$\mathcal{Q}$-THEORIE: Π^1_{2n+1}-SINGLETONS

Philipp Rohde

Seminar für Diplomanden und Staatsexamenskandidaten
Sommersemester 2001

1. Einleitung und Motivation

Eine der ursprünglichen Motivationen zur Entwicklung der $\mathcal{Q}$-Theorie war der Versuch, eine geeignete Verallgemeinerung des *Kleene Basis-Satzes für* Σ^1_1 zu finden. Wir definieren zunächst den Begriff einer Basis für Punktklassen:

(1.1) Definition: Sei Γ eine Punktklasse. Eine Punktmenge $\mathfrak{B} \subseteq \mathbb{R}$ heißt **Basis für** Γ, falls jede nicht-leere Menge aus Γ ein Element aus $\mathfrak{B}$ enthält, d.h. ist $P \subseteq \mathbb{R}$ mit $P \in \Gamma$, dann gilt:

$$\exists x \, \big(P(x)\big) \Longleftrightarrow \exists x \in \mathfrak{B} \, \big(P(x)\big).$$

Das erwähnte Theorem besagt dann:[1]

(1.2) Satz (Kleene): *Die Punktmenge* $\{x \in \mathbb{R} \,:\, x \textit{ ist rekursiv in } W^0_1\}$ *ist eine Basis für* Σ^1_1.

Dabei sei W^0_n eine Π^1_n-vollständige Menge. Wie verhält es sich aber für die höheren Stufen? Für die *geraden* Stufen folgt aus dem *Zweiten Periodizitätssatz von Moschovakis*:[2]

(1.3) Satz: $[\mathbf{Det}(\boldsymbol{\Delta}^1_{2n})]$ *Die Punktmenge* $\Delta^1_{2n+2} \cap \mathbb{R}$ *ist eine Basis für* Σ^1_{2n+2}.

Wie sieht es aber mit den *ungeraden* Stufen aus? Die naheliegende Verallgemeinerung des Basis-Satzes von Kleene wäre:

Die Punktmenge $\{x \in \mathbb{R} \,:\, x \text{ ist } \Delta^1_{2n+1} \text{ in } W^0_{2n+1}\}$ ist eine Basis für Σ^1_{2n+1}.

Mathematisches Institut, Universität Bonn, Beringstr. 4, 53115 Bonn
e-mail: `rohde@math.uni-bonn.de`
web: `www.metaego.de`

[1] Vgl. [Mos80], 4E.8.
[2] Vgl. [Mos80], 6C.6.

Diese Aussage ist aber leider **falsch**.[3] Wir werden hier nun eine reelle Zahl y^0_{2n+1} angeben, so daß die reellen Zahlen, die Δ^1_{2n+1} in y^0_{2n+1} sind, tatsächlich eine Basis für Σ^1_{2n+1} bilden. Der Schlüssel zu dieser Konstruktion sind die Π^1_{2n+1}-Einermengen (Π^1_{2n+1}-singletons).

2. Hinweis

Im folgenden wird die Zahl 3 stellvertretend für alle ungeraden Zahlen stehen (inklusive der 1). Die Notationen Π^1_3, Σ^1_3, y^0_3 stehen also stets abkürzend für Π^1_{2n+1}, Σ^1_{2n+1}, y^0_{2n+1} mit einem beliebigen $n \in \omega$. Entsprechend steht 2 für $2n$ und 4 für $2n+2$.

Wir wählen deshalb die 3 statt der naheliegenden 1 als Stellvertreter, da der Fall für 1 in den meisten Fällen eine Sonderposition einnimmt: viele Ergebnisse lassen sich direkt und häufig einfacher für den Fall 1 als für $3, 5, 7, \ldots$ beweisen, andere – wie z.B. der Kleene Basis-Satz – sind nur für $n = 0$ gültig. Außerdem ist die stets angenommene Voraussetzung $\mathbf{Det}(\boldsymbol{\Delta}^1_{2n})$ für $n = 0$ bereits in $\mathbf{ZFC}$ erfüllt, während sie für $n > 0$ eine *echte* Voraussetzung darstellt. Insgesamt erscheint also die 3 geeigneter als „generischer Fall“.

Es sei noch einmal betont: für das gesamte Skript wird stets

$$\mathbf{ZFC} + \mathbf{Det}(\boldsymbol{\Delta}^1_{2n})$$

als Rahmentheorie vorausgesetzt. Außerdem identifizieren wir wie üblich die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit dem Baire-Raum ω^ω.

3. Was bisher geschah...

Wir werden kurz die Hauptergebnisse der vorherigen Abschnitte zusammenfassen. Wie Menge der reellen Zahlen in Δ^1_3 sei mit $\mathcal{D}_3$ bezeichnet. Für $x, y \in \mathbb{R}$ haben wir die **Δ^1_3-Reduzibilität** definiert durch $x \leq_3 y :\Longleftrightarrow x \in \Delta^1_3(y)$. Die Δ^1_3-Reduzibilität ist eine Π^1_3-Relation. Wie üblich definieren wir $x <_3 y :\Longleftrightarrow x \leq_3 y \wedge y \not\leq_3 x$ und $x \equiv_3 y :\Longleftrightarrow x \leq_3 y \wedge y \leq_3 x$. Der **$\Delta^1_3$-Grad von** x ist $[x]_3 :\equiv \{y \in \mathbb{R} : y \equiv_3 x\}$. Wir erhalten eine natürliche partielle Ordnung der Δ^1_3-Grade durch $[x]_3 \leq [y]_3 :\Longleftrightarrow x \leq_3 y$. Ist $d = [x]_3$, dann ist ein „Jump-Operator“ definiert durch $d' :\equiv [W^x_3]_3$, wobei W^x_3 eine $\Pi^1_3(x)$-vollständige Teilmenge von ω ist. Es ist dann $d < d'$.

