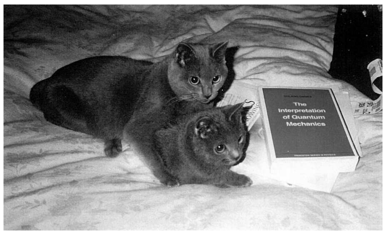
MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN
Arbeitsgruppe Mathematische Logik
Prof. Dr. Peter Koepke

Bonn, den 23.01.2003

Mengenlehre I WS 2002

Übungsaufgaben Folge 13, Abgabe: 30.01.2003 nach der Vorlesung



Jean Paul and Jacques, the two Chartreux cats of Robert M. Solovay. [The picture was taken by Sonja Soehnel, who shares ownership of these cats with Solovay.]
Robert M. Solovay, Ph.D. University of Chicago 1964, Dissertation: “A Functional Form of the Differentiable Riemann-Roch Theorem”
Robert M. Solovay is Professor Emeritus of Mathematics at the University of California, Berkeley and lives in Oregon.
Solovay has worked in almost every branch of Set Theory plus many other branches of logic; together with D.A. Martin and others he developed the part of Descriptive Set Theory known as Determinacy. His theorems had great impact in Recursion Theory, Large Cardinal Theory and Forcing Theory. 1978 Solovay and Strassen discovered a remarkable probabilistic algorithm for primality testing that can be expressed in terms of probabilistic circuits. 1991 he wrote a checksum program, that is now part of the GNU Emacs distribution.
Since retiring from Berkeley in the mid-90’s, he works in the field of quantum computation, computer proof assistants (especially Mizar) and Quine’s “New Foundations” of Set Theory.

Definitionen und Sätze

Sei $(\mathbb{P}, \leq, 1_{\mathbb{P}})$ eine Forcing-Halbordnung. Eine Teilmenge A von $\mathbb{P}$ heißt *Antikette* in $\mathbb{P}$, falls sie aus paarweise inkompatiblen Elementen besteht, d.h. wenn gilt: $A \subseteq \mathbb{P} \wedge \forall p, q \in A\,(p \neq q \rightarrow p \perp q)$.

Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{P}$ ist eine *maximale Antikette* in $\mathbb{P}$, wenn A eine Antikette in $\mathbb{P}$ ist und es keine Antikette in $\mathbb{P}$ gibt, die eine echte Obermenge von A ist, d.h. wenn gilt:

$$\forall A' \subset \mathbb{P}\,[(A' \text{ ist Antikette in } \mathbb{P} \wedge A \subseteq A') \rightarrow A' = A].$$

Aufgaben

Aufgabe 73
Sei M ein Grundmodell, $(\mathbb{P}, \leq, 1_{\mathbb{P}}) \in M$ eine Forcing-Halbordnung und $p \in \mathbb{P}$. Seien φ, ψ Formeln.

(a) Zeigen Sie: $p \Vdash \varphi \rightarrow \psi$ ist äquivalent zu $\forall q \leq p(q \Vdash \varphi \rightarrow q \Vdash \psi)$.

(b) Zeigen Sie: $p \Vdash \exists v \in \dot{x}\, \varphi$ ist äquivalent zu $\{q \in \mathbb{P} \mid \exists \langle \dot{z}, s\rangle \in \dot{x}(s \in \mathbb{P} \wedge q \leq s \wedge q \Vdash \varphi\frac{\dot{z}}{v})\}$ ist dicht unter p.

Aufgabe 74
Sei M ein Grundmodell, $(\mathbb{P}, \leq, 1_{\mathbb{P}}) \in M$ eine Forcing-Halbordnung.

(a) Seien G_1 und G_2 $\mathbb{P}$-generische Filter. Beweisen Sie: Wenn G_1 eine Teilmenge von G_2 ist, so gilt $G_1 = G_2$.

(b) Sei die Menge $\mathcal{D}$ der in $\mathbb{P}$ dichten Mengen abzählbar. Zeigen Sie, dass für jedes $p \in \mathbb{P}$ ein $\mathbb{P}$-generischer Filter $G \in \mathbf{V}$ mit $p \in G$ existiert.

(c) Sei $\mathbb{P}$ verzweigt und die Menge $\mathcal{D}$ der in $\mathbb{P}$ dichten Mengen abzählbar. Zeigen Sie, dass es mindestens abzählbar viele unterschiedliche $\mathbb{P}$-generische Filter gibt.

Aufgabe 75
Sei M ein Grundmodell, $(\mathbb{P}, \leq, 1_{\mathbb{P}}) \in M$ eine Forcing-Halbordnung und $p \in \mathbb{P}$.

