# $y^0_{2n+1}, y^\alpha_{2n+1}$ und der Jumpoperator für die $Q_{2n+1}$-Mengen

Gido Scharfenberger

Sommersemester 2001

GENERALVORAUSSETZUNG (wie stets): Die Rahmentheorie ist ZF + DC + $\underset{\sim}{\Delta}^1_{2n}$-Det.

## 1 Wiederholung und Zielsetzung

Im letzten Vortrag wurde der Begriff der *ersten nicht-trivialen* $\Pi^1_{2n+1}$-*Einermenge* $y^0_{2n+1}$ eingeführt (*nicht-trivial* $\equiv' \notin \Delta^1_{2n+1}{}'$, *erste* bedeutet 'als solche von niedrigstem $\Delta^1_{2n+1}$-Grade'). Die reelle Zahl $y^0_{2n+1}$ ist bis jetzt nur modulo ihrem $\Delta^1_{2n+1}$-Grad bestimmt.
Das Hauptergebnis über $y^0_{2n+1}$ ist der BASISSATZ FÜR $\Sigma^1_{2n+1}$ :

**1.1 Satz (Martin,Solovay)** $\{x \in {}^\omega\omega : x \leq_{2n+1} y^0_{2n+1}\}$ ist eine Basis für $\Sigma^1_{2n+1}$.

Der Beweis dieses Satzes läßt sich komplett auf eine reelle Zahl z relativieren:

**1.2 Satz** $\{x \in {}^\omega\omega : x \leq_{2n+1} y^0_{2n+1}(z)\}$ ist eine Basis für $\Sigma^1_{2n+1}(z)$, wobei $y^0_{2n+1}(z)$ eine erste nicht-triviale Einermenge in $\Pi^1_{2n+1}(z)$ sei (später durch das 'kanonische' $y^z_{2n+1}$ ersetzbar).

**1.3 Korollar** Für $z \in {}^\omega\omega$ mit $z <_{2n+1} y^0_{2n+1}$ eine Basis für $\Sigma^1_{2n+1}(z)$.

Ein wichtiges technisches Instrument beim Beweis dieses Basissatzes war eine $\Delta^1_{2n+1}$-*Skala* $\bar{\varphi} = \langle \varphi_m : A \to \mathrm{On} : m \in \omega \rangle$ auf einer gegebenen $\Delta^1_{2n+1}$-Menge $A \subseteq {}^\omega\omega$. Dies ist eine Folge von Normen, für welche gilt: Ist $\langle x_i : i \in \omega \rangle$ eine Folge in $A$ ,welche gegen $x \in {}^\omega\omega$ konvergiert derart,daß

$$(\forall m)(\exists \lambda_m)(\exists i_m \in \omega)(\forall i \geq i_m) \quad \varphi_m(x_i) = \lambda_m \quad ,$$

so ist $x \in A$ und $(\forall m)(\varphi_m(x) \leq \lambda_m)$, und die Relation $S(m, z, y) \Leftrightarrow (z, y \in A \wedge \varphi_m(z) \leq \varphi_m(y))$ liegt in $\Delta^1_{2n+1}$. (Allgemeiner müßte eine $\Gamma$-Skala $\bar{\varphi}$ $S \in \Gamma \cap \breve{\Gamma}$ erfüllen.) Wie gezeigt wurde, läßt sich aus einer $\Delta^1_{2n+1}$-Skala $\bar{\varphi}$ eine *exzellente* $\Delta^1_{2n+1}$-Skala $\bar{\psi}$ konstruieren, das heißt eine, welche zusätzlich

(ES1) $\psi_m(y) \leq \psi_m(z) \Rightarrow (\forall k \leq m)(\psi_k(y) \leq \psi_k(z))$

(ES2) $\psi_m(y) = \psi_m(z) \Rightarrow y \upharpoonright (m+1) = z \upharpoonright (m+1)$

erfüllt. Mit Hilfe solcher Skalen werden wir nun $y^0_{2n+1}$ charakterisieren und zu $\alpha \in {}^\omega\omega$ eine reelle Zahl $y^\alpha_{2n+1}$ konstruieren, welche auf den $Q_{2n+1}$-Jumpoperator führt.

