MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN
Arbeitsgruppe Mathematische Logik
Prof. Dr. Peter Koepke

Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität

Bonn, den 31.10.2002

Mengenlehre I WS 2002

Übungsaufgaben Folge 03, Abgabe: 7.11.2002 in das Fach von Stefan Bold in der Be1.

Bertrand Arthur William, 3. Earl **Russell**, britischer Logiker, Philosoph und Schriftsteller, * Trelleck (County Gwent) 18.5.1872, †Plas Penrhyn (bei Penrhyndeudraeth, County Gwynedd) 2.2.1970). Die ersten Arbeiten Russells galten der Philosophie der Mathematik, insbesondere der Geometrie. In seiner 1897 veröffentlichten Dissertation "An essay on the foundations of geometry" vertrat er in Anbetracht der gerade aufgekommenen nichteuklidischen Geometrie in modifizierter Form kantische Thesen, wobei er die Bedeutung der projektiven Geometrie hervorhob. Später entwickelte sich Russell zu einem wichtigen Exponenten des Logizismus. Der Ausführung des logizistischen Programms sollten die 1910–13 erschienenen, zusammen mit A.N.Whitehead verfaßten "Principia Mathematica" (3 Bände) dienen, was aber auch nach Meinung der Verfasser u.a. in Anbetracht des Reduzibilitätsaxioms nicht vollständig gelang. Russells philosophische Beiträge galten v.a. erkenntnistheoretischen und sprachphilosophischen Fragen. Sein Aufsatz "On denoting" (1905) gilt noch heute als Meisterwerk der Sprachanalyse und als erste bedeutende Arbeit zur Philosophie der idealen Sprache, welche die Umgangssprache mit der Logik und Mathematik entlehnten, formalen Methoden untersucht. Russell erregte durch sein Eintreten gegen jegliche Art von Unterdrückung, für Pazifismus ("Unarmed victory", 1953), Frauenstimmrecht und freie Sexualmoral immer wieder Anstoß. Zusammen mit A.Einstein initiierte er die Pugwash-Bewegung, 1963 gründete er das B.-Russell-Friedensinstitut, und mit J.-P.Sartre rief er das "Vietnam-Tribunal" ins Leben (Russell-Tribunal).

Gekürzt aus: Brockhaus - Die Enzyklopädie: in 24 Bänden.

Definitionen

Definiere für $\alpha \in \mathrm{On}$ durch $<$-Rekursion auf On die Abbildung $\alpha^{\cdot} : \mathrm{On} \to \mathbf{V}$ durch

I. $\alpha^0 := 1$,
II. $\alpha^{\beta+1} := \alpha^\beta \cdot \beta$,
III. $\alpha^\lambda := \bigcup\{\alpha^\beta \mid \beta < \lambda\} (= \sup_{\beta<\lambda} \alpha^\beta)$, für $\mathrm{Lim}(\lambda)$.

Seien A und R Klasssenterme.

(a) R heißt *stark fundiert auf* A, geschrieben $\mathrm{SF}(A, R)$, falls gilt:
 (SF1) $R \subseteq A \times A$,
 (SF2) $\forall u(u \neq \emptyset \to \exists x(x \in u \wedge \forall y(y \in u \to \neg yRx)))$,
 (SF3) $\forall x \exists y(x \in y \wedge \forall z_0, z_1((z_0 R z_1 \wedge z_1 \in y) \to z_0 \in y)$.
(b) R heißt *Wohlordnung auf* A, geschrieben $\mathrm{WO}(A, R)$, falls gilt:
 (i) $\mathrm{SLO}(A, R)$,
 (ii) Für jeden Klassenterm B gilt $(B \neq \emptyset \wedge B \subseteq A) \to \exists x(x \in B \wedge \forall y(yRx \to y \notin B))$.
(c) R heißt *starke Wohlordnung auf* A, geschrieben $\mathrm{SWO}(A, R)$, falls gilt:
 (i) $\mathrm{WO}(A, R)$,
 (ii) $\forall x(x \in A \to \{y \mid y \in A \wedge yRx\} \in \mathbf{V})$.

Seien R, A, und B Klassenterme mit $\mathrm{wPO}(A, R)$ und $B \subseteq A$.

