MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN
Arbeitsgruppe Mathematische Logik
Prof. Dr. Peter Koepke

Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität

Bonn, den 5.1.2002

Mengenlehre I WS 2002

Übungsaufgaben Folge 04, Abgabe: 14.11.2002 nach der Vorlesung

Zermelo, Ernst Friedrich Ferdinand, Mathematiker, * Berlin 27.7.1871, †Freiburg im Breisgau 21.5.1953; 1905 Titular-Professor in Göttingen, ab 1910 Professor in Zürich, 1916–26 wegen eines Lungenleidens als Privatgelehrter im Schwarzwald tätig, anschließend bis 1935 und ab 1946 Honorarprofessor in Freiburg im Breisgau. Zermelo leistete Beiträge zur Variations- und Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie Physik und wurde besonders durch zwei mit der expliziten Formulierung des Auswahlaxioms verbundene Beweise des Wohlordnungssatzes bekannt sowie durch seine bis 1908 entwickelte Axiomatisierung der Cantorschen Mengenlehre, die später von A.A.Fraenkel und T.Skolem fortentwickelt wurde. Die axiomatische Mengenlehre förderte er mit weiteren Arbeiten und gab Werke von G.Cantor heraus.

Quelle: Brockhaus - Die Enzyklopädie: in 24 Bänden.

Definitionen

Seien A und R Klassenterme.

(a) R heißt *fundiert auf* A, wenn gilt:

$$\mathrm{Fund}(A,R) := R \subseteq A \times A \wedge \forall u(u \neq \emptyset \rightarrow \exists x(x \in u \wedge \forall y(y \in u \rightarrow \neg yRx))).$$

Bemerkung: Beachten Sie den Unterschied zur Definition der starken Fundiertheit $\mathrm{SF}(A,R)$.

(b) R heisst *extensional auf* A, wenn gilt:

$$\mathrm{Ext}(A,R) := R \subseteq A \times A \wedge \forall x,y((x \in A \wedge y \in A) \rightarrow (\{z \mid zRx\} = \{z \mid zRy\} \rightarrow x = y)).$$

Isomorphiesatz von Mostowski
Seien A und R Klassenterme mit $\mathrm{SF}(A,R)$ und $\mathrm{Ext}(A,R)$. Dann existieren eindeutige Klassenterme B und π, so dass gilt:

$$\mathrm{Trans}(B) \wedge \pi : A \overset{\text{bij}}{\rightarrow} B \wedge \forall x,y((x \in A \wedge y \in A) \rightarrow (xRy \leftrightarrow \pi(x) \in \pi(y))).$$

Der eindeutig bestimmte Isomorphismus π heißt *Mostowski-Isomorphismus von* A, das Bild B von A unter π heißt *Mostowski-Kollaps von* A.

Aufgaben

Aufgabe 21 (Induktionsschema für fundierte Relationen)
Seien A und R Klassenterme, $\phi(x,\vec{w})$ eine $\in$-Formel und R sei fundiert auf A.
Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\forall x \in A(\forall y(yRx \rightarrow \phi(y,\vec{w})) \rightarrow \phi(x,\vec{w})) \rightarrow \forall x \in A\, \phi(x,\vec{w}).$$

Aufgabe 22 (Rekursionsschema für stark fundierte Relationen)
Seien A, R und G Klassenterme, R sei stark fundiert auf A und es gelte $G : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$.

(a) Zeigen Sie, dass man effektiv einen Klassenterm F mit $F : A \rightarrow \mathbf{V}$ angeben kann, der die Rekursionsgleichung $\forall x \in A\, F(x) = G(\{(z, F(z)) \mid zRx\})$ erfüllt.

(b) Zeigen Sie, dass die durch den obige Klassenterm F definierte Funktion eindeutig bestimmt ist

Tipp: Gehen Sie analog zum Beweis des Rekursionsschemas für $(\mathrm{On}, <)$ aus der Vorlesung vor.

Aufgabe 23
Durch $\in$-Rekursion kann eine Funktion $\mathrm{rg} : \mathbf{V} \rightarrow \mathrm{On}$ mit $\mathrm{rg}(x) = \mathrm{lub}\{\mathrm{rg}(y) \mid y \in x\}$ definiert werden. Geben Sie den konkreten Klassenterm $G : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ an, durch den man per $\in$-Rekursion die Funktion rg erhält. Zeigen Sie, dass On der Wertebereich von rg ist, d.h. es gilt $\mathrm{ran}(\mathrm{rg}) = \mathrm{On}$.

Aufgabe 24
Zeigen Sie

(a) $x \in y \to \mathrm{rg}(x) < \mathrm{rg}(y)$,
(b) $x \subseteq y \to \mathrm{rg}(x) \leq \mathrm{rg}(y)$,
(c) $\forall \alpha \in \mathrm{On}\ \mathrm{rg}(\alpha) = \alpha$,
(d) $\forall \alpha \in \mathrm{On}\ \mathrm{rg}(\mathbf{V}_\alpha) = \alpha$,
(e) $\forall \alpha \in \mathrm{On}\ \mathbf{V}_\alpha = \{x \,|\, \mathrm{rg}(x) < \alpha\}$.

Aufgabe 25

(a) Zeigen Sie, dass die $\in$-Relation, eingeschränkt auf eine transitive Klasse A, extensional ist
(b) Zeigen Sie, dass partielle Ordnungen, lineare Ordnungen und strikte lineare Ordnung extensional sind. Verwenden Sie dabei die Definitionen von Übungsblatt 2.
(c) Geben Sie eine starke Wohlordnung der Klasse $\mathrm{On} \times \mathrm{On}$ an (Beweis!).

Aufgabe 26
Seien R und A Klassenterme, R eine starke Wohlordnung auf A.

(a) Zeigen Sie, dass A entweder R-$\in$-isomorph zu einer Ordinalzahl oder zur Klasse der Ordinalzahlen ist.
(b) Gilt dies auch, wenn R nur eine Wohlordnung ist, d.h. nur $\mathrm{WO}(A, R)$ vorausgesetzt wird?
(c) Zeigen Sie, dass keine ordnungserhaltende Abbildung von einer größeren in eine kleinere Ordinalzahl existiert.

Bemerkung: Die durch (a) bestimmte Ordinalzahl, bzw. die Klasse der Ordinalzahlen wird als *Ordnungstyp von* (A, R) bezeichnet.

Aufgabe 27 ("Erkenne die Logiker")
Wer ist auf diesem Bild abgebildet?

[redacted]

Homepage der Vorlesung:
`http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/Lectures/WiSe2002/Vorlesung.html`
Newsgroup: `uni-bonn.math.logik`