Mit $\mathcal{C}_3$ haben wir die größte dünne Π^1_3-Menge bezeichnet, die unter den genannten Voraussetzungen existiert. $\mathcal{C}_3$ ist abgeschlossen unter $\equiv_3$ und $\leq_3 \restriction \mathcal{C}_3$ ist eine Präwohlordnung. Es folgt, daß die Δ^1_3-Grade für Elemente von $\mathcal{C}_3$ wohlgeordnet sind, ihr Ordnungstyp ist $\rho_3 = \omega_1^{\mathbf{L}[\mathcal{C}_3]}$. Für $\mathcal{C}_4 :\equiv \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathcal{C}_3 \ \big(x \leq_T y\big)\}$ gilt $\mathbf{L}[\mathcal{C}_4] \cap \mathbb{R} = \mathcal{C}_4$ und tatsächlich ist $\mathbf{L}[\mathcal{C}_3] = \mathbf{L}[\mathcal{C}_4]$. Für den Fall $\mathcal{C}_2$ kann man sogar zeigen, daß $\mathbf{L}[\mathcal{C}_2] = \mathbf{L}$ gilt und daß $\mathcal{C}_2$ die reellen Zahlen in $\mathbf{L}$ sind.

Eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}$ heißt **Π^1_3-beschränkt**, falls für jedes $P(x, y) \in \Pi^1_3$ die Relation $R(y) :\Longleftrightarrow \exists x \in B \ \big(P(x, y)\big)$ ebenfalls in Π^1_3 ist. $\mathcal{D}_3$ ist z.B. Π^1_3-beschränkt. Jede

[3] Vgl. Theorem 8.1 in [KMS83].

Π^1_3-beschränkte Menge ist selbst in Π^1_3, abzählbar, also insbesondere Teilmenge von $\mathcal{C}_3$ und in einer Π^1_3-beschränkten Obermenge enthalten, die abgeschlossen unter $\leq_3$ ist, d.h. die ein Anfangsstück der Hierarchie der Δ^1_3-Grade ist. Unter den Voraussetzungen existiert eine größte Π^1_3-beschränkte Menge. Diese wird mit $\mathcal{Q}_3$ bezeichnet. Wir haben zwei weitere Charakterisierungen: $\mathcal{Q}_3$ ist die Menge der reellen Zahlen, die Δ^1_3 in einer abzählbaren Ordinalzahl sind und $\mathcal{Q}_3$ ist die größte Σ^1_3-Hülle, wobei diese definiert ist durch $\mathrm{Hull}_3(S) :\equiv \{x \in \mathbb{R} : \forall y \in S \ (x \leq_3 y)\}$ für nicht-leeres $S \in \Sigma^1_3$. Es gilt also:

$$\mathcal{D}_3 \subseteq \mathcal{Q}_3 \subseteq \mathcal{C}_3.$$

Alle bisherigen Begriffe können auf ein $y \in \mathbb{R}$ relativiert werden. Wir bezeichnen dann mit $\mathcal{Q}_3(y)$ die (existierende) größte $\Pi^1_3(y)$-beschränkte Menge. Wie oben ist $\mathcal{Q}_3(y)$ auch die größte $\Sigma^1_3(y)$-Hülle. Für $x, y \in \mathbb{R}$ definieren wir die $\mathcal{Q}_3$**-Reduzibilität** durch $x \leq^{\mathcal{Q}}_3 y :\Longleftrightarrow x \in \mathcal{Q}_3(y)$. Die $\mathcal{Q}_3$-Reduzibilität ist ebenfalls eine Π^1_3-Relation. Außerdem ist $\leq^{\mathcal{Q}}_3$ reflexiv und transitiv. Es gilt $\leq_1 = \leq^{\mathcal{Q}}_1$ aber $\leq_3 \subsetneq \leq^{\mathcal{Q}}_3$.[4] Analog zu oben definieren wir $<^{\mathcal{Q}}_3$, $\equiv^{\mathcal{Q}}_3$, den $\mathcal{Q}_3$**-Grad** $[x]^{\mathcal{Q}}_3$ und die partielle Ordnung auf den $\mathcal{Q}_3$-Graden. $\mathcal{C}_3$ ist ebenfalls abgeschlossen unter $\equiv^{\mathcal{Q}}_3$, d.h. $\mathcal{C}_3$ besteht aus $\mathcal{Q}_3$-Graden. $\leq^{\mathcal{Q}}_3 \restriction \mathcal{C}_3$ ist auch eine Präwohlordnung, also sind die $\mathcal{Q}_3$-Grade von Elementen aus $\mathcal{C}_3$ wohlgeordnet. Ihr Ordnungstyp ist ebenfalls ρ_3.

Eine zusätzliche Eigenschaft der weiter unten angegebenen Zahlen y^0_3 ist neben der Lösung des *Basis-Problems* die folgende: mit Hilfe dieser reellen Zahlen kann man schließlich auch einen „Jump-Operator“ für die $\mathcal{Q}_3$-Grade definieren.

