MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN
Arbeitsgruppe Mathematische Logik
Prof. Dr. Peter Koepke

Bonn, den 24.10.2002

Mengenlehre I WS 2002

Übungsaufgaben Folge 02, Abgabe: 31.10.2002 nach der Vorlesung

Cantor, Georg, deutscher Mathematiker dänischer Herkunft, * Petersburg 3.3.1845, †Halle (Saale) 6.1.1918; seit 1872 Professor in Halle. Mit seinen Theorien der Punktmengen und der transfiniten Zahlen (1871-84) begründete er die für die moderne Mathematik grundlegende Mengenlehre. Cantor entwickelte u.a. das nach ihm benannte Diagonalverfahren. Er sprach als Erster die Kontinuumshypothese aus und bewies, dass Punktmengen und Kontinua verschiedener Dimension äquivalent sein können. Cantor konnte seine Vorstellungen insbesondere über das aktual Unendliche erst nach heftigen Auseinandersetzungen gegen seine Kritiker, v.a. gegen L. Kronecker, durchsetzen. Mit dem Auffinden mengentheoretischen Antinomien hat sich zwar seine Fassung der Mengenlehre als unhaltbar erwiesen, aber die dann entwickelte axiomatische Mengenlehre hat seine Begriffsbildungen sowie seine Vorstellungen auf veränderter Grundlage bestätigt.

Quelle: Brockhaus - Die Enzyklopädie: in 24 Bänden.

Definitionen

Seien A, B und R Klassenterme.

(a) ${}^{A}B := \{f \mid f : A \to B\}$ ist die Klasse aller Funktionen von A nach B.

(b) $\mathrm{Ref}(R) := \mathrm{Rel}(R) \wedge \forall x \in \mathrm{field}(R)(xRx)$ bedeutet: R ist eine *reflexive* Relation.

(c) $\mathrm{Irref}(R) := \mathrm{Rel}(R) \wedge \forall x \in \mathrm{field}(R)(\neg xRx)$ bedeutet: R ist eine *irreflexive* Relation.

(d) $\mathrm{Sym}(R) := \mathrm{Rel}(R) \wedge \forall x, y(xRy \to yRx)$ bedeutet: R ist eine *symmetrische* Relation.

(e) $\mathrm{Antisym}(R) := \mathrm{Rel}(R) \wedge \forall x, y((xRy \wedge yRx) \to x = y)$ bedeutet: R ist eine *antisymmetrische* Relation.

(f) $\mathrm{Tra}(R) := \mathrm{Rel}(R) \wedge \forall x, y, z((xRy \wedge yRz) \to xRz)$ bedeutet: R ist eine *transitive* Relation.

(g) $\mathrm{Con}(R) := \mathrm{Rel}(R) \wedge \forall x, y((x \in \mathrm{field}(R) \wedge y \in \mathrm{field}(R)) \to (xRy \vee yRx \vee x = y))$ bedeutet: R ist eine *konnexe* Relation.

(h) $\mathrm{wPO}(R) := \mathrm{Ref}(R) \wedge \mathrm{Tra}(R)$ bedeutet: R ist eine *schwache partielle Ordnung.*

(i) $\mathrm{PO}(R) := \mathrm{wPO}(R) \wedge \mathrm{Antisym}(R)$ bedeutet: R ist eine *partielle Ordnung.*

(j) $\mathrm{LO}(R) := \mathrm{PO}(R) \wedge \mathrm{Con}(R)$ bedeutet: R ist eine *lineare Ordnung.*

(k) $\mathrm{SLO}(R) := \mathrm{Irref}(R) \wedge \mathrm{Tra} \wedge \mathrm{Con}(R)$ bedeutet: R ist eine *strikte lineare Ordnung.*

(l) $\mathrm{wPO}(A, R) := \mathrm{wPO} \wedge \mathrm{field}(R) = A$ bedeutet: R ist eine *schwache partielle Ordnung auf A*. Analog für $\mathrm{PO}(A, R)$, $\mathrm{LO}(A, R)$ und $\mathrm{SLO}(A, R)$.

(m) Sei R eine partielle Ordnung auf A, $B \subseteq A$.
s heißt *obere R-Schranke von B*, wenn gilt $s \in A \wedge \forall x \in B(xRs \vee x = s)$.
s heißt *R-maximales Element von B*, wenn gilt $s \in B \wedge \forall x \in B(sRx \to x = s)$.
B heißt *R-Kette in A*, wenn gilt $B \neq \emptyset \wedge \mathrm{LO}(B, R)$.
Ist R aus dem Zusammenhang klar, so sagt man auch einfach *obere Schranke* statt *obere R-Schranke*, analog maximales Element und Kette.

