MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN
Arbeitsgruppe Mathematische Logik
Prof. Dr. Peter Koepke

http://www.LiB.uni-bonn.de

Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität

Bonn, den 24.05.2002

Einführung in die Mathematische Logik SS 2002

Übungsaufgaben, Folge 6, Abgabe: 07.06.2002 nach der Vorlesung.

Aufgabe 1
Formalisieren Sie jeweils über einer geeigneten Symbolmenge S:

(a) die Gruppenaxiome;
(b) die Axiome einer Äquivalenzrelation;
(c) die Axiome der linearen Ordnungen, die dicht (d.h., zwischen je zwei Elementen liegt ein weiteres) und unberandet (d.h., zu jedem Element gibt es ein größeres und ein kleineres) sind;
(d) die Körperaxiome;
(e) für jede Primzahl p die Axiome der Körper der Charakteristik p;
(f) die Axiome der Körper der Charakteristik 0;
(g) die Axiome der algebraisch abgeschlossenen Körper;
(h) die Vektorraumaxiome.

Aufgabe 2
Geben Sie einen Kalkül an, der die Aussagen der Aussagenlogik erzeugt und eindeutige Zerlegung besitzt. Beweisen Sie diese Eigenschaft.

Aufgabe 3
Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, daß es im abgeschlossenen Intervall $I = [a, b]$ einen Punkt c gibt mit $c \notin \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Folgern Sie hieraus, daß I und damit $\mathbb{R}$ überabzählbar sind. (Hinweis: Durch Induktion definiere man eine Folge nichtleerer, abgeschlossener Intervalle $I = I_0 \supseteq I_1 \supseteq \cdots$ mit $f(n) \notin I_{n+1}$ und verwende, daß $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$ ist.)

Aufgabe 4
Es sei $n \geq 1$ und $t_1, \cdots, t_n$ seien Terme über einem Alphabet $\mathbb{A}$. Zeigen Sie, daß an jeder Stelle im Wort $t_1 \cdots t_n$ genau ein Term beginnt, d.h. ist $1 \leq i \leq$ Länge von $t_1 \cdots t_n$, so gibt es eindeutig bestimmte Wörter α, β und einen eindeutigen Term t, so daß $t_1 \cdots t_n = \alpha t \beta$ gilt und α die Länge $i - 1$ hat.

Homepage der Vorlesung:
`http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/Lectures/SoSe2002/Vorlesung.html`
Newsgroup: `uni-bonn.math.logik`