\Big\} = \Big\{((m, \dot{a}_k)^0)^{H'} \;\Big|\; m < \bar{m} \wedge k = l(m)\Big\} = \dot{z}^{H'}$.

Wegen $\pi(p_0) \in H$ gilt $p_0 = \pi(\pi(p_0)) \in \pi[H] = H'$. Aus (5) folgt also

$$(\dot{a}_i^{H'} = \chi(x, \alpha, \beta, \dot{z}^{H'}, \dot{A}^{H'}))^{M[H']}.$$

Wegen (8.3), (8.5) und (8.7) bedeutet dies

$$(\dot{a}_j^H = \chi(x, \alpha, \beta, \dot{z}^H, \dot{A}^H))^{M[H']},$$

nach (8.1) also $(\dot{a}_j^H = \chi(x, \alpha, \beta, \dot{z}^H, \dot{A}^H))^{M[H]}$; dies war zu zeigen. qed(8)

Damit ist der Satz bewiesen. QED

Bemerkung 20.5 Die Grundidee des obigen Beweises, die Arbeit mit einem **Permutationsmodell**, geht auf FRAENKEL zurück.

Nach **??** folgt aus 20.4:

Corollar 20.6 Kon(**ZFC**) $\longrightarrow$ Kon(**ZF** + $\neg$ (**AC**)).

Da wir in 13.9 Kon(**ZF**) $\longrightarrow$ Kon(**ZFC**) bewiesen haben, erhalten wir:

Corollar 20.7 Kon(**ZF**) $\longrightarrow$ Kon(**ZF** + $\neg$ (**AC**)).

13.9 und 20.7 können wir so zusammenfassen:

Satz 20.8 *Das Auswahlaxiom ist unabhängig von* **ZF**.