## 2 Kandidaten für $y^0_{2n+1}$

**2.1 Definition** Sei $A \in \Delta^1_{2n+1}$ und $\bar{\varphi}$ eine exzellente $\Delta^1_{2n+1}$-Skala auf $A$. Wählt man zu jedem $m \in \omega$ ein $\beta_m \in A$ mit minimalem $\varphi_m(\beta_m)$, so konvergiert die Folge der $\beta_m$ wegen der Exzellentheit der Skala $\bar{\varphi}$ unabhängig von der spezifischen Wahl der $\beta_m$ gegen eine reelle Zahl $y_{A,\bar{\varphi}} \in A$. Dieses $y_{A,\bar{\varphi}}$ heißt die *links-außen reelle Zahl von* $A, \bar{\varphi}$ (*leftmost real of* $A, \bar{\varphi}$).

**2.2 Satz (Harrington)** Sei $\varnothing \neq A \in \Delta^1_{2n+1}$, sei $\bar{\varphi}$ eine exzellente $\Delta^1_{2n+1}$-Skala aud $A$ und sei $y_{A,\bar{\varphi}}$ die links-außen reelle Zahl von $A, \bar{\varphi}$. Dann gilt:

$$y_{A,\bar{\varphi}} \leq_{2n+1} y^0_{2n+1}$$

.

**Beweis.** Im Beweis des Basissatzes wurde gezeigt: Werden die $\beta_m \in A^* = \{\beta \in A : y^0_{2n+1} \not\leq_{2n+1} \beta\}$ mit jeweils $\varphi_m(\beta_m)$ minimal gewählt, so gilt $\lim \beta_m =: \bar{\beta} \leq_{2n+1} y^0_{2n+1}$. Es genügt hier also, zu zeigen, daß sich zu jedem $m \in \omega$ ein $\beta <_{2n+1} y^0_{2n+1}$ (daraus folgt $\beta \in A^*$) mit minimaler Norm bzgl. ganz $A$ finden läßt. Angenommen, dies sei falsch, so gibt es ein $m \in \omega$ und ein $\beta_m \leq_{2n+1} y^0_{2n+1}$ mit minimaler Norm bzgl. $A^*$, so daß

$$\{x \in A : \varphi_m(x) < \varphi_m(\beta_m)\} \neq \varnothing.$$

Diese Menge anthält aufgrund der Definition von $A^*$ und der Minimalität von $\varphi(\beta_m)$ keine reelle Zahl $x <_{2n+1} y^0_{2n+1}$. $A^*$ ist aber in $\Delta^1_{2n+1}(\beta)$, was dann im Widerspruch zum **Korollar 1.3** steht. ∎

**2.3 Bemerkung** Auch dieser Beweis läßt sich auf eine reelle Zahl $x$ relativieren. Dies führt zur Aussage:
Sei $\varnothing \neq A \in \Delta^1_{2n+1}(x)$ und $\bar{\varphi}$ eine exzellente $\Delta^1_{2n+1}(x)$-Skala auf $A$. Dann gilt $y_{A,\bar{\varphi}} \leq_{2n+1} y^0_{2n+1}(x)$.

**2.4 Korollar** Sei $\varnothing \neq A \in \Delta^1_{2n+1}$ und $A \cap \Delta^1_{2n+1} = \varnothing$, d.h. $A$ enthalte keine triviale $\Pi^1_{2n+1}$-Einermenge. Dann gibt es ein $y \in A$ mit $y \equiv_{2n+1} y^0_{2n+1}$, nämlich $y := y_{A,\bar{\varphi}}$ für eine exzellente $\Delta^1_{2n+1}$-Skala $\bar{\varphi}$ auf $A$.

