MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN
Arbeitsgruppe Mathematische Logik
Prof. Dr. Peter Koepke

Bonn, den 16.01.2003

Mengenlehre I WS 2002

Übungsaufgaben Folge 12, Abgabe: 24.01.2003 nach der Vorlesung

John R. Steel, graduated 1977 at the UC Berkeley with his PhD thesis "Determinateness and Subsystems of Analysis", 1996 he joins again UC Berkeley from UCLA where he's taught since 1977. Mathematician of international renown, Steel is noted as one of the world's leading authorities in set theory. In 1985 he shared the Carol Karp Prize with Woodin and Martin (of UCLA). This prize is awarded by the Association for Symbolic Logic once every five years for the best work in mathematical logic. Additionally, he was awarded an Alfred P. Sloan Fellowship in 1986 and was an invited speaker at the 1990 International Congress of Mathematicians in Kyoto, Japan. His area of expertise includes set theory, descriptive set theory, and fine structure. He wrote the book "The Core Model Iterability Problem", Lecture Notes in Logic.

Definitionen und Sätze

Zwei Elemente p, q einer Forcing-Halbordnung $(\mathbb{P}, \leq)$ sind *kompatibel* $(p \| q)$, wenn ein gemeinsames kleineres Element von $\mathbb{P}$ existiert, d.h. $p \| q :\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{P}(r \leq q \wedge r \leq p)$. Zwei Elemente p, q einer Forcing-Halbordnung $(\mathbb{P}, \leq)$ sind *inkompatibel* $(p \perp q)$, wenn sie nicht kompatibel sind.
Eine Forcing-Halbordnung $(\mathbb{P}, \leq)$ heißt *verzweigt*, wenn es zu jedem Element von $\mathbb{P}$ zwei kleinere, zueinander inkompatible, Elemente von $\mathbb{P}$ gibt, d.h. wenn gilt

$$\forall p \in \mathbb{P} \exists q, r \in \mathbb{P}(q \leq p \wedge r \leq p \wedge q \perp r).$$

Wir wollen einen Klassenterm t *einfach* nennen, wenn $t \cap W = t^W$ für alle transitiven ZF-Modelle W gilt.

Aufgaben

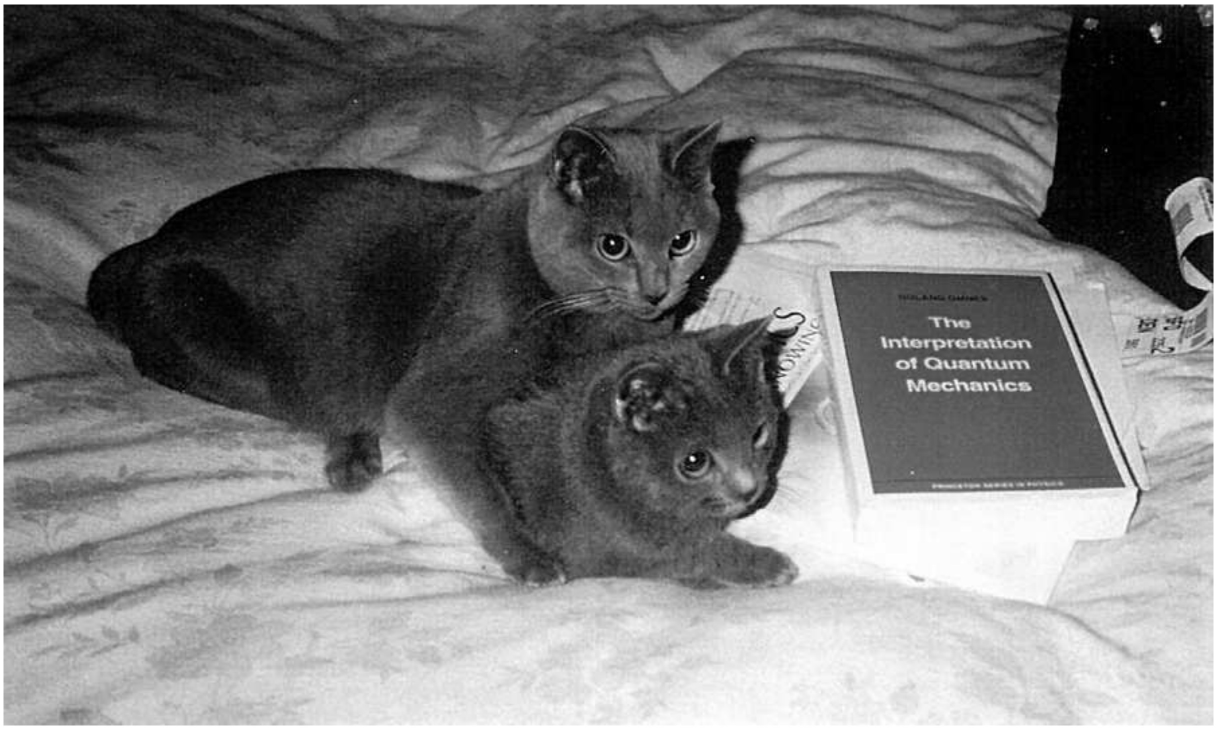
Aufgabe 68
Sei M ein Grundmodell, $(\mathbb{P}, \leq, 1_{\mathbb{P}}) \in M$ eine Forcing-Halbordnung, $G \in \mathbf{V}$ ein $\mathbb{P}$-Filter.
(a) Zeigen Sie: Sind x und y Elemente von $M[G]$, so ist auch $x \times y$ ein Element von $M[G]$.
(b) Seien $\dot{x}, \dot{y} \in M$ Namen für $x, y \in M[G]$. Geben Sie einen Namen $\dot{z} \in M$ für $\langle x, y \rangle \in M[G]$ an.
(c) Sei die Menge $\mathcal{D}$ der in $\mathbb{P}$ dichten Mengen abzählbar. Zeigen Sie, dass dann ein $\mathbb{P}$-generischer Filter $G \in \mathbf{V}$ existiert.