4. Π^1_3-Einermengen

(4.1) Definition: Ein $x \in \mathbb{R}$ heißt Π^1_3**-Einermenge**, falls $\{x\} \in \Pi^1_3$. Sei $\mathcal{S}_3 :\equiv \{x \in \mathbb{R} : \{x\} \in \Pi^1_3\}$ die Menge der reellen Zahlen, deren Einermenge eine Π^1_3-Menge ist.

(4.2) Lemma:

(1) *Die Menge $\mathcal{S}_3$ ist abgeschlossen unter $\equiv_3$, d.h. ist $x \in \mathcal{S}_3$ und $x \equiv_3 y$, dann ist auch $y \in \mathcal{S}_3$;*
(2) *Die Relation $\leq_3$ ist eine Präwohlordnung auf $\mathcal{S}_3$.*

Beweis: (1) Nach dem *Ersten Periodizitätssatz* sind Π^1_3 und Σ^1_4 genormt, d.h. jedes Element einer dieser Punktklassen besitzt eine entsprechende Γ-Norm. Daraus folgt unmittelbar die Existenz einer partiellen Funktion $d : \omega \times \mathbb{R} \times \omega \to \omega$ mit $\mathrm{graph}(d) \in \Pi^1_3$, so daß für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:[5]

$$y \leq_3 x \Longleftrightarrow \exists k \in \omega \forall n \in \omega \ \big(y(n) = d(k, x, n)\big).$$

Sei nun $x \in \mathcal{S}_3$ und $x \equiv_3 y$. Insbesondere gilt auch $y \leq_3 x$ und wir können ein $k_0 \in \omega$ wählen mit $y(n) = d(k_0, x, n)$ für alle $n \in \omega$. Wegen der Funktionalität von d und

[4] Die letzte Aussage wird erst in einem späteren Abschnitt gezeigt.
[5] Vgl. [KMS83], §1., S. 205 und [Mos80], 6B.1.

wegen $x \leq_3 y$ gilt dann:

$$y^* \in \{y\} \iff \exists x^* \in \Delta^1_3(y^*) \ \big(\underbrace{x^* \in \{x\}}_{\in \Pi^1_3} \wedge \underbrace{\forall n \in \omega \ \big(y^*(n) = d(k_0, x^*, n)\big)}_{\in \Pi^1_3}\big).$$

Da $\mathcal{D}_3(y^*)$ aber eine $\Pi^1_3(y^*)$-beschränkte Menge ist, ist die rechte Seite in $\Pi^1_3(y^*)$, also gilt $\{y\} \in \Pi^1_3$ und damit $y \in \mathcal{S}_3$.

(2) Sei $x \in \mathcal{S}_3$. Da offensichtlich $\{x\}$ abzählbar und damit auch dünn ist, ist $\{x\} \in \Pi^1_3$ eine Teilmenge der größten dünnen Π^1_3-Menge $\mathcal{C}_3$, d.h. es gilt $x \in \mathcal{C}_3$. Also ist $\mathcal{S}_3 \subseteq \mathcal{C}_3$. Andererseits wissen wir bereits, daß $\leq_3 \restriction \mathcal{C}_3$ eine Präwohlordnung ist. ■

Wir benötigen noch ein Hilfsmittel, um für Funktionen die Mitgliedschaft in Δ^1_3 zu zeigen:

(4.3) Lemma: *Ist $x \in \mathbb{R}$ und gilt $\mathrm{graph}(x) \in \Pi^1_3(z)$ oder $\mathrm{graph}(x) \in \Sigma^1_3(z)$ für ein $z \in \mathbb{R}$, dann ist bereits $x \in \Delta^1_3(z)$.*

Beweis: Angenommen, es gilt $\mathrm{graph}(x) \in \Sigma^1_3(z)$ für ein $z \in \mathbb{R}$. Dann existiert eine $\Pi^1_2(z)$-Formel φ mit

$$x(n) = m \iff \exists y \in \mathbb{R} \ \big(\varphi(y, n, m)\big).$$

Da aber $x : \omega \to \omega$ eine (totale) Funktion ist, gilt andererseits:

(i) $\forall y_0, y_1 \in \mathbb{R} \forall n, m_0, m_1 \in \omega \ \big(\varphi(y_0, n, m_0) \wedge \varphi(y_1, n, m_1) \implies m_0 = m_1\big)$
wegen der *Funktionalität*;

(ii) $\forall n \in \omega \, \exists y \in \mathbb{R} \, \exists m \in \omega \ \big(\varphi(y, n, m)\big)$
wegen der *Totalität*.

Daraus folgt unmittelbar:

$$\exists y \in \mathbb{R} \ \big(\varphi(y, n, m)\big) \iff \forall y \in \mathbb{R} \, \exists k \in \omega \ \big(\varphi(y, n, k) \implies k = m\big).$$

Die rechte Seite ist aber ein Element von $\Pi^1_2(z)$. Also gilt $x \in \Delta^1_3(z)$. Die Aussage für $\mathrm{graph}(x) \in \Pi^1_3(z)$ wird analog gezeigt. ■

(4.4) Definition: Ein $x \in \mathcal{S}_3$ heißt **trivial**, falls $x \in \mathcal{D}_3$ gilt.