**Beweis.** Aufgrund des **Satzes 2.2** ist nur noch die Richtung $y^0_{2n+1} \leq_{2n+1} y_{A,\bar{\varphi}}$ zu zeigen. Wegen $y_{A,\bar{\varphi}} \notin \Delta^1_{2n+1}$ genügt: $\{y_{a,\bar{\varphi}}\} \in \Pi^1_{2n+1}$ !
Behauptung: $y_{A,\bar{\varphi}}$ ist das eindeutig bestimmte $y \in A$ mit $(\forall m \in \omega)(\forall x \in {}^\omega\omega)(\varphi_m(y) \leq \varphi_m(x))$ !
Aufgrund der Eigenschafet (ES1) der exzellenten Skala $\bar{\varphi}$ bleibt $\varphi_m(\beta_k)$ auch für $m \geq k$ minimal :

$$(\forall x \in A)(m \geq k \Rightarrow \varphi_k(\beta_m) \leq \varphi_k(\beta_k) \leq \varphi_k(x))$$

Also ist aufgrund der Halbstetigkeit von Skalen $(\forall m \geq k)(\varphi_k(\beta_m) = \lambda_k)$, und somit $\varphi_k(y_{A,\bar{\varphi}})$ minimal für alle $k \in \omega$. Falls $y \in A$ eine Zahl mit dieser Eigenschaft ist, so setze $\beta_m \equiv y$ und erhalte $y = y_{A,\bar{\varphi}}$. Damit gilt also :

$$y \in \{y_{A,\bar{\varphi}}\} \Leftrightarrow (\forall x \in A)(\forall m \in \omega)\underbrace{(\varphi_m(y) \leq \varphi_m(x))}_{\Delta^1_{2n+1}}$$

Und somit ist $y_{A,\bar{\varphi}}$ eine $\Pi^1_{2n+12}$-Einermenge. ∎

# 3 $y^\alpha_{2n+1}$ und der $Q_{2n+1}$-Jumpoperator

Zunächst müssen wir einige technische Hilfsmittel, die bei der Kontsruktion der Abbildung $\alpha \mapsto y^\alpha_{2n+1}$ benötigt werden, definieren.

**3.1 Definition** Seien $\alpha, \beta, x, y \in {}^\omega\omega$ und $i, j, k, m \in \omega$.

(i) Durch $\langle k, m\rangle := 2^k(2m+1)-1 = 2^{k+1}\cdot m + 2^k - 1$ wird eine feste rekursive Bijektion $\omega \times \omega \to \omega$ vorgegeben.. Setze $\langle i, j, k\rangle = \langle i, \langle j, k\rangle\rangle$.

| m | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ⋯ | ⋯ | | | | | |
| 5 | 10 | 21 | 43 | ⋯ | | | |
| 4 | 8 | 17 | 35 | ⋯ | | | |
| 3 | 6 | 13 | 27 | 55 | ⋯ | | |
| 2 | 4 | 9 | 19 | 39 | ⋯ | | |
| 1 | 2 | 5 | 11 | 23 | 47 | 95 | ⋯ |
| 0 | 0 | 1 | 3 | 7 | 15 | 31 | ⋯ |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | k |

Die rekursive Zuordnung $(\alpha, i) \mapsto (\alpha)_i = (t \mapsto \alpha(\langle i, t\rangle))$ ordnet sich dem unter, und $\alpha \mapsto \langle(\alpha)_i : i \in \omega\rangle$ ist wieder eine rekursive Bijektion ${}^\omega\omega \leftrightarrow ({}^\omega\omega)^\omega$ mit dem Turing-Join $\bigoplus : \langle x_i : i \in \omega\rangle \mapsto (\bigoplus x_i)$ als Umkehrfunktion.

(ii) $x \oplus y =: \beta$ mit $\beta(2t) = x(t)$ und $\beta(2t+1) = y(t)$. (Insbesondere gilt damit $(x \oplus y)_0 = x$.)