Aufgabe 69
(a) Sei M ein Grundmodell, $(\mathbb{P}, \leq, 1_{\mathbb{P}}) \in M$ eine Forcing-Halbordnung, G ein $\mathbb{P}$-Filter und es gelte $G \in M$. Zeigen Sie, dass dann $M[G] = M$ gilt.
(b) Sei M ein Grundmodell, $(\mathbb{P}, \leq, 1_{\mathbb{P}}) \in M$ eine verzweigte Forcing-Halbordnung, $G \in \mathbf{V}$ ein $\mathbb{P}$-generischer Filter. Zeigen Sie, dass $G \in M[G]$, nicht aber $G \in M$ gilt.

Aufgabe 70
Seien A und B einfache Terme. Zeigen Sie, dass dann auch $\emptyset$, $\mathbf{V}$, $A \cup B$, $A \backslash B$, $\bigcup A$, $A + 1$, $\{A, B\}$, $\mathscr{P}(A)$, $A \times B$, $\mathrm{dom}(A)$, $\mathrm{ran}(A)$ und ω einfach sind.

Aufgabe 71
Seien R, A und G einfache Terme, sei F durch R-Rekursion auf A mit Rekursionsvorschrift G definiert. Zeigen Sie, dass dann auch F ein einfacher Term ist.
Tipp: Schauen Sie sich Lemma 22.23 aus dem Mengenlehre-Skript (Teil 2) an.

Aufgabe 72 ("Who is who")
Wessen Katzen sind auf diesem Bild abgebildet? (Der Name auf dem Buch ist nicht der gesuchte!)



Einige Zitate zur Erbauung

David Hilbert
Die Mathematik ist das Instrument, welches die Vermittlung bewirkt zwischen Theorie und Praxis, zwischen Denken und Beobachten: sie baut die verbindende Brücke und gestaltet sie immer tragfähiger. Daher kommt es, daß unsere ganze gegenwärtige Kultur, soweit sie auf der geistigen Durchdringung und Dienstbarmachung der Natur beruht, ihre Grundlage in der Mathematik findet.

Bertrand Russell
Seit man begonnen hat, die einfachsten Behauptungen zu beweisen, erwiesen sich viele von ihnen als falsch.

Archimedes
Es gibt Dinge, die den meisten Menschen unglaublich erscheinen, die sich nicht mit Mathematik beschäftigt haben.

Leonardo da Vinci
Wer die erhabene Weisheit der Mathematik tadelt, nährt sich von Verwirrung.

G.C. Lichtenberg
Es ist unglaublich, wie unwissend die studirende Jugend auf Universitäten kommt, wenn ich nur 10 Minuten rechne oder geometrisire, so schläft 1/4 derselben sanfft ein.

M.W. Lomonossow
Die Mathematik muß man schon deswegen studieren, weil sie die Gedanken ordnet.

M. Stifel
Scherzhafte Beispiele haben manchmal größere Bedeutung als ernste.

H. Weyl
Die Logik ist die Hygiene, deren sich der Mathematiker bedient, um seine Gedanken gesund und kräftig zu erhalten.

J.E. Littlewood
Ein guter mathematischer Scherz ist immer besser als ein ganzes Dutzend mittelmäßiger gelehrter Abhandlungen.

B. Pascal
Die Mathematik als Fachgebiet ist so ernst, daß man keine Gelegenheit versäumen sollte, dieses Fachgebiet unterhaltsamer zu gestalten.