(4.5) Bemerkung: Wir haben letztes Semester gesehen, daß nach einem Satz von Solovay und Silver eine Π^1_2-Relation $R \subseteq \mathbb{R}$ existiert, so daß genau dann $x \in R$ ist, wenn $x \in 2^\omega$ ist, $0^\#$ existiert und $\{m \in \omega : x(m) = 1\} = 0^\#$ gilt.[6] Daraus folgt unmittelbar, daß $\{0^\#\} \in \Pi^1_2 \subseteq \Delta^1_3$ gilt, also ist $0^\#$, als reelle Zahl aufgefaßt, eine triviale Π^1_3-Einermenge.

(4.6) Lemma: *Ist $x \in \mathcal{S}_3 \cap \mathcal{Q}_3$, dann ist x trivial, d.h. $\mathcal{Q}_3$ enthält keine nicht-trivialen Π^1_3-Einermengen.*

[6] Vgl. Ph. Rohde, *Die deskriptive Komplexität von* $0^\#$, Wintersemester 2000/01.

Beweis: Sei $x \in \mathcal{S}_3 \cap \mathcal{Q}_3$. Wir wollen zeigen, daß $x \in \Delta^1_3$ gilt. Nach Lemma (4.3) genügt es zu zeigen, daß der Graph von x in Π^1_3 liegt. Nun ist aber:

$$x(n) = m \iff \exists x^* \in \mathcal{Q}_3 \ \big(\underbrace{x^* \in \{x\}}_{\in \Pi^1_3} \wedge x^*(n) = m\big).$$

Da $\mathcal{Q}_3$ selbst Π^1_3-beschränkt ist, liegt die rechte Seite in Π^1_3. Also ist $\mathrm{graph}(x) \in \Pi^1_3$. ■

Wir erhalten aus diesem Ergebnis das folgende starke Reflektionsprinzip:

(4.7) Satz: *Sei $P \subseteq \mathbb{R}$ mit $P \in \Pi^1_3$. Dann gilt:*

$$\exists x \in \mathcal{Q}_3 \ \big(P(x)\big) \iff \exists x \in \Delta^1_3 \ \big(P(x)\big).$$

Beweis: Es gilt $\mathcal{D}_3 \subseteq \mathcal{Q}_3$ und damit „$\Longleftarrow$“. Sei nun $P \cap \mathcal{Q}_3 \neq \emptyset$. Da $\mathcal{Q}_3$ selbst eine Π^1_3-Menge ist, gilt auch $P \cap \mathcal{Q}_3 \in \Pi^1_3$. Nach dem *Zweiten Periodizitätssatz* sind Π^1_3 und Σ^1_4 skaliert, d.h. jedes Element einer dieser Punktklassen besitzt eine entsprechende Γ-Skala. Daraus folgt unmittelbar der *Basis-Satz für* Π^1_3, wonach $\mathcal{S}_3$ eine Basis für Π^1_3 ist. Also existiert ein $x \in \mathcal{S}_3$ mit $x \in P \cap \mathcal{Q}_3$. Nach dem letzten Lemma ist aber x trivial, d.h. es gilt $x \in \Delta^1_3$. ■

5. Die erste nicht-triviale Π^1_3-Einermenge

Es stellt sich nun die Frage, ob es überhaupt nicht-triviale Π^1_3-Einermengen gibt. Betrachten wir die Menge

$$A :\equiv \{y \in \mathbb{R} \,:\, \forall x \in \Delta^1_3 \ \big(x <_3 y\big)\}.$$

Ist $x \in \mathcal{D}_3$, dann gilt offensichtlich $x \leq_3 y$ für alle $y \in \mathbb{R}$, insbesondere ist $\mathcal{D}_3$ der kleinste Δ^1_3-Grad bzgl. der natürlichen Ordnung der Δ^1_3-Grade. Andererseits haben wir für die Δ^1_3-Grade bereits einen Jump-Operator kennengelernt. Wir finden also für jeden Δ^1_3-Grad einen größeren. Insbesondere existiert also ein $y \in \mathbb{R}$ mit $x <_3 y$ für alle $x \in \mathcal{D}_3$, d.h. es ist $A \neq \emptyset$. Da nun $x <_3 y$ eine Π^1_3-Relation ist, gilt auch $A \in \Pi^1_3$. Nach dem bereits erwähnten Basis-Satz für Π^1_3 enthält A eine Π^1_3-Einermenge $z \in \mathcal{S}_3$. Dann ist aber $z \notin \Delta^1_3$, da sonst $z \in \Delta^1_3(x)$ für ein (für alle) $x \in \mathcal{D}_3$ gelten würde, also $z \leq_3 x$ und damit $z \notin A$.

Nach Lemma (4.2)(2) ist $\leq_3$ eine Präwohlordnung auf $\mathcal{S}_3$, insbesondere sind also die Δ^1_3-Grade von Π^1_3-Einermengen wohlgeordnet und wir können einen kleinsten Δ^1_3-Grad von einer *nicht-trivialen* Π^1_3-Einermenge wählen:

(5.1) Definition: Sei $y^0_3 \in \mathcal{S}_3$ ein beliebiger Repräsentant des kleinsten Elements von $\{[x]_3 \,:\, x \in \mathcal{S}_3 \setminus \mathcal{D}_3\}$. y^0_3 heißt die **erste nicht-triviale Π^1_3-Einermenge**. Beachte, daß nach Lemma (4.2)(1) *jedes* $y \in [x]_3$ für $x \in \mathcal{S}_3$ eine Π^1_3-Einermenge ist.

