MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN
Prof. Dr. Peter Koepke

Bonn, den 07.05.2002

Einführung in die Mathematische Logik SS 2002

Übungsaufgaben, Folge 4, Abgabe: 16.05.2002 vor der Vorlesung

Aufgabe 1
Zeigen Sie, daß die folgenden Regeln im Aussagenkalkül über $\{\to, \neg\}$ ableitbar sind:

$$\frac{\begin{array}{l}(A \vee B)\\(A \to C)\\(B \to C)\end{array}}{C}; \qquad \frac{(A \vee B)}{(B \vee A)}; \qquad \frac{A}{(A \vee B)}; \qquad \frac{(A \wedge B)}{A}; \qquad \frac{(A \wedge B)}{(B \wedge A)}.$$

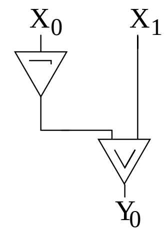
Hierbei steht $(A \wedge B)$ als Abkürzung für $\neg(A \to \neg B)$ und $(A \vee B)$ als Abkürzung für $(\neg A \to B)$.

Aufgabe 2

(a) Modellieren Sie in der Sprache $\{\vee, \wedge, \neg\}$ folgende 2-wertige Funktionen:
   - (i) Y_0 sei die Summe bei der binären Addition von X_0 und X_1.
     (Beachten Sie: die Summe von 1 plus 1 ist 0 mit Übertrag 1.)
   - (ii) Y_1 sei der Übertrag bei der binären Addition von X_0 und X_1.
   - (iii) S_0, S_1 sei die binäre Darstellung der Summe von X_0, X_1 und X_2.

(b) Zeichnen Sie einen logischen Schaltkreis, der die Addition dreier binärer Variablen X_0, X_1 und X_2 modelliert. Benutzen Sie dabei nur die Schaltelemente $\triangledown_{\vee}$, $\triangledown_{\wedge}$ und $\triangledown_{\neg}$, die den aussagenlogischen Verknüpfungen $\vee$, $\wedge$ und $\neg$ entsprechen.

Ein Beispiel: Die Funktion $Y_0 = (X_0 \to X_1)$ kann durch folgenden logischen Schaltkreis dargestellt werden:



Aufgabe 3
Formalisieren Sie die folgenden moral-philosophischen Aussagen in der Sprache des Aussagenkalküls, und beweisen sie im Aussagenkalkül daraus die Aussage
„Entweder ist Pflichtgefühl nicht die höchste Tugend, oder der Hedonismus hat unrecht.“

> „Wenn Erotizismus keine Tugend ist, so hat der Hedonismus unrecht. Andererseits, wenn Erotizismus eine Tugend ist, dann ist entweder Pflichtgefühl nicht die höchste Tugend, oder die wichtigste Pflicht ist es, nach Genuß zu streben. Aber das Streben nach Genuß ist natürlich nicht die wichtigste Pflicht.“

Aufgabe 4

Der *duale Ausdruck* A^d zu einem aussagenlogischen Ausdruck A in der Sprache $\{\wedge, \vee, \neg\}$ wird folgendermaßen gebildet: alle logischen UND werden in ODER umgewandelt und umgekehrt. Außerdem wird bei allen negierten Variablen die Negation entfernt, nicht negierte Variablen hingegen werden negiert.

(a) Geben Sie einen Kalkül an, der Aussagen A in die dualen Aussagen A^d umwandelt.

(b) Beweisen Sie durch Rekursion über den Aufbau der Ausdrücke, daß eine duale Aussage A^d genau dann wahr ist, wenn A falsch ist.