Mathematisches Institut

Mengenlehre & Logik II

Sommersemester 2001
Benedikt Löwe

Blatt 5 Abgabetermin: 25. Mai 2001 (Postfach "Rohde")

Aufgaben 20 bis 22 sind nur zur Korrektur der durchlaufenden Numerierung aufgeführt:

Aufgabe 20

(1) Für $x, y \in 2^\omega$ sei

$$n(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \\ n & \text{falls } x \neq y \text{ und } n = \min\{k \; ; \; x{\restriction}k \neq y{\restriction}k\}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß die Abbildung $d : 2^\omega \times 2^\omega \to [0,1]$, definiert durch

$$d(x,y) := \frac{1}{2^{n(x,y)}},$$

eine Metrik auf 2^ω ist, und daß die von dieser Metrik induzierte Topologie die Produkttopologie ist. (Vgl. (5.12))

(2) Definieren Sie die entsprechende Funktion für den Baire-Raum und prüfen Sie nach, daß diese dieselben Eigenschaften erfüllt, d.h. eine vollständige Metrik ist, die die Produkttopologie erzeugt.

Aufgabe 21

Wir nennen einen topologischen Raum **separabel**, falls er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. Zeigen Sie, daß sowohl der Cantorraum als auch der Baireraum separabel sind. (Vgl. (5.14))

Aufgabe 22

Wir verwenden die Notationen aus dem Beweis von (5.11), d.h. $C = C(S^{\text{Cantor}})$ ist die (in (5.3) definierte und in (5.8) durch ein Cantorsystem dargestellte) Cantormenge und $\pi : 2^\omega \to C(S^{\text{Cantor}})$ ist die in (5.10) definierte Bijektion, die jedes Element des Cantorraums auf das eindeutig bestimmte Element von C wirft, welches durch den Pfad durch das Cantorsystem bestimmt ist.

Vervollständigen Sie den Beweis von (5.11), indem Sie die folgenden Behauptungen zeigen:

(1) Zeigen Sie, daß die Menge $\{S_s^{\text{Cantor}} \; ; \; s \in 2^{<\omega}\}$ eine Basis der Subraumtopologie auf $C(S^{\text{Cantor}})$ ist.

(2) Zeigen Sie, daß für alle Folgen $s \in 2^{<\omega}$ gilt:

$$\pi[[s]] = S_s^{\text{Cantor}},$$

und damit auch (weil π eine Bijektion ist):

$$\pi^{-1}[S_s^{\text{Cantor}}] = [s].$$

(3) Folgern Sie aus (1) und (2), daß die Funktion π ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 23

(1) Sei $X \subseteq \omega^\omega$. Zeigen Sie, daß X genau dann perfekt ist, wenn sie abgeschlossen ist und für jede offene Basismenge $[s]$ eine Menge $C \subseteq [s] \cap X$ existiert, die homöomorph zum Cantorraum ist.

(2) In Anlehnung an die Charakterisierung aus Aufgabenteil (1) definieren wir: Eine Teilmenge $X \subseteq \omega^\omega$ heißt **superperfekt**, falls sie abgeschlossen ist und für jede offene Basismenge $[s]$ eine Menge $B \subseteq [s] \cap X$ existiert, die homöomorph zum Baireraum ist.

Wir nennen einen Baum T auf ω einen **superperfekten Baum** falls für jedes $t \in T$ ein $s \supseteq t$ existiert mit der Eigenschaft: "Es existieren unendlich viele natürliche Zahlen n, so daß $s^\frown\langle n\rangle \in T$."

Zeigen Sie, daß eine Teilmenge $X \subseteq \omega^\omega$ genau dann superperfekt ist, wenn es einen superperfekten Baum T gibt, so daß $X = [T]$ ist. (Vergleiche (7.6).)

Aufgabe 24

Seien a und b Mengen und sei $f : a^{<\omega} \to b^{<\omega}$ eine Funktion mit der Eigenschaft, daß für je zwei $s \subseteq t \in a^{<\omega}$ gilt, daß $f(s) \subseteq f(t)$. (Wir wollen solche Funktionen **ordnungserhaltend** nennen.

Wir definieren $f^* : a^\omega \to b^\omega$ durch

$$f^*(x) := \bigcup_{n\in\omega} f(x{\restriction}n).$$

Beweisen Sie:

(1) Sei f ordnungserhaltend wie oben. Falls für alle $s \in a^{<\omega}$ und $\alpha \in a$ gilt, daß die Werte $f(s^\frown\langle\alpha\rangle)$ paarweise inkompatibel sind, so ist f^* injektiv.

(2) Eine beliebige Funktion $g : a^\omega \to b^\omega$ ist genau dann stetig, wenn es eine ordnungserhaltende Funktion $f : a^{<\omega} \to b^{<\omega}$ gibt, so daß $g = f^*$.

(Man vergleiche diese Übungsaufgabe mit dem Beweis von (7.8).)

Aufgabe 25

Beweisen Sie:

(1) Der Baire-Raum hat Kardinalität $\mathfrak{c}$.

(2) Es gibt eine Bijektion zwischen ω und $\omega^{<\omega}$.

(3) Die Funktion $c : (2^\omega)^\omega \to 2^\omega$ definiert durch

$$c(\langle x_n \ ; \ n \in \omega\rangle)(\ulcorner k, \ell\urcorner) := x_k(\ell)$$

und die Funktionen $c_n : 2^\omega \to 2^\omega$ definiert durch

$$c_n(x) := (c^{-1}(x))_n$$

für alle natürlichen Zahlen n sind stetig. (Vergleiche (8.20).)

Aufgabe 26

Beweisen Sie:

(1) Sei $\pi : \langle X, \tau \rangle \to \langle Y, \tau^* \rangle$ eine stetige Funktion und $B \in G_\delta(Y, \tau^*)$. Dann ist $\pi^{-1}[B] \in G_\delta(X, \tau)$. (Vergleiche (8.5).)

(2) Eine Menge ist genau dann G_δ, wenn sie das Komplement einer F_σ-Menge ist. (Vergleiche (8.9)(a).)

(3) Jede abgeschlossene Menge ist F_σ.

(4) In einem metrischen Raum ist jede offene Menge F_σ. (Vergleiche (8.9)(d).)

(5) Die Borelklassen $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$, $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ und $\mathbf{\Delta}^0_\alpha$ sind abgeschlossen unter endlichen Schnitten und Vereinigungen und stetigen Urbildern. (Vergleiche (8.12)(v).)

Aufgabe 27

Man definiere die Punktklasse $\mathbf{P}$ durch

$$\mathbf{P}(X) := \mathfrak{P}(X) = \{A \; ; \; A \subseteq X\}.$$

Zeigen Sie, daß es keine X-universelle Menge für $\mathbf{P}(X)$ gibt. (Vergleiche (8.18).)
Was hat hat dies mit dem Satz von Cantor ($\kappa < 2^\kappa$) zu tun?