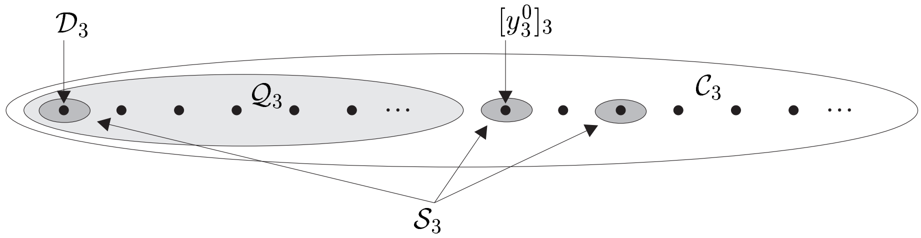

ABB. 1. Die wohlgeordneten Δ^1_3-Grade in $\mathcal{C}_3$.

(5.2) Bemerkung: Abbildung 1 stellt die gegebene Situation dar. Man kann zeigen, daß der Δ^1_3-Grad von y^0_3 der kleinste Grad oberhalb von $\mathcal{Q}_3$ ist und daß der Ordnungstyp von $\leq_3\restriction\mathcal{Q}_3$ eine Limesordinalzahl ist.[7]

Kleenes $\mathcal{O}$ ist ein möglicher Kandidat für y^0_1. Außerdem gilt $W^0_1 \equiv_1 \mathcal{O}$, d.h. y^0_1 ist ein Repräsentant von $[W^0_1]_1$. Wie aber gezeigt werden kann, ist dies ein Sonderfall für $n = 0$: der kleinste Δ^1_{2n+1}-Grad einer nicht-trivialen Π^1_{2n+1}-Einermenge ist für $n > 0$ wesentlich größer als der Δ^1_{2n+1}-Grad einer Π^1_{2n+1}-vollständigen Menge.[8]

Mit Hilfe der später eingeführten relativierten Form y^x_3 als einem (kanonischem) Repräsentanten des kleinsten Δ^1_3-Grades von einer nicht-trivialen $\Pi^1_3(x)$-Einermenge können wir die gesuchte Jump-Operation für die $\mathcal{Q}_3$-Grade durch

$$q' :\equiv [y^x_3]^{\mathcal{Q}}_3$$

für $q = [x]^{\mathcal{Q}}_3$ definieren.[9]

Wir wollen zunächst nur Eigenschaften von y^0_3 betrachten, die lediglich von seinem Δ^1_3-Grad abhängen, so daß wir uns im Moment also mit einem *beliebigen* Repräsentanten dieser Äquivalenzklasse begnügen können. Wir untersuchen im folgenden die Beziehung von y^0_3 zum Basis-Problem für Σ^1_3. Zunächst gilt offensichtlich:

(5.3) Lemma: *Sei* $\{x \in \mathbb{R} : x \leq_3 y\}$ *mit* $y \in \mathbb{R}$ *eine Basis für* Σ^1_3*. Gilt* $y^* \equiv_3 y$*, dann ist auch* $\{x \in \mathbb{R} : x \leq_3 y^*\}$ *eine Basis für* Σ^1_3*.* ■

Die eingangs erwähnte Eigenschaft der ersten nicht-trivialen Π^1_3-Einermenge ist nun die folgende:

(5.4) Satz (Martin-Solovay): $\{x \in \mathbb{R} : x \leq_3 y^0_3\}$ *ist eine Basis für* Σ^1_3*.*

Beweis: Sei B eine nicht-leere Σ^1_3-Menge und sei A eine Π^1_2-Menge, so daß gilt:

$$x \in B \iff \exists y \in \mathbb{R}\ \big(\langle x, y\rangle \in A\big).$$

Dabei sei $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine fest gewählte Bijektion mit geringer Komplexität (es genügt sicher Π^0_2). Dann ist auch $A \neq \emptyset$. Wenn wir nun zeigen können, daß ein $a \in A$

[7] Vgl. Theorem 6.3 in [KMS83].
[8] Vgl. Theorem 8.1 in [KMS83].
[9] Vgl. Definition 6.2 in [KMS83].

mit $a \leq_3 y^0_3$ existiert, dann gilt für $a = \langle x, y\rangle$, daß $x \in B$ und $x \leq_3 y^0_3$ ist. Das ist sicherlich erfüllt, wenn wir zeigen:

($\star$) Ist A eine nicht-leere Δ^1_3-Menge, dann existiert ein $a \in A$ mit $a \leq_3 y^0_3$.

Sei eine entsprechende Menge A gegeben. Da Π^1_3 unter der gegebenen Voraussetzung die Skala-Eigenschaft besitzt und $A \in \Pi^1_3$ gilt, existiert eine eine Π^1_3-Skala auf A. Man kann zeigen, daß für $A \in \Delta^1_3$ aber jede Π^1_3-Skala bereits eine Δ^1_3-Skala ist. Sei also $\{\psi_n\}$ eine Δ^1_3-Skala auf A.