(a) $x \in \mathbf{V}$ heißt *R-kleinstes Element von* B, falls gilt: $x \in B \wedge \forall b \in B\, xRb$.
(b) Hat die Klasse $\{s \mid s \in A \setminus B \wedge \forall b \in B\, bRs\}$ ein kleinstes Element, so wird dieses mit $\mathrm{lub}\, B$ bezeichnet und heißt *kleinste obere Schranke von* B.

Aufgaben

Aufgabe 14

(a) Zeigen Sie durch transfinite Induktion (Ordinalzahlinduktion): Addition und Multiplikation von Ordinalzahlen sind assoziativ. Außerdem gelten folgende Monotonieregeln: Falls $\beta < \gamma$, so $\beta + \alpha \leq \gamma + \alpha$ sowie $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$ und $\beta \cdot \alpha \leq \gamma \cdot \alpha$ sowie (falls $\alpha \neq 0$) $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$.
(b) Rechtfertigen Sie anhand des Rekursionssatzes aus der Vorlesung, dass es eine Funktion $f : \omega \to \omega$ gibt mit $f(n) = n!$. Geben Sie hierzu einen Klassenterm G (in der Form $G = \{u \mid \varphi\}$) an mit $G : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, so dass f die Einschränkung des durch $<$-Rekursion auf On und die Rekursionsvorschrift G bestimmten kanonischen Terms F auf ω ist. Wählen Sie G so, dass F die Fakultätsfunktion mit der üblichen Definition $(F(\alpha + 1) = F(\alpha) \cdot (\alpha + 1))$ auf ganz On fortsetzt, wobei an Limesstellen δ gelten soll $F(\delta) = \sup_{\alpha<\delta} F(\alpha)$.

Aufgabe 15

(a) Zeigen Sie $2^\omega = \omega$.

(b) Das Resultat aus (a) kann so gedeutet werden: ω ist ein Fixpunkt der Funktion $\alpha \mapsto 2^\alpha$. Zeigen Sie, dass *jede* monotone und stetige Funktion $F\colon \mathrm{On} \to \mathrm{On}$ beliebig große Fixpunkte hat, genauer: Sei $F\colon \mathrm{On} \to \mathrm{On}$ ordnungstreu und es gelte $F(\delta) = \sup_{\alpha<\delta} F(\alpha)$ für jede Limesordinalzahl δ. Dann existiert zu jedem $\gamma \in \mathrm{On}$ eine Limesordinalzahl $\delta > \gamma$ mit $F(\delta) = \delta$.
Was bedeutet dieses Resultat für die Funktionen $\alpha \mapsto \xi + \alpha$, $\alpha \mapsto \xi \cdot \alpha$, $\alpha \mapsto \xi^\alpha$?

Aufgabe 16

Zeigen Sie, dass jede Ordinalzahl $\beta \in \mathrm{On}$ eine eindeutige Darstellung der Form $\beta = \omega^2 \cdot \alpha + \omega \cdot m + n$ besitzt, wobei $n, m \in \omega$ und $\alpha \in \mathrm{On}$ ist.

Aufgabe 17

(a) Zeigen Sie $\mathrm{SF}(\mathbf{V}, \in)$ und $\mathrm{SF}(\mathrm{On}, <)$.

(b) Seien A und R Klassenterme. Beweisen Sie $\mathrm{SWO}(A,R) \leftrightarrow \mathrm{SLO}(A,R) \wedge \mathrm{SF}(A,R)$.

Aufgabe 18

Seien a und r Mengen. Beweisen Sie, dass in diesem Fall folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) $\mathrm{WO}(a,r)$,

(b) $\mathrm{SWO}(a,r)$.

Aufgabe 19

Beweisen Sie in ZFC, dass jeder Filter $\mathcal{F}$ auf einer Menge S zu einem Ultrafilter auf S erweitert werden kann. Verwenden Sie dabei nicht das Zornsche Lemma o.ä., sondern benutzen Sie direkt das Auswahlaxiom und den Rekursionssatz.
Tipp: Gehen Sie vor wie bei dem Beweis, dass unter ZFC jede Menge zu einer Ordinalzahl gleichmächtig ist: Bilden Sie rekursiv Mengen $X_\alpha \subseteq S$, so dass $\{X_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$ ein Ultrafilter ist, der den Filter $\mathcal{F}$ erweitert.

Aufgabe 20 ("Erkenne den Logiker")

Wer ist auf diesem Bild abgebildet?

Homepage der Vorlesung:
`http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/Lectures/WiSe2002/Vorlesung.html`
Newsgroup: `uni-bonn.math.logik`