(iii) Mit $\{k\}^\alpha$ werde die $k$-te in $\alpha$ rekursive partielle Funktion bezeichnet.
(Es gilt: $x \leq_T y \Leftrightarrow (\exists m \in \omega)(x = \{m\}^y)$.)

(iv) Eine $\alpha$-*Präkette* ist eine reelle Zahl $y$, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

($\alpha$K1) $(y)_0 = \alpha$

($\alpha$K2) $(y)_{\langle 1,i,j\rangle} = y_i \oplus y_j$

($\alpha$K3) $(y)_{\langle 2,i,j\rangle} = \begin{cases} \{i\}^{(y)_j} & \text{falls diese Funktion total} \\ (t \mapsto 0) & \text{sonst} \end{cases}$

($\alpha$K4) Für eine Menge $P \in \Pi^1_{2n} \restriction (\omega \times {}^\omega\omega \times {}^\omega\omega)$, $\omega$-universell für $\Pi^1_{2n} \restriction ({}^\omega\omega \times {}^\omega\omega)$ gelte:

$$(y)_{\langle 3,i,j\rangle}(0) = 0 \Rightarrow P(i, ((y)_{\langle 3,i,j\rangle}\star, (y)_j),$$

wobei $x\star : t \mapsto x(t+1)$ die Shift-Abbildung auf ${}^\omega\omega$ ist.

(v) Eine $\alpha$-*Kette* ist eine $\alpha$-Präkette, die außerdem noch erfüllt:
($\alpha$K5) $(y)_{\langle 3,i,j\rangle}(0) = 0 \Leftrightarrow (\exists\beta)(P(i,\beta,(y)_j)$

**3.2 Proposition** (a) $\alpha$-Ketten existieren zu jedem $\alpha \in {}^\omega\omega$.

(b) Die Relation $PC(y,\alpha) :\Leftrightarrow$ ($y$ ist eine $\alpha$-Präkette) ist in $\Pi^1_{2n}$.

**Beweis.**

(a) Die Eigenschaften ($\alpha$K1-3) sind offensichtlich gleichzeitig erfüllbar. Aber die beiden letzten sind es auch, denn ($\alpha$K4) stellt an $(y)_{\langle 3,i,j\rangle}(0)$ nur die Bedingung, $\neq 0$ zu sein falls $(i, ((y)_{\langle 3,i,j\rangle})\star, (y)_j) \notin P$ ($P$ ist fest !). Und wenn ($\alpha$K4) erfüllt ist, fehlt zu ($\alpha$K5) nur noch: $(\forall i,j)(P(i,\cdot,(y)_j) \neq \varnothing \Rightarrow (y)_{\langle 3,i,j\rangle}(0) = 0)$. Man kann also durch abzählbar viele Auswahlen zu gegebenem $\alpha \in {}^\omega\omega$ und $P$ $\omega$-universell induktiv eine $\alpha$-Kette finden. □

(b) Für jedes Paar $(i,j)$ sind die Bedingungen ($\alpha$K1-3) in $\Sigma^0_1$ und die Menge

$$\{y : (y)_{\langle 3,i,j\rangle}(0) \neq 0 \vee P(i, ((y)_{\langle 3,i,j\rangle})\star, (y)_j)\} \in \Pi^1_{2n}.$$

Somit ist auch die abzählbare Konjunktion (über alle (i,j)) aller dieser Bedingungen in $\Pi^1_{2m}$. ■

Das nächste Lemma ist das Hauptstück des Weges zu einer intrinsischen Charakterisierung von $y^\alpha_{2n+1}$ über $\mathcal{L}_{2n+1}(\alpha)$.