Wir definieren dann für alle $x \in A$ und $n \in \omega$:

$$\varphi_n(x) :\equiv \|\psi_0(x), x(0), \ldots, \psi_n(x), x(n)\|$$

Dabei sei $\|\cdot\| : \mathrm{Ord}^{<\omega} \to \mathrm{Ord}$ die entsprechende Bijektion der lexikographischen Wohlordnung von endlichen Tupeln von Ordinalzahlen. Insbesondere gilt dann: ist $x_k \leq y_k$ für alle $k \leq n$, dann ist auch $\|x_0, \ldots, x_n\| \leq \|y_0, \ldots, y_n\|$.

<u>Beh. 1:</u> $\{\varphi_n\}$ ist ebenfalls eine Δ^1_3-Skala auf A.

Offensichtlich ist jedes φ_n eine Norm, d.h. eine Funktion von A nach Ord. Sei nun $\langle x_i : i \in \omega\rangle$ eine Folge in A mit $\lim_{i\to\infty} x_i = x$, so daß für alle $n \in \omega$ ein $N(n) \in \omega$ existiert mit

$$\varphi_n(x_i) = \mathrm{const}\,. = \lambda_n \text{ für alle } i \geq N(n).$$

Wir müssen zeigen, daß $x \in A$ und $\varphi_n(x) \leq \lambda_n$ für alle $n \in \omega$ gilt. Aus $\varphi_n(x_i) = \lambda_n$ für alle $i \geq N(n)$ folgt aber auch $\psi_n(x_i) = \mathrm{const}\,. = \lambda^*_n$ für alle $i \geq N(n)$. Da $\{\psi_n\}$ eine Skala ist, gilt also $x \in A$ und $\psi_n(x) \leq \lambda^*_n$ für alle $n \in \omega$. Da andererseits $\lim_{i\to\infty} x_i = x$ gilt (interpretiert bzgl. der üblichen Metrik des Baire-Raumes), existiert für jedes $n \in \omega$ ein $M(n) \in \omega$ mit $x{\restriction}n+1 = x_i{\restriction}n+1$ für alle $i \geq M(n)$. Für festes $n \in \omega$ und $i \geq \max\{N(n), M(n)\}$ gilt dann $\psi_k(x) \leq \lambda^*_k = \psi_k(x_i)$ und $x(k) = x_i(k)$ für alle $k \leq n$, also auch

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) &= \|\psi_0(x), x(0), \ldots, \psi_n(x), x(n)\|\\ &\leq \|\psi_0(x_i), x_i(0), \ldots, \psi_n(x_i), x_i(n)\| = \lambda_n.\end{aligned}$$

Also ist $\{\varphi_n\}$ eine Skala. Es bleibt zu zeigen, daß es eine Δ^1_3-Skala ist. Sei dazu

$$S(n, x, y) :\Longleftrightarrow x \in A \wedge \varphi_n(x) < \varphi_n(y).$$

Wir müssen zeigen, daß $S \in \Delta^1_3$ gilt. Es ist:

$$\begin{aligned}S(n,x,y) \Longleftrightarrow & x \in A \wedge \exists k \leq n \Big(\forall i < k \big(\psi_i(x) = \psi_i(y) \wedge x(i) = y(i)\big) \wedge\\ & \big(\psi_k(x) < \psi_k(y) \vee \big(\psi_k(x) = \psi_k(y) \wedge x(k) < y(k)\big)\big)\Big).\end{aligned}$$

Da $\{\psi_n\}$ eine Δ^1_3-Skala ist, ist nun die Relation $x \in A \wedge \psi_k(x) < \psi_k(y)$ ein Element von Δ^1_3. Damit ist aber auch $S(n, x, y) \in \Delta^1_3$. Analog zeigt man, daß die Relation

$$R(n, x, y) :\Longleftrightarrow x \in A \wedge \varphi_n(x) \leq \varphi_n(y)$$

ebenfalls ein Element von Δ^1_3 ist. Zusammen folgt, daß $\{\varphi_n\}$ tatsächlich eine Δ^1_3-Skala ist.

Wie man leicht überprüft, ist $\{\varphi_n\}$ sogar eine **exzellente** Skala,[10] d.h. es gilt:

(E1) $\varphi_n(x) \leq \varphi_n(y) \Longrightarrow \forall k \leq n \ \big(\varphi_k(x) \leq \varphi_k(y)\big)$;
(E2) $\varphi_n(x) = \varphi_n(y) \Longrightarrow x{\restriction}n+1 = y{\restriction}n+1$.

Mit Hilfe derartiger Skalen kann man nun sehr einfach Elemente aus A anhand nicht-leerer Teilmengen $A^* \subseteq A$ konstruieren: man muß nur für $x \in A^*$ die Ordinalzahlen $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots$ minimieren. Wir definieren dazu für $n \in \omega$:

$$A_n^* :\equiv \big\{x \in A^* \, : \, \forall y \in A^* \ \big(\varphi_n(x) \leq \varphi_n(y)\big)\big\}.$$

Dann gilt aufgrund der genannten Eigenschaften:

$$A_0^* \supseteq A_1^* \supseteq A_2^* \supseteq \ldots \quad \text{und} \quad \bigcap_{n\in\omega} A_n^* = \{a\} \text{ für ein } a \in A.$$

Denn wenn wir für jedes $n \in \omega$ ein $a_n \in A_n^*$ wählen, dann gilt für $n \leq m$ nach Wahl $\varphi_m(a_m) \leq \varphi_m(a_n)$ und wegen (E1) auch $\varphi_n(a_m) \leq \varphi_n(a_n)$. Andererseits gilt $\varphi_n(a_n) \leq \varphi_n(a_m)$, zusammen also $\varphi_n(a_n) = \varphi_n(a_m)$ für alle $m \geq n$. Nach (E2) gilt dann auch $a_n{\restriction}n+1 = a_m{\restriction}n+1$ für alle $m \geq n$, also ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Außerdem gilt dann auch $a(n) = a_n(n)$.

