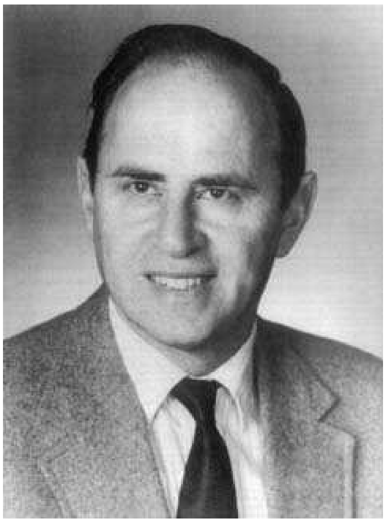
MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN
Arbeitsgruppe Mathematische Logik
Prof. Dr. Peter Koepke

Bonn, den 28.11.2002

Mengenlehre I WS 2002

Übungsaufgaben Folge 07, Abgabe: 05.12.2002 nach der Vorlesung



Cohen, Paul, amerikanischer Mathematiker, * Long Branch, New Jersey 2.4.1934; 1950–1953 Student am Brooklyn College; danach University of Chicago; 1954 Master; 1958 PhD. Seine PhD-Thesis mit Titel "Topics in the Theory of Uniqueness of Trigonometric Series" wurde von Antoni Zygmund betreut. 1958–59 Massachusetts Institute of Technology; 1959–61 Institute for Advanced Study in Princeton; 1961 Wechsel an die Stanford University; 1964 Ernennung zum Professor. 1964 Bôcher Memorial Preis für die Arbeit "On a conjecture of Littlewood and idempotent measures" (American Journal of Mathematics 82 (1960), 191–212). 1966 wurde Cohen auf dem Internationalen Mathematiker-Kongress in Moskau für seine fundamentale Arbeit über die Grundlagen der Mengenlehre die Fields Medaille verliehen. Cohen entwickelte die sogenannte "forcing"-Technik, um die Unabhängigkeit des Auswahlsaxioms und der Allgemeinen Kontinuumshypothese von den Axiomen der Mengenlehre zu beweisen. Damit löste Cohen das erste der berühmten 23 Hilbertschen Probleme. 1967 National Medal of Science. Cohen ist Mitglied der National Academy of Sciences. Cohen beschäftigte sich außerdem mit der Theorie der Differentialgleichungen und Harmonischer Analysis.

Definitionen und Sätze

Sei L eine formale Sprache.

(a) Eine erfüllbare Menge $\Phi \subseteq \mathrm{Fml}_0(L)$ heißt (L-) *Theorie*.

(b) Sei $\Phi \subseteq \mathrm{Fml}_0(L)$. Die Klasse $\mathrm{Mod}^L\Phi :\equiv \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \text{ ist eine } L\text{-Struktur} \wedge \mathfrak{A} \models \Phi\}$ heißt *Modellklasse* von Φ.

(c) Eine Klasse $\mathcal{K}$ von L-Strukturen heißt *axiomatisierbar*, falls es ein $\Phi \subseteq \mathrm{Fml}_0(L)$ gibt mit $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}^L\Phi$. Die Menge Φ heißt *Axiomensystem* für $\mathcal{K}$.

(d) Sei $\Phi \subseteq \mathrm{Fml}_0(L)$. Gilt $\mathfrak{A} \models \Phi$ für alle L-Modell $\mathfrak{A}$, so schreibt man auch $\models \Phi$.

(e) $L_{\text{Arith}} := (\emptyset, \{+, \times\}, \{0, 1\}, \{(+, 2), (\times, 2)\})$ ist die Sprache der Arithmetik.

(f) $L_{\text{Äq}} := (\{0\}, \emptyset, \emptyset, \{(0, 2)\})$ ist die Sprache der Theorie der Äquivalenzklassen, das zweistellige Relationssymbol von $L_{\text{Äq}}$ sei mit $\approx$ bezeichnet.

(g) $L_{\text{aoK}} := (\{0\}, \{+, \times\}, \{0, 1\}, \{(0, 2), (+, 2), (\times, 2)\})$ ist die Sprache der angeordneten Körper, das zweistellige Relationssymbol von L_{aoK} sei mit $<$ bezeichnet.

Satz von Löwenheim-Skolem

Sei L eine formale Sprache, Φ eine L-Theorie.

(a) Hat Φ beliebig große endliche Modelle, so hat Φ auch ein unendliches Modell.

(b) Hat Φ ein unendliches Modell, so hat Φ für jedes $\kappa \geq \overline{\overline{L}}$ ein Modell der Kardinalität κ.

Aufgaben

Aufgabe 41

Es sei L eine formale Sprache. Wir definieren die Menge $P(L)$ der Formeln von L, die in pränexer Normalform sind, rekursiv durch

$$\begin{aligned} P_0(L) &:\equiv \{\varphi \in \mathrm{Fml}(L) \mid \varphi \text{ ist quantorenfrei}\}; \\ P_{n+1}(L) &:\equiv P_n(L) \bigcup \{\dot{\exists} \dot{v}_i\, \varphi \mid \varphi \in P_n(L) \wedge i < \omega\} \bigcup \{\dot{\forall} \dot{v}_i\, \varphi \mid \varphi \in P_n(L) \wedge i < \omega\}; \\ P(L) &:\equiv \bigcup_{n<\omega} P_n(L). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass es zu jedem $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$ ein $\varphi' \in P(L)$ gibt mit $\models \dot{(}\varphi \dot{\equiv} \varphi'\dot{)}$.

Aufgabe 42
Es sei $(X, <)$ eine partielle Ordnung und $n < \omega$. Ferner seien $x_1, \dots, x_n \in X$. Dann heißt $(x_1, \dots, x_n)$ ein Weg in X (der Länge n) von x_1 nach x_n falls gilt:

(a) Für $0 < i < n$ ist x_i der direkte $<$-Vorgänger von x_{i+1}.

