Seminar Mathematik & Informatik
Die Polynomielle Hierachie

Ute Gantenberg

Wintersemester 2001/02

Zusammenfassung

Wir werden den Begriff der polynomiellen Hierachie definieren und einige Eigenschaften der polynomiellen Hierachie untersuchen.

Definition 1 *Die Stufen der polynomiellen Hierachie bestehen aus den Komplexitätsklassen:*
$\Delta_0\mathbf{P} = \Sigma_0\mathbf{P} = \Pi_0\mathbf{P} = \mathbf{P}$
und für alle $i > 0$*:*
$\Delta_i\mathbf{P} = \mathbf{P}^{\Sigma_{i-1}\mathbf{P}}$
$\Sigma_i\mathbf{P} = \mathbf{NP}^{\Sigma_{i-1}\mathbf{P}}$
$\Pi_i\mathbf{P} = \mathbf{coNP}^{\Sigma_{i-1}\mathbf{P}}$
Die polynomielle Hierachie sei die Klasse

$$\mathbf{PH} = \bigcup_{i \geq 0} \Sigma_i\mathbf{P} \tag{1}$$

Bemerkung 1 *Was bedeutet* C^D*?*
Zunächst heißt es nichts anderes, als dass man eine Orakelmaschine C *mit Orakel* D *hat.*
In unserem Fall bedeutet z.B. $P^{\Sigma_i P}$*:*
Wähle eine $\Sigma_i P$*-vollständige Sprache* L *und betrachte die Orakelmaschine aus* P *mit Orakel* L *(z.B.* $i = 1 \Rightarrow \mathbf{P}^{\mathbf{NP}}$*,* SAT *ist eine* $\mathbf{NP}$*-vollständige Sprache).*

Proposition 1 *Sei* $L \subseteq \Sigma^*$ *ein Sprache.* $L \in \mathbf{NP}$ *dann und nur dann, wenn es eine polynomiell entscheidbare und polynomiell beschränkte Relation* R *gibt, so dass* $L = \{x | \exists y : (x, y) \in R\}$*.*

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung der Proposition:

Satz 1 *Sei* L *eine Sprache und* $i \geq 1$*.* $L \in \Sigma_i\mathbf{P}$ *dann und nur dann, wenn es eine polynomiell beschränkte Relation* R *gibt, so dass die Sprache* $\{x; y | (x, y) \in R\}$ *in* $\Pi_{i-1}\mathbf{P}$ *ist und* $L = \{x | \exists y : (x, y) \in R\}$*.*

Das 'duale' Ergebnis für $\Pi_i\mathbf{P}$ ist:

Korollar 1 *Sei* L *eine Sprache und* $i \geq 1$*. Dann gilt* $L \in \Pi_i\mathbf{P}$ *genau dann, wenn es eine polynomiell beschränkte zwei-stellige Relation* R *gibt, so dass die Sprache* $\{x; y | (x, y) \in R\}$ *ist in* $\Sigma_{i-1}\mathbf{P}$ *und*
$L = \{x | \forall y (|y| \leq |x|^k) \to (x, y) \in R\}$*.*

Korollar 2 *Sei* L *eine Sprache und* $i \geq 1$*. Dann gilt* $L \in \Sigma_i\mathbf{P}$ *genau dann, wenn es eine in polynomiell beschränkte und in Polynomialzeit entscheidbare, (i+1)-stellige Relation* R *gibt, so dass*
$L = \{x | \ \exists y_1 \forall y_2 \ldots Q_i \ y_i : (x, y_1, ..., y_i) \in R\}$ *ist, wobei der Quantor* Q_i *ist* $\forall$*, falls* i *gerade, und* $\exists$*, falls* i *ungerade.*

Satz 2 *Angenommen, es gilt* $\Sigma_i\mathbf{P} = \Pi_i\mathbf{P}$ *für ein* $i \geq 1$. *Dann gilt auch* $\Sigma_j\mathbf{P} = \Pi_j\mathbf{P} = \Delta_j\mathbf{P} = \Sigma_i\mathbf{P}$ *für alle* $j \geq i$.