Wir wenden diese Methode auf die folgende Teilmenge von A an:

$$A^* :\equiv \big\{x \in A \, : \, y_3^0 \not\leq_3 x\big\}.$$

Wir müssen noch zeigen, daß $A^* \neq \emptyset$ gilt. Angenommen nicht: dann gilt $\forall x \in A \ \big(y_3^0 \leq_3 x\big)$, insbesondere also $y_3^0 \in \mathrm{Hull}_3(A)$ mit $A \in \Sigma_3^1$. Nun ist $\mathcal{Q}_3$ die größte Σ_3^1-Hülle, also gilt $y_3^0 \in \mathcal{Q}_3$. Aber nach Lemma (4.6) enthält $\mathcal{Q}_3$ keine nicht-trivialen Π_3^1-Einermengen. Widerspruch.

Sei also $a \in A$ entsprechend der obigen Konstruktion.

<u>BEH. 2:</u> Es gilt $a \leq_3 y_3^0$.

Haben wir die Behauptung gezeigt, dann ist also a das gesuchte Element für $(\star)$ und der Satz ist bewiesen.

Zunächst gilt $A^* \in \Sigma_3^1$, denn für das Komplement haben wir die folgende Darstellung:

$$x \notin A^* \Longleftrightarrow \underbrace{x \notin A}_{\in\Pi_3^1} \vee \big(\underbrace{x \in A}_{\in\Pi_3^1} \wedge \underbrace{\exists y \in \Delta_3^1(x) \ \big(\underbrace{y \in \{y_3^0\}}_{\in\Pi_3^1}\big)}_{\in\Pi_3^1}\big).$$

Man beachte dabei, daß nach Voraussetzung $A \in \Delta_3^1$ gilt und $\mathcal{D}_3$ eine Π_3^1-beschränkte Menge ist. Wir definieren nun:

$$R(n,x) :\Longleftrightarrow \forall y \ \big(y \in A^* \Longrightarrow \varphi_n(x) \leq \varphi_n(y)\big).$$

[10] Dies ist eine stärkere Version einer **sehr guten** Skala, vgl. [Mos80], S. 231.

Angenommen, wir hätten bereits gezeigt, daß $R(n,x) \in \Sigma^1_3(y^0_3)$ für $x \in A^*$ gilt. Für a haben wir dann die Darstellung:

$$a(n) = m \iff \underbrace{\exists x\big(\underbrace{x \in A^*}_{\in\Sigma^1_3} \wedge \underbrace{R(n,x)}_{\in\Sigma^1_3(y^0_3)} \wedge x(n) = m\big)}_{\in\Sigma^1_3(y^0_3)}.$$

Somit ist $\mathrm{graph}(a) \in \Sigma^1_3(y^0_3)$ und nach Lemma (4.3) ist dann $a \in \Delta^1_3(y^0_3)$, also gilt $a \leq_3 y^0_3$. Es bleibt zu zeigen:

<u>Beh. 3:</u> Für $x \in A^*$ gilt $R(n,x) \in \Sigma^1_3(y^0_3)$.

Sei $x \in A^*$. Zunächst ist $R \in \Pi^1_3$, denn für das Komplement gilt:

$$\neg R(n,x) \iff \exists y\ \big(y \in A^* \wedge \varphi_n(x) \not\leq \varphi_n(y)\big).$$

Dabei ist $A^* \in \Sigma^1_3$ und $\{\varphi_n\}$ ist eine Δ^1_3-Skala auf A, d.h. die Relation $\varphi_n(x) \not\leq \varphi_n(y)$ ist für $x \in A$ ebenfalls in Σ^1_3.

Sei nun U eine Π^1_3-universelle Menge und seien $n_0, m_0 \in \omega$, so daß gilt:

$$R(n,x) \iff (n_0, \langle n,x\rangle) \in U \quad \text{und} \quad y \in \{y^0_3\} \iff (m_0, y) \in U.$$

Dabei sei $\langle\cdot,\cdot\rangle : \omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine fest gewählte Bijektion geringer Komplexität. Wir haben bereits weiter oben bemerkt, daß die Punktklasse Π^1_3 genormt ist. Da $U \in \Pi^1_3$ gilt, existiert daher eine (sogar reguläre) Π^1_3-Norm $\rho : U \twoheadrightarrow \boldsymbol{\delta}^1_3$. Das bedeutet:

(N1) Die Relation $u \in U \wedge \rho(u) \leq \rho(v)$ ist in Π^1_3, ihre Negation $u \notin U \vee \rho(v) < \rho(u)$ also in Σ^1_3;
(N2) Die Relation $u \in U \wedge \rho(u) < \rho(v)$ ist in Π^1_3, ihre Negation $u \notin U \vee \rho(v) \leq \rho(u)$ also in Σ^1_3.

Wir werden zeigen, daß für $x \in A^*$ gilt:

$$R(n,x) \iff (m_0, y^0_3) \notin U \vee \rho(n_0, \langle n,x\rangle) < \rho(m_0, y^0_3).$$

Aus (N1) folgt dann, daß $R(n,x) \in \Sigma^1_3(y^0_3)$ gilt und die Behauptung ist gezeigt.