(a) Zeigen Sie, dass jede Antikette A in $\mathbb{P}$ zu einer maximalen Antikette A' in $\mathbb{P}$ erweitert werden kann.

(b) *(Maximalitätsprinzip)* Zeigen Sie: Wenn $p \Vdash \exists v \varphi$ gilt, so existiert ein $\dot{x} \in M$ mit $p \Vdash \varphi\frac{\dot{x}}{v}$.

Einige Zitate zur Erbauung

C.F. Gauss
Man darf nicht das, was uns unwahrscheinlich und unnatürlich erscheint, mit dem verwechseln, was absolut unmöglich ist.

J. Verne
Du wolltest doch Algebra, da hast du den Salat.

D. Hilbert
Im großen Garten der Geometrie kann sich jeder nach seinem Geschmack einen Strauß pflücken.

G. Polya
Eine mathematische Aufgabe kann manchmal genauso unterhaltsam sein wie ein Kreuzworträtsel, und angespannte geistige Arbeit kann eine ebenso wünschenswerte Übung sein wie ein schnelles Tennisspiel.

B. Brecht
Das Denken gehört zu den größten Vergnügungen der menschlichen Rasse.

G. Galilei
Die Natur spricht die Sprache der Mathematik: die Buchstaben dieser Sprache sind Dreiecke, Kreise und andere mathematische Figuren.

Novalis
Alle göttlichen Gesandten müssen Mathematiker sein.

F. Wille
Beweisen muß ich diesen Käs' sonst ist die Arbeit unseriös.

G.H. Hardy
Das entscheidende Kriterium ist Schönheit; für hässliche Mathematik ist auf dieser Welt kein beständiger Platz.

A. Einstein
Mathematik ist die perfekte Methode, sich selbst an der Nase herum zu führen.

Um die Bildergalerie der Übungszettel zu vervollständigen, gibt es zum Schluß noch drei Mathematikern, die bei einer Mengenlehre-Vorlesung in Bonn einfach nicht fehlen dürfen.

Felix Hausdorff
(8.11.1868, Breslau – 26.1.1942, Bonn) Studium in Leipzig, Freiburg und Berlin; 1891 Promotion, 1895 Habilitation in Leipzig; 1902 a.o. Professor in Leipzig, 1910 in Bonn; 1913 ordentlicher Professor in Greifswald, dann von 1921 bis 1935 in Bonn; angesichts der drohenden Deportation in ein Konzentrationslager durch die deutschen Behörden scheidet Hausdorff 1942 gemeinsam mit seiner Frau freiwillig aus dem Leben. Hausdorff arbeitet in verschiedenen Bereichen der Mathematik. Seine wichtigsten Arbeitsgebiete sind Mengenlehre und Topologie. Sein Buch "Grundzüge der Mengenlehre" aus dem Jahr 1914 ist das erste systematische Lehrbuch der Mengenlehre und kann in seiner Bedeutung für die Verbreitung der Mengenlehre kaum überschätzt werden. In seiner Leipziger Zeit veröffentlicht Hausdorff unter dem Pseudonym *Paul Mongré* Schriften literarischen und philosophischen Inhalts.

Abraham Halevi Fraenkel
(17.2.1891, München – 15.10.1965, Jerusalem) Studium in München, Marburg, Berlin und Breslau; 1914 Promotion, 1916 Habilitation in Marburg, dann hier Privatdozent, ab 1922 außerordentlicher Professor; 1928–1933 ordentlicher Professor an der Universität Kiel, außerdem 1929–1931 und ab 1933 bis zu seiner Emeritierung 1959 an der Universität Jerusalem; 1938–1940 Rektor der Universität Jerusalem. Nach Arbeiten über abstrakte Gruppen wendet sich Fraenkel rasch der Mengenlehre zu. Er veröffentlicht mehrere Bücher über Mengenlehre, für die von Zermelo herausgegebenen gesammelten Werke Cantors verfaßt Fraenkel eine Biographie Cantors.

Albert Thoralf Skolem
(23.5.1887, Sandsvaer (Südnorwegen) – 23.3.1963, Oslo) 1905–1913 Studium an der Universität Kristiania (=Oslo), hier dann Assistent und ab 1918 Dozent; 1926 Promotion an der Universität Oslo; 1930 Forschungsprofessor am Institut Christian Michelsen in Bergen; 1938–1957 ordentlicher Professor in Oslo. Skolem beschäftigt sich neben Verbandstheorie und Zahlentheorie (diophantische Gleichungen) hauptsächlich mit Fragen der mathematischen Logik und der Grundlagenforschung.