(n) Sei S eine nichtleere Menge. $\mathcal{F} \subseteq \mathscr{P}(S)$ ist ein *Filter auf S*, falls gilt:

1. Die leere Menge $\emptyset$ ist kein Element des Filters $\mathcal{F}$.
2. $\mathcal{F}$ ist bezüglich Obermengen abgeschlossen, d.h. es gilt $\forall X, Y \subseteq S((X \in \mathcal{F} \wedge X \subseteq Y) \to Y \in \mathcal{F})$.
3. $\mathcal{F}$ ist unter endlichen Schnitten abgeschlossen, d.h. es gilt $\forall X, Y \in \mathcal{F}(X \cap Y \in \mathcal{F})$.

Ein Filter, der zu jeder Teilmenge X von S entweder diese selbst, oder ihr Komplement $S \backslash X$ enthält, d.h. für den gilt $\forall X \subseteq S(X \in \mathcal{F} \vee S \backslash X \in \mathcal{F})$, heißt *Ultrafilter auf S*.

Das Zornsche Lemma

Ist $(P, <)$ eine nicht-leere, partiell geordnete Menge (d.h. $\mathrm{PO}(P, <)$) und jede Kette in P hat eine obere Schranke, so hat P ein maximales Element.

Das Hausdorffsche Maximalitätsprinzip

Ist $(P, <)$ eine nicht-leere, partiell geordnete Menge (d.h. $\mathrm{PO}(P, <)$), so ist jede Kette in P Teilmenge einer *maximalen* Kette, d.h. einer Kette C, so dass für alle $x \in P \backslash C$ die Menge $C \cup \{x\}$ keine Kette mehr ist.

Aufgaben

Aufgabe 7
Definiere auf $\mathbb{N}$ eine Relation $\in'$ durch $m \in' n :\Leftrightarrow \exists s, r \in \mathbb{N}(n = s \cdot 2^{m+1} + 2^m + r \wedge r < 2^m)$.

(a) Welche Axiome der Mengenlehre erfüllt die Struktur $(\mathbb{N}, \in')$?

(b) Wie sehen die Ordinalzahlen in dieser Struktur aus?

Aufgabe 8
Es sei A ein Klassenterm. Zeigen Sie: $(\mathrm{Trans}(A) \leftrightarrow \mathrm{Trans}(\mathscr{P}(A)))$.

Aufgabe 9
Es sei A ein Klassenterm. Zeigen Sie:

(a) $\big((A \subseteq \mathrm{On} \wedge \mathrm{Trans}(A)) \rightarrow (A \in \mathrm{On} \vee A = \mathrm{On})\big)$

(b) $\big(A \subseteq \mathrm{On} \rightarrow ((\bigcup A \in \mathrm{On} \vee \bigcup A = \mathrm{On}) \wedge$
$\forall \alpha, \beta\, ((\alpha \in A \wedge A \subseteq \beta) \rightarrow (\alpha \leq \bigcup A \wedge \bigcup A \leq \beta)))\big)$
Ist A also eine beschränkte Teilklasse von On, so ist $\bigcup A$ die kleinste obere Schranke von A.

Aufgabe 10
Es sei A ein Klassenterm. Wir setzen $\bigcap A := \{x \mid \forall y\, (y \in A \rightarrow x \in y)\}$. Zeigen Sie:

(a) $\bigcap \emptyset = V$ und $\bigcap V = \emptyset$

(b) $(A \neq \emptyset \rightarrow \bigcap A \in V)$

(c) $\big((A \subseteq \mathrm{On} \wedge A \neq \emptyset) \rightarrow (\bigcap A \in A \wedge \forall \alpha\, (\alpha \in A \rightarrow \bigcap A \leq \alpha))\big)$
Ist A also eine nicht leere Klasse von Ordinalzahlen, so ist $\bigcap A$ das kleinste Element von A.
Tip: Zeigen Sie, dass (im Fall $\emptyset \neq A \subseteq \mathrm{On}$) $\bigcap A \in \mathrm{On}$ gilt; argumentieren Sie, dass A ein kleinstes Element $\min A$ hat, und führen Sie die Annahme $\bigcap A < \min A$ zum Widerspruch.

Aufgabe 11

(a) Formalisieren Sie in der Sprache der Mengenlehre den Begriff "Topologischer Raum".

(b) Geben Sie alle Topologien auf 2 an und beweisen Sie, dass 2 mit jeder dieser Topologien ein topologischer Raum ist.

Aufgabe 12
Arbeiten Sie in ZF.

(a) Folgern Sie aus dem Zornschen Lemma das Auswahlaxiom in der in der Vorlesung eingeführten Form.

(b) Weisen Sie die Äquivalenz von Zornschem Lemma und Hausdorffschen Maximalitätsprinzip nach.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe des Zornschen Lemmas, dass jeder Filter auf einer Menge S zu einem Ultrafilter auf S erweitert werden kann.

Aufgabe 13 ("Erkenne den Logiker")
Wer ist auf diesem Bild abgebildet?

Homepage der Vorlesung:
`http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/Lectures/WiSe2002/Vorlesung.html`
Newsgroup: `uni-bonn.math.logik`