**3.3 Lemma** (a) Sei $y \in {}^\omega\omega$ eine $\alpha$-Kette. Gegeben $m_0, \ldots m_k \in \omega$ und ein Kode $j \in \omega$ für eine $\Sigma^1_{2n+1}$-Teilmenge $R$ von ${}^\omega\omega$. Dann ist effektiv bestimmbar, ob $R = \varnothing$, und falls nicht, so ist effektiv ein $l \in \omega$ bestimmbar, so daß $(y)_l \in R$

(b) Sei $\mathcal{L}_{2n+1}(\alpha) := \{y_{A,\bar\varphi} : \varnothing \neq A \in \Delta^1_{2n+1}(\alpha) \wedge (\bar\varphi \text{ ist exzellente } \Delta^1_{2n+1}(\alpha)\text{-Skala auf } A)\}$ für ein $\alpha \in {}^\omega\omega$. Ferner sei $y$ eine $\alpha$-Kette. Dann ist jedes $x \in \mathcal{L}_{2n+1}(\alpha)$ Turing-reduzibel in $y$ :
$y$ $\alpha$-Kette $\Rightarrow (\forall x \in \mathcal{L}_{2n+1}(\alpha) : x \leq_T y)$.

**Beweis.**

(a) Nach $k$-facher Anwendung von ($\alpha$K2) existiert ein $m \in \omega$ mit $(y)_m = (y)_{m_0} \oplus ((y)_{m_1} \oplus \cdots \oplus ((y)_{m_{k-1}} \oplus (y)_{m_k}) \cdots)$ und wir erhalten $R(\beta) \Leftrightarrow P(j,\beta,(y)_m)$, wobei $P$ die $\omega$-universelle Menge zu $y$ ist (bzgl. der auch der Kode zu interpretieren ist). Somit ist also wegen ($\alpha$K5) $R \neq \varnothing \Leftrightarrow (y)_{\langle 3,j,m\rangle}(0) = 0$**.** Sei $s^\star \in \omega$ derart, daß $(\forall x \in {}^\omega\omega)(\{s^\star\}^x = x\star$. Dann gilt wegen ($\alpha$K3) und ($\alpha$K4): $(y)_{\langle 2,s^\star,\langle 3,j,m\rangle\rangle} = \{s^\star\}^{(y)_{\langle 3,j,m\rangle}} = ((y)_{\langle 3,j,m\rangle})\star \in R$. Also $l = \langle 2, s^\star, \langle 3,j,m\rangle\rangle$.
□

(b) Sei also $\varnothing \neq A \in \Delta^1_{2n+1}(\alpha)$ und $\bar\varphi$ eine exzellente $\Delta^1_{2n+1}(\alpha)$-Skala auf $A$. Sei $y$ eine $\alpha$-Kette und $\beta := y_{A,\bar\varphi}$. Es wird gezeigt, wie rekursiv $\beta(m)$ aus $y$ bestimmt wird. Wegen der Exzellentheit von $\bar\varphi$ genügt es dazu, aus $m$, $A$ und $y$ effektiv ein $l \in \omega$ zu bestimmen, so daß $\varphi_m((y)_l)$ minimal in $\{\varphi_m(x) : x \in A\}$ ist, denn dann ist $\beta(m) = (y)_l(m)$.
$y$ ist $\alpha$-Kette, $A \in \Delta^1_{2n+1}$ nichtleer, also läßt sich nach **Teil a) dieses Lemmas** ein $l_0 \in \omega$ mit $(y)_{l_0} \in A$ effektiv bestimmen. Für gegebene $l_0, \ldots, l_k$, prüfe effektiv, ob $L_k := \{x \in A : \varphi_m(x) < \varphi_m(y)_{l_k}\} = \varnothing$.
Wenn *ja*, so setze $l = l_k$ und wir sind fertig.
Wenn *nein*, dann bestimme (effektiv) ein $l_{k+1}$ mit $(y)_{l_{k+1}} \in L_k$.
Aufgrund der Fundiertheit von $<$ auf den Ordinalzahlen bricht dieser Prozeß nach endlich vielen Schritten ab. ■

Jetzt folgt die Konstruktion von $y^\alpha_{2n+1}$ als ein $y_{A,\bar{\varphi}}$.