(b) Für $i \neq j$ gilt $x_i \neq x_j$.

Ein Weg $(x_1, \dots, x_n)$ heißt Kreis in X, falls $x_1 = x_n$ gilt. Die partielle Ordnung $(X, <)$ heißt kreisfrei, falls X keine nichttrivialen Kreise (d.h., keine Kreise der Länge größer als 1) besitzt.
Axiomatisieren Sie in der Sprache $L_{\text{Äq}}$ die Modellklasse $\mathcal{M}$ der kreisfreien partiellen Ordnungen. Hat $\mathcal{M}$ eine endliche Axiomatisierung, d.h., gibt es ein endliches $\Phi \subseteq \text{Fml}(L)$ mit $\text{frei}(\Phi) = \emptyset$, so dass Φ die Modellklasse $\mathcal{M}$ axiomatisiert?
Tipp: Überlegen (und zeigen) Sie: $\text{Mod}^L_{\text{Äq}}(\Psi)$ hat genau dann eine endliche Axiomatisierung, wenn es ein endliches $\Phi \subseteq \Psi$ gibt, das $\text{Mod}^L_{\text{Äq}}(\Psi)$ axiomatisiert.

Aufgabe 43 (Nichtstandardmodell von $\mathbb{R}$)
Wir erweitern die Sprache L_{aoK} zur Sprache $L_{\mathbb{R}}$, indem wir für jede reelle Zahl r ein neues Konstantensymbol $\dot{c}_r$ hinzufügen. Dann erweitern wir die L_{aoK}-Struktur $\mathbb{R}$ zu einer $L_{\mathbb{R}}$-Struktur $\tilde{\mathbb{R}}$ indem wir für $r \in \mathbb{R}$ das Konstantensymbol $\dot{c}_r$ durch r interpretieren. Schliesslich setzen wir $\Phi :\equiv \{\varphi \in \text{Fml}(L_{\mathbb{R}}) \mid \text{frei}(\varphi) = \emptyset \wedge \tilde{\mathbb{R}} \models \varphi\}$.

(a) Zeigen Sie, dass Φ ein Modell $\tilde{\mathbb{R}}^*$ der Kardinalität $(2^{\aleph_0})^+$ hat, deren Trägermenge $\tilde{R}^*$ zur Menge der reellen Zahlen disjunkt ist.

(b) Zeigen Sie, dass auf $R^* :\equiv (\tilde{R}^* \setminus \{\dot{c}^{\tilde{\mathbb{R}}^*} \mid r \in \mathbb{R}\}) \bigcup \mathbb{R}$ eine L_{aoK}-Struktur $\mathbb{R}^*$ definiert werden kann, so dass folgendes gilt: Für jedes $\varphi \in \text{Fml}(L_{\text{aoK}})$ und jede Belegung β mit Werten in $\mathbb{R}$ (!) gilt $\mathbb{R} \models \varphi[\beta]$ genau dann wenn $\mathbb{R}^* \models \varphi[\beta]$.
Schliessen Sie hieraus, dass $\mathbb{R}^*$ ein angeordneter Oberkörper des angeordneten Körpers $\mathbb{R}$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass es ein $x \in \mathbb{R}^*$ gibt mit $0 < x < r$ für jedes $r \in \mathbb{R}$.
Tipp: Wählen Sie ein $y \in R^* \setminus \mathbb{R}$ und setzen Sie $x = 1/y$, falls $r < y$ für alle $r \in \mathbb{R}$, bzw. $x = -1/y$, falls $r > y$ für alle $r \in \mathbb{R}$, bzw. $x = y - \sup\{r \in \mathbb{R} \mid r < y\}$, falls $0 < y < r$ für ein $r \in \mathbb{R}$, bzw. $x = y - \inf\{r \in \mathbb{R} \mid y < r\}$, falls $r < y < 0$ für ein $r \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 44
Untersuchen Sie, ob die folgenden Klassen von L_{Arith}-Strukturen axiomatisierbar sind:

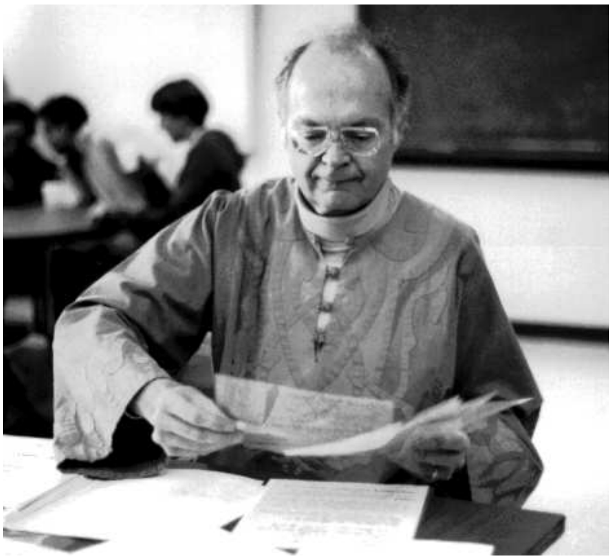
(a) die Klasse der Modelle der endlichen Körper.

(b) die Klasse der Modelle der unendlichen Körper.

(c) die Klasse der Modelle der abzählbaren Körper.

(d) die Klasse der Modelle der überabzählbaren Körper.

Aufgabe 45 ("Who is who")
Wer ist auf diesem Bild abgebildet?



Homepage der Vorlesung:
`http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/Lectures/WiSe2002/Vorlesung.html`
Newsgroup: `uni-bonn.math.logik`