Korollar 3 *Falls* $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ *oder* $\mathbf{NP} = \mathbf{coNP}$ *gilt, dann kollabiert die Polynomielle Hierachie auf der ersten Stufe.*

Definition 2 *Das Problem* $QSAT_i$*:*
Gegeben sei ein Boolscher Ausdruck ϕ *und eine Partitionierung der Variablen von* ϕ *in die Mengen* $X_1, ..., X_i$. *Ist es wahr, dass eine partielle Belegung der Variablen aus* X_1 *existiert, so dass für jede partielle Belegung der Variablen aus* X_2 *eine partielle Belegung der Variablen aus* X_3 *existiert,so dass... und die Belegung zusammen* ϕ *erfüllt? Wir repräsentieren eine Instanz von* $QSAT_i$ *wie folgt*
$\exists X_1\ \forall X_2\ \exists X_3\ \cdots\ QX_i\ \phi$,
wobei der Quantor Q *ist* $\exists$, *falls* i *gerade, und* $\forall$, *falls* i *ungerade.*

Satz 3 *Für alle* $i \geq 1$ *ist das Problem* $QSAT_i$ *bereits* $\Sigma_i\mathbf{P}$*-vollständig.*

Satz 4 *Wenn es ein* **PH***-vollständiges Problem gibt, dann kollabiert die polynomielle Hierachie auf einer endliche Stufe.*

Proposition 2 $PH \subseteq PSPACE$

Literatur

Christos H. Papadimitriou, Computional Complexity, Addision-Wesley, 1995

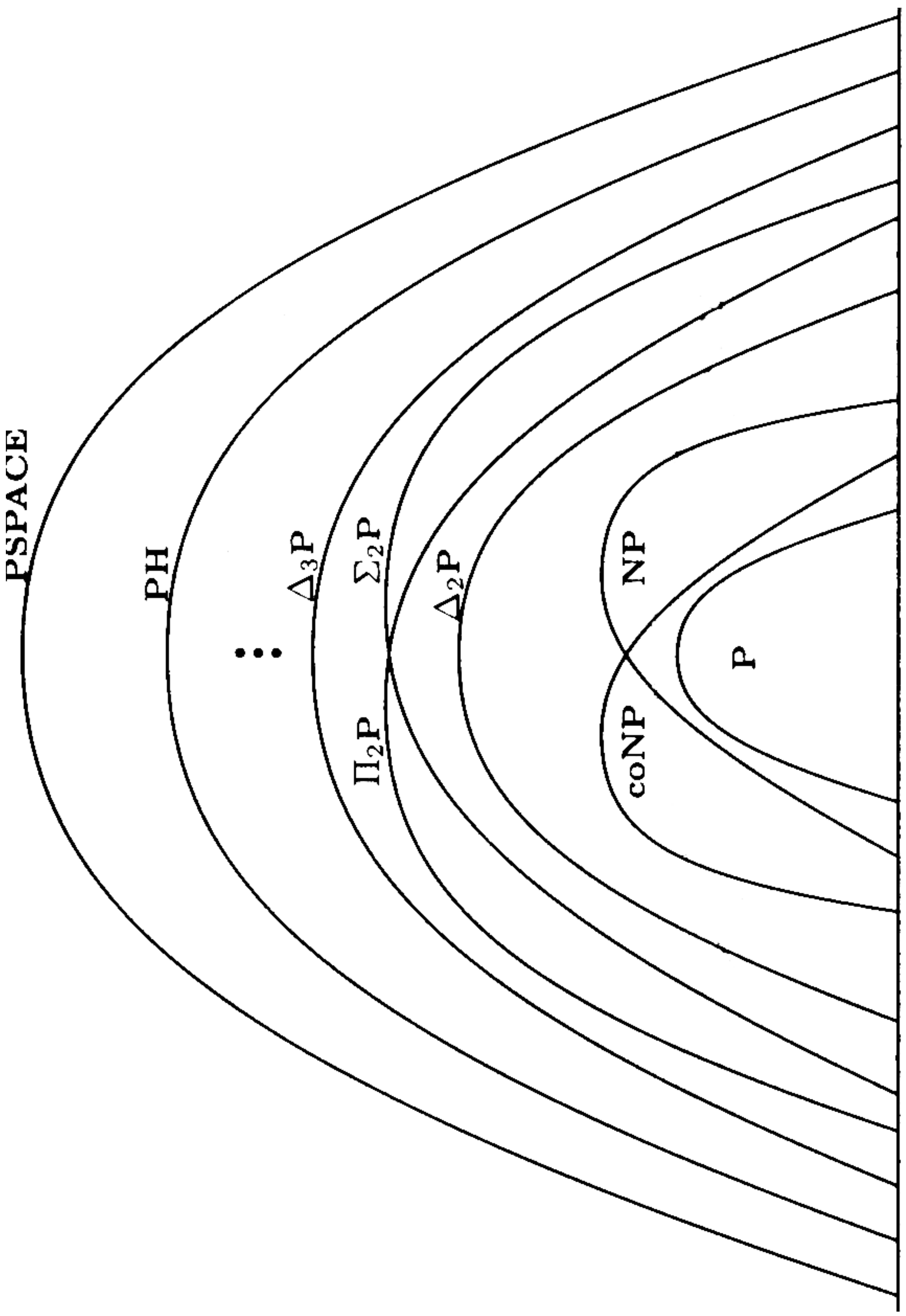

Abbildung 1: *Klassenübersicht*