**3.4 Definition** Der *Träger* einer Norm $\varphi$ auf $PC = \{(y,\alpha) : y \text{ ist } \alpha\text{-Präkette }\}$ sei als die kleinste natürliche Zahl $r$ definiert, so daß $\varphi(x,\alpha)$ nur von $\{(x)_i : i < r\}$ und $\alpha$ abhängt.

**3.5 Bemerkung** $(y,\alpha) \in PC$ ist äquivalent zur Konjunktion von abzählbar vielen $\Pi^1_{2n}$-Bedingungen, von denen sich jede nur auf endlich viele $(y)_i$ bezieht. Deshalb kann man eine $\Delta^1_{2n+1}$-Skala $\bar{\psi}$ auf $PC$ finden, in der jede Norm $\psi_m$ Träger $m$ hat.

**3.6 Definition (Konstruktion von $y^\alpha_{2n+1}$)** Sei $\bar{\psi}$ eine $\Delta^1_{2n+1}$-Skala auf $PC$, mit der Eigenschaft, daß für alle $m \in \omega$ $\psi_m$ Träger $m$ hat.(Diese Skala sei von jetzt an wie auch die für $\Pi^1_{2n+1} \restriction {}^\omega\omega \times {}^\omega\omega$ $\omega$-unieverselle Menge für alle $\alpha \in {}^\omega\omega$ fest.) Konstruiere durch auffüllen mit trivialen Normen eine $\Delta^1_{2n+1}$-Skala $\psi'_m$ auf $PC$, so daß $m \leq \langle r, 0\rangle \Rightarrow \psi'_m$ Träger $\leq r$ hat. Daraus erhält man mit der aus dem letzten Vortrag bekannten Methode eine exzellente $\Delta^1_{2n+1}$-Skala $\bar{\chi}$ auf $PC$. Für $m \in \omega$ sei:

$$\chi_m(y,\alpha) := \|\psi'_0(y\alpha), y(0), \alpha(0), \ldots, \psi'_m(y,\alpha), y(m), \alpha(m)\|$$

Von nun an sei ein $\alpha \in {}^\omega\omega$ fixiert. Setze $A := PC(\alpha) = \{y : y \text{ ist } \alpha\text{-Präkette}\}$ und sei $\bar{\varphi}$ die Einschränkung von $\bar{\chi}$ auf $A$, gegeben durch $\varphi_m(y) = \chi_m(y,\alpha)$. $\bar{\varphi}$ erbt von $\bar{\chi}$ die Eigenschaft, eine exzellente $\Delta^1_{2n+1}$-Skala zu sein. Dann setzen wir:

$$y^\alpha_{2n+1} := y_{A,\bar{\varphi}}$$

**3.7 Proposition** $y^\alpha_{2n+1}$ ist eine $\alpha$-Kette.

**Beweis.** Da stets $y_{A,\bar{\varphi}} \in A$ für links-außen reelle Zahlen gilt, ist $y := y^\alpha_{2n+1}$ jedenfalls $\alpha$-Präkette. Wäre $y$ keine $\alpha$-Kette, so müßte Bedingung ($\alpha$K5) für ein Paar $(i,j)$ verletzt sein. Sei $r = \langle 3, i, j\rangle$ solcherart und minimal. Da $y^\alpha_{2n+1}$ $\alpha$-Präkette müßte wegen ($\alpha$K4) gelten:

$$(\exists\beta)(P(i,\beta,(y)_j) \wedge (y)_{\langle 3,i,j\rangle}(0) > 0)$$

Da $r$ minimal gewählt wurde, gibt es (s.o., induktiv definierbar) eine $\alpha$-Kette $z$ mit:
$\circledast$ $\quad (z)_i = (y)_i$ für alle $i < r$.
BEHAUPTUNG: $\varphi_{\langle r,0\rangle}(z) < \varphi_{\langle r,0\rangle}(y)$ ! (im Widerspruch zu $y = y_{A,\bar{\varphi}}$ links-außen,siehe**(2.2.4)**)
Sei $k = \langle r, 0\rangle$. Betrachten wir also:

$$\varphi_k(z) = \|\psi'_0(z,\alpha), z(0), \alpha(0), \ldots, \psi'_k(z,\alpha), z(k), \alpha(k)\|$$

und

$$\varphi_k(y) = \|\psi'_0(y,\alpha), y(0), \alpha(0), \ldots, \psi'_k(y,\alpha), y(k), \alpha(k)\|$$

