MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN
Arbeitsgruppe Mathematische Logik
Prof. Dr. Peter Koepke

http://www.LiB.uni-bonn.de

Bonn, den 06.06.2002

Einführung in die Mathematische Logik SS 2002

Übungsaufgaben, Folge 7, Abgabe: 13.06 nach der Vorlesung

Aufgabe 1

(a) Für jeden S-Ausdruck φ sei $\mathrm{var}(\varphi)$ die Menge der Variablen in φ und $\mathrm{frei}(\varphi)$ die Menge der freien Variablen in φ. Geben Sie eine formale Definition der Mengen var und frei an und rechtfertigen Sie diese anhand des Rekursionssatzes für das Ausdruckskalkül.

(b) Um die Definition der Modellbeziehung $(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi$ korrekt durchzuführen, geben Sie eine rekursive Definition einer Hilfsfunktion $B_{\mathfrak{A}}(\varphi)$ an, welche die intuitive Bedeutung

$$B_{\mathfrak{A}}(\varphi) = \{\gamma \mid \gamma \text{ ist eine Belegung in } \mathfrak{A} \text{ und } (\mathfrak{A}, \gamma) \models \varphi\}$$

hat, und definieren sie hieraus $(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi$.

Aufgabe 2

Für jeden S-Ausdruck φ definiere die Menge $\mathrm{geb}(\varphi)$ der gebundenen Variablen von φ durch $\mathrm{geb}(\varphi) = \emptyset$, falls φ ein atomarer Ausdruck ist, und $\mathrm{geb}((\psi \wedge \chi)) = \mathrm{geb}((\psi \vee \chi)) = \mathrm{geb}(\psi) \cup \mathrm{geb}(\chi)$ sowie $\mathrm{geb}(\neg\psi) = \mathrm{geb}(\psi)$ und $\mathrm{geb}(\exists v_i\, \psi) = \mathrm{geb}(\forall v_i\, \psi) = \mathrm{geb}(\psi) \cup \{v_i\}$.

(a) Berechnen Sie $\mathrm{geb}(\varphi)$ für die folgenden Ausdrücke φ.

(α) $Rfv_0v_1gv_2$

(β) $\forall v_0\, \forall v_1\, \forall v_2\, \exists v_3\, (v_3 = gv_2 \;\rightarrow\; (Rfv_0v_1v_3 \;\wedge\; v_1 = v_4))$

(γ) $\exists v_3\, (c = v_4 \;\leftrightarrow\; \exists v_6\, \neg v_6 = fgv_0v_6)$.

Hierbei sei R ein zweistelliges Relationssymbol, f ein zweistelliges und g ein einstelliges Funktionssymbol, c sei ein Konstantensymbol.

(b) Zeigen Sie, daß $\mathrm{var}(\varphi) = \mathrm{frei}(\varphi) \cup \mathrm{geb}(\varphi)$ für jeden S-Ausdruck φ gilt. Gilt stets $\mathrm{frei}(\varphi) \cap \mathrm{geb}(\varphi) = \emptyset$?

Aufgabe 3

Es sei S eine formale Sprache. Wir definieren die Menge $P(S)$ der Formeln von S, die in pränexer Normalform sind, rekursiv durch

$$\begin{aligned} P_0(S) &:\equiv \{\varphi \in \mathrm{Fml}(S) \mid \varphi \text{ ist quantorenfrei}\};\\ P_{n+1}(S) &:\equiv P_n(S) \cup \{\exists v_i\, \varphi \mid \varphi \in P_n(S) \;\wedge\; i < \omega\} \cup \{\forall v_i\, \varphi \mid \varphi \in P_n(S) \;\wedge\; i < \omega\};\\ P(S) &:\equiv \bigcup_{n<\omega} P_n(S). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass es zu jedem $\varphi \in \mathrm{Fml}(S)$ ein $\varphi' \in P(S)$ gibt mit $\models (\varphi \leftrightarrow \varphi')$.

Definition:
$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien S-Strukturen. Eine Abbildung $\pi : A \to B$ ist ein *Isomorphismus von* $\mathfrak{A}$ *auf* $\mathfrak{B}$, kurz $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, wenn gilt:

1. π ist eine Bijektion von A auf B.
2. Für $r \in R_n$ und $a_1, \cdots, a_n \in A$ gilt:
$$r^{\mathfrak{A}}(a_1, \cdots, a_n) \quad \Leftrightarrow \quad r^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \cdots, \pi(a_n)).$$
3. Für $f \in F_n$ und $a_1, \cdots, a_n \in A$ gilt:
$$\pi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \cdots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \cdots, \pi(a_n)).$$
4. Für $c \in C$ gilt $\pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen *isomorph*, kurz $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, genau dann, wenn es einen Isomorphismus $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ gibt. Ein *Automorphismus von* $\mathfrak{A}$ ist ein Isomorphismus $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}$ von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}$.

Definition:
$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien S-Strukturen. Dann heißt $\mathfrak{A}$ *Substruktur* von $\mathfrak{B}$, kurz $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, wenn gilt:

1. $A \subseteq B$.
2. Für $r \in R_n$ gilt $r^{\mathfrak{A}} = r^{\mathfrak{B}} \cap A^n$.
3. Für $f \in F_n$ und $a_1, \cdots, a_n \in A$ gilt $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \cdots, a_n) = f^{\mathfrak{B}}(a_1, \cdots, a_n)$.
4. Für $c \in C$ gilt $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$.

Aufgabe 4
(a) Zeigen Sie, daß die Automorphismen einer Struktur $\mathfrak{A}$ eine Gruppe bilden.
(b) Sei $\mathcal{U}$ eine Untergruppe der Automorphismengruppe einer Struktur $\mathfrak{A}$. Sei F die Menge der Fixpunkte von $\mathfrak{A}$ unter $\mathcal{U}$, d.h. $F = \{a \in A \mid \forall \pi \in \mathcal{U}(a = \pi(a))\}$. Zeigen Sie, daß $\mathfrak{F}$, die Struktur mit Träger F und den auf F eingeschränkten Relationen und Funktionen von $\mathfrak{A}$, eine Substruktur von $\mathfrak{A}$ ist.
(c) Geben Sie eine unendliche Struktur an, deren einziger Automorphismus die Identität ist.
(d) Geben Sie eine abzählbare Struktur mit überabzählbarer Automorphismengruppe an.

Homepage der Vorlesung:
`http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/Lectures/SoSe2002/Vorlesung.html`
Newsgroup: `uni-bonn.math.logik`