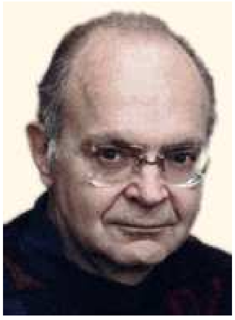
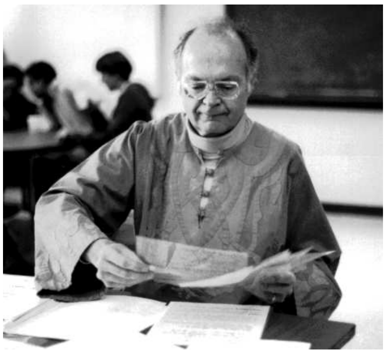
MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN
Arbeitsgruppe Mathematische Logik
Prof. Dr. Peter Koepke

Bonn, den 05.12.2002

Mengenlehre I WS 2002

Übungsaufgaben Folge 08, Abgabe: 12.12.2002 nach der Vorlesung





Knuth, Donald E., * Milwaukee, Wisconsin 10.1.1938.
"My main life's work has been to write *The Art of Computer Programming*, a work-still-in-progress that attempts to organize and summarize what is known about the vast subject of computer methods and to give it firm mathematical and historical foundations. (The three volumes published so far have been translated into many languages and more than a million copies have been sold.) As a researcher in computer science, I am more or less the "father" of several subareas called the analysis of algorithms, LR(k) and LL(k) parsing, attribute grammars, empirical study of programming languages, and literate programming. My best-known research in mathematics is represented by the Knuth–Bendix algorithm for word problems, the Schensted–Knuth correspondence between matrices and tableaux, and an analysis of the big bang that occurs in the evolution of random graphs. As a university professor I introduced a variety of new courses into the curriculum, notably Concrete Mathematics, and I supervised the dissertations of 28 excellent students. And as a programmer, I wrote software systems called TEX and METAFONT that are used for the majority of today's mathematical publications and now have more than a million users worldwide."
`http://www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/vita.html`

Definitionen und Sätze

Eine Kardinalzahl $\lambda > \omega$ heißt *unerreichbar*, falls sie eine reguläre Limeskardinalzahl ist, die gegen die Kardinalzahloperation $\gamma \in \mathrm{Card} \mapsto 2^\gamma \in \mathrm{Card}$ abgeschlossen ist, d.h., für $\gamma \in \mathrm{Card} \cap \lambda$ ist $2^\gamma < \lambda$.

Eine $\in$-Formel ϕ heißt Σ_1-Formel (resp. Π_1-Formel), falls ϕ von der Form $\exists x_1 \cdots x_n \psi$ (resp. $\forall x_1 \cdots x_n \psi$) ist, wobei ψ eine Σ_0-Formel ist.

Sei $x \in \mathbf{V}$. Dann gilt $\mathrm{TC}(x) := \bigcap\{z \mid x \subseteq z \wedge \mathrm{Trans}(z)\} \in \mathbf{V}$. $\mathrm{TC}(x)$ heißt *transitive Hülle von* x und ist die kleinste transitive Obermenge von x.

Für $\kappa \in \mathrm{Card}$ sei $H_\kappa := \{x \mid \overline{\overline{\mathrm{TC}(x)}} < \kappa\}$ die Klasse der Mengen von erblicher Mächtigkeit kleiner als κ.

Sei $t(\vec{x})$ ein $\in$-Term und W ein Term, so dass t und W keine Variablen gemeinsam haben. Die *Relativierung* t^W *von* t *auf* W ist definiert durch:
(a) Ist t eine Variable, so sei $t^W := t$.
(b) Ist $t = \{v \mid \phi(v, \vec{x})\}$, so sei $t^W = \{v \in W \mid \phi^W(v, \vec{x})\}$

Erster Gödelscher Unvollständigkeitssatz für ZF
Wenn ZF konsistent ist, so ist ZF nicht vollständig, d.h. es gibt einen $\in$-Satz ϕ, der weder aus ZF noch aus $\neg$ZF ableitbar ist.

Zweiter Gödelscher Unvollständigkeitssatz für ZF
Wenn ZF konsistent ist, so kann unter ZF nicht die Konsistenz von ZF bewiesen werden, d.h. es gilt $\mathsf{ZF} \not\models \dot{\mathrm{K}}\mathrm{on}(\ulcorner \mathsf{ZF} \urcorner)$.

Aufgaben

Aufgabe 46
Seien $W \subseteq W'$ transitive Terme. Zeigen Sie:
(a) Wenn $\phi(\vec{v})$ eine Σ_1-Formel ist, so ist ϕ aufwärts absolut, d.h. $\forall \vec{v} \in W\, (W \models \phi \rightarrow W' \models \phi)$.
(b) Wenn $\phi(\vec{v})$ eine Π_1-Formel ist, so ist ϕ abwärts absolut, d.h. $\forall \vec{v} \in W\, (W' \models \phi \rightarrow W \models \phi)$.

Aufgabe 47
Sei $\overline{\overline{x}} := \bigcap\{\alpha \mid \alpha \in \mathrm{On} \wedge \exists f\, f : \alpha \overset{\text{bij}}{\to} x\}$. Seien $W \subseteq W'$ transitive $\in$-Modelle von $\mathsf{ZFC} - \mathsf{POT}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\overline{\overline{x}} \leq \overline{\overline{x}}^{W'} \leq \overline{\overline{x}}^{W}$ für alle $x \in W$ gilt.

(b) Sei $\kappa \in \mathrm{Card}$. Zeigen Sie, das $\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{x}}^{H_\kappa}$ für alle $x \in H_\kappa$ gilt.

Aufgabe 48
Es gelte ZFC.

(a) Zeigen Sie $H_{\aleph_1} \models (\mathsf{ZFC} - \mathsf{POT}) + \neg\mathsf{POT}$, d.h., alle ZFC-Axiome außer dem Potenzmengenaxiom und die Negation des Potenzmengenaxioms gelten, wenn sie auf $H_{\aleph_1}$ relativiert werden.

(b) Zeigen Sie: Falls $\kappa = \omega$ gilt oder κ unerreichbar ist, so gilt $H_\kappa = \mathbf{V}_\kappa$.

Aufgabe 49
Geben Sie eine $\in$-Formel $\varphi(\lambda)$ an, die besagt, dass λ unerreichbar ist.

Aufgabe 50
Es gelte ZFC.

(a) Zeigen Sie: Falls κ unerreichbar ist, gilt $H_\kappa \models \mathsf{ZFC}$.

(b) Zeigen Sie: Falls κ unerreichbar ist, so ist die Eigenschaft "λ ist unerreichbar" H_κ-absolut.

(c) Schließen Sie aus (a): In ZFC kann die Existenz einer unerreichbaren Kardinalzahl nicht bewiesen werden.

Aufgabe 51
Es gelte ZFC. Sei $\phi_0(\vec{x}), \cdots, \phi_n(\vec{x})$ eine endliche Menge von $\in$-Formeln. Zeigen Sie, dass ein abzählbares Modell $W \in \mathbf{V}$ existiert, so dass $\phi_0(\vec{x}), \cdots, \phi_n(\vec{x})$ W-absolut sind.

Aufgabe 52 ("Who is who")
Wer ist auf diesem Bild abgebildet?

Homepage der Vorlesung:
`http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/Lectures/WiSe2002/Vorlesung.html`
Newsgroup: `uni-bonn.math.logik`