Wegen $\circledast$ und weil der Träger von $\psi'_m$ mit $\leq k = \langle r, 0\rangle$ höchstens $r$ ist, sind die Werte links von $z(k)$ bzw. $y(k)$ identisch. Jetzt ist aber $z$ eine $\alpha$-Kette, also ist

$$z(k) = z(\langle r, 0\rangle) = z_r(0) = z_{\langle 3,i,j\rangle}(0) = 0 < y_{\langle 3,i,j\rangle}(0)$$

und somit $\varphi_k(z) < \varphi_k(y)$. ■
Jetzt können wir das Theorem von Harrington über $y^\alpha_{2n+1}$ formulieren.

**Theorem 3.8 (Harington)**

(a) Für jede Zahl $\alpha$ ist $y^\alpha_{2n+1}$ ein Repräsentant des $\Delta^1_{2n+1}(\alpha)$-Grades der ersten nicht-trivialen $\Pi^1_{2n+1}(\alpha)$-Einermenge $y^0_{2n+1}(\alpha)$.

(b) Die Relation $A_{2n+1}$ mit $A_{2n+1}(\alpha,\beta) \Leftrightarrow \beta = y^\alpha_{2n+1}$ ist in $\Pi^1_{2n+1}$.

(c) Für alle $\alpha, \beta$ gilt : $\alpha \leq_T y^\alpha_{2n+1}$ und $\alpha \leq_T \beta \Rightarrow y^\alpha_{2n+1} \leq_T y^\beta_{2n+1}$. Es existiert sogar eine totale rekursive Funktion $p$ auf $\omega$, für welche gilt:

$$\alpha = \{s\}^\beta \Longrightarrow y^\alpha_{2n+1} = \{p(s)\}^{y^\beta_{2n+1}}.$$

(d) Für alle $\alpha, \beta$ gilt : $\alpha \leq^Q_{2n+1} \beta \Rightarrow y^\alpha_{2n+1} \leq_T y^\beta_{2n+1}$.

(e) Sei $\mathcal{L}_{2n+1}(\alpha)$ wie im **Lemma (3.3.b)**. Dann hat der Turing-Grad $[y^\alpha_{2n+1}]_T$ von $y^\alpha_{2n+1}$ die folgende Charakterisierung:
Es gilt $y^\alpha_{2n+1} \in \mathcal{L}_{2n+1}(\alpha)$ und jedes $x \in \mathcal{L}_{2n+1}(\alpha)$ ist rekursiv in $y^\alpha_{2n+1}$.

(f) $\{x : x \leq_T y^\alpha_{2n+1}\}$ ist eine Basis für $\Sigma^1_{2n+1}(\alpha)$.

**Beweis.**

(a) Nach **Bemerkung (2.3)** ist $y^\alpha_{2n+1} = y_{A,\bar\varphi} \leq_{2n+1} y^0_{2n+1}(\alpha)$.
Bleibt zu zeigen, daß $y^\alpha_{2n+1} \notin \Delta^1_{2n+1}(\alpha)$, also daß $y^\alpha_{2n+1}$ keine *triviale* $\Pi^1_{2n+1}(\alpha)$-Einermenge ist. Doch $y = y^\alpha_{2n+1}$ ist $\alpha$-Kette und erfüllt somit ($\alpha$K5) : $y_{\langle 3,i,j\rangle}(0) = 0 \Leftrightarrow \exists\beta P(i,\beta,(y)_j)$, wobei $P$ eine $\omega$-universelle $\Pi^1_{2n}$-Menge ist, also auf der rechten Seite eine $\Sigma^1_{2n+1}$-Menge steht, für die sich auch durch hinzufügen des Parameters $\alpha$ keine Komplexitätsgrade gewinnen lassen, wenn man die Konjunktion über alle $i,j \in \omega$ betrachtet. Also $y \notin \Sigma^1_{2n+1}(\alpha)$. □

(b) Da $y = y^\alpha_{2n+1}$ (bzw. $(y,\alpha)$) als von einer Skala kontrollierter Limes auf der $\Pi^1_{2n}$-Menge $PC$ gewonnen wird, gilt zunächst $A_{2n+1} \subseteq PC$. Dort ist $y$ als links-außen reelle Zahl charakterisiert. Für alle $\alpha$ und alle $m$ gilt: $(\forall x)\varphi_m(y) \leq \varphi_m(x)$, und somit ist $A_{2n+1}(y,\alpha) \Leftrightarrow \forall x R(y,\alpha,x)$, wobei $R(y,\alpha,x) \Leftrightarrow \exists m \in \omega(PC(y,\alpha) \wedge PC(x,\alpha) \wedge \varphi_m(y) \leq \varphi_m(x))$ mit der $\Delta^1_{2n+1}$-Skala $\bar\varphi$ eine $\Delta^1_{2n+1}$-Menge ist. □

(c) $y = y^\alpha_{2n+1}$ ist $\alpha$-Kette, also ist $(y)_0 = \alpha$. Für $\alpha \leq_T \beta$ ist wegen $\Delta^1_{2n+1}(\alpha) \subseteq \Delta^1_{2n+1}$ und wegen **(3.8.d) dieses Satzes** mit $y^\alpha_{2n+1} \in \mathcal{L}_{2n+1}(\alpha) \subseteq \mathcal{L}_{2n+1}(\beta)$ schon $y^\alpha_{2n+1} \leq_T y^\beta_{2n+1}$. Die Existenz der Funktion $p$ folgt aus der Uniformität der Zuordnung $\alpha \mapsto y^\alpha_{2n+1}$. □

(d) Sei $\alpha \in Q_{2n+1}(\beta)$. Im Referat über die $\Sigma^1_{2n+1}$-Hüllen wurde gezeigt (in der lightface-Version), daß es eine $\Pi^1_{2n}(\beta)$-Menge $S \neq \varnothing$ gibt, so daß $Q_{2n+1}(\beta)$ die rekursive Hülle von $S$ ist, insbesondere also $\alpha$ rekursiv in jedem $x \in S$ ist. Sei $y$ eine $\beta$-Kette. Aus **Lemma (3.3.a)** folgt die Existenz eines $j \in \omega$ mit $(y)_j \in S$. Mit ($\alpha$K3) folgt $\alpha = (y)_i$ für ein $i \in \omega$. Bleibt zu zeigen, daß für die $\beta$-Kette $y$ gilt : $y^{(y)_i}_{2n+1} \leq_T y$ !
Dies beweist man in völliger Analogie zum **Lemma (3.3.b)**, da die $\beta$-Kette $y$ ausreichend viel Information über sein 'Glied' $(y)_i$ bereithält. □

(e) $y^\alpha_{2n+1} \in \mathcal{L}_{2n+1}(\alpha)$ ist klar wegen der Definition von $\mathcal{L}_{2n+1}(\alpha)$. Nach **Proposition (3.7)** ist $y^\alpha_{2n+1}$ eine $\alpha$-Kette und dann ist die Charakterisierung die Aussage vom **Lemma (3.3.b)**. □

(f) Das ist noch einmal die Aussage des **relativierten Basistheorems von Martin und Solovay** mit Hinblick darauf, daß $y^\alpha_{2n+1}$ erste nicht-triviale $\Pi^1_{2n+1}$-Einermenge ist. ■

**3.9 Definition** Für jeden $Q_{2n+1}$-Grad $q = [\alpha]^Q_{2n+1}$ sei der Jump $q'$ definiert durch:

$$q' = [y^\alpha_{2n+1}]^Q_{2n+1}$$