„$\Longleftarrow$“: Nach Wahl von m_0 gilt $(m_0, y^0_3) \in U$, also muß das zweite Glied der Disjunktion erfüllt sein. Aus der Beschränktheit von $\rho(n_0, \langle n,x\rangle)$ folgt aber nach Wahl von n_0 bereits $R(n,x)$.

„$\Longrightarrow$“: Angenommen, dies gilt nicht. Dann existiert also ein $n \in \omega$ mit $R(n,x)$ und $\rho(m_0, y^0_3) \leq \rho(n_0, \langle n,x\rangle)$. Dann gilt:

$$y \in \{y^0_3\} \iff (n_0, \langle n,x\rangle) \notin U \vee \rho(m_0, y) \leq \rho(n_0, \langle n,x\rangle).$$

Denn ist $y \in \{y^0_3\}$, dann ist $(m_0, y) \in U$ und $\rho(m_0, y) = \rho(m_0, y^0_3) \leq \rho(n_0, \langle n,x\rangle)$ nach Voraussetzung. Sei andererseits der rechte Teil erfüllt. Nach Voraussetzung gilt $R(n,x)$ und damit $(n_0, \langle n,x\rangle) \in U$ nach Wahl von n_0. Also muß $\rho(m_0, y)$ durch $\rho(n_0, \langle n,x\rangle)$ beschränkt sein und daher gilt $(m_0, y) \in U$. Also ist $y \in \{y^0_3\}$.

Aus (N2) folgt dann, daß $\{y^0_3\}$ eine $\Sigma^1_3(x)$-Menge und als Π^1_3-Einermenge damit auch eine $\Delta^1_3(x)$-Menge ist. Somit gilt $y^0_3 \leq_3 x$ im Widerspruch zu $x \in A^*$.

Damit ist alles gezeigt und der Satz ist bewiesen. ■

Das Resultat des Satzes können wir noch wie folgt verschärfen:

(5.5) Korollar: *Angenommen, es ist $x <_3 y_3^0$. Dann ist $\{z \in \mathbb{R} : z <_3 y_3^0\}$ eine Basis für $\Sigma_3^1(x)$.*

Beweis: Sei A eine nicht-leere $\Sigma_3^1(x)$-Menge. Sei analog zum absoluten Fall $y_3^0(x)$ ein Repräsentant des kleinsten Δ_3^1-Grades von nicht-trivialen $\Pi_3^1(x)$-Einermengen. Nun ist andererseits y_3^0 als Π_3^1-Einermenge auch eine $\Pi_3^1(x)$-Einermenge, d.h. es gilt $\{y_3^0\} \in \Pi_3^1(x)$. Aber y_3^0 ist auch eine nicht-triviale $\Pi_3^1(x)$-Einermenge, denn nach Voraussetzung gilt $x <_3 y_3^0$, also nach Definition $y_3^0 \not\leq_3 x$, d.h. $y_3^0 \notin \mathcal{D}_3(x)$. Es folgt, daß $y_3^0(x) \leq_3 y_3^0$ gilt. Der Beweis von Satz (5.4) kann vollständig auf $x \in \mathbb{R}$ relativiert werden, d.h. für jede nicht-leere $\Sigma_3^1(x)$-Menge B existiert ein $z \in B$ mit $z \leq_3 y_3^0(x)$. Aus der Transitivität von $\leq_3$ folgt dann auch $z \leq_3 y_3^0$. Wir definieren nun:

$$B :\equiv \big\{a \in A : y_3^0 \not\leq_3 a\big\}.$$

Dann ist B tatsächlich eine $\Sigma_3^1(x)$-Menge, denn es gilt:

$$a \in B \Longleftrightarrow \underbrace{a \in A}_{\in \Sigma_3^1(x)} \wedge \neg\big(\underbrace{y_3^0 \leq_3 a}_{\in \Pi_3^1}\big).$$

Also existiert ein $z \in B$ mit $z \leq_3 y_3^0$. Nach Definition von B gilt dann auch $y_3^0 \not\leq_3 z$, also

$$z <_3 y_3^0.$$

■

6. Ausblick

Wir haben damit das *Basis-Problem für* Σ_3^1 entschieden: die reellen Zahlen, die Δ_3^1 in y_3^0 sind, bilden eine Basis für Σ_3^1. Wir hatten aber y_3^0 als einen *beliebigen* Repräsentanten des kleinsten Δ_3^1-Grades d von nicht-trivialen Π_3^1-Einermengen gewählt. Der nächste Schritt besteht darin, über eine auf Harrington zurückgehende Charakterisierung der Turing-Grade *innerhalb* von d einen *kanonischen* Repräsentanten y_3^0 von d auszuwählen, so daß wir den Satz von Martin und Solovay wie folgt verschärfen können:

Die Punktmenge $\{x \in \mathbb{R} : x$ ist rekursiv in $y_3^0\}$ ist eine Basis für Σ_3^1.

Literatur

[KMS83] KECHRIS, A. S.; MARTIN, D. A.; SOLOVAY, R. M.: *Introduction to Q-Theory*. IN: Kechris, A. S.; Martin, D. A.; Moschovakis, Y. N. (Hrsg.): Cabal Seminar 79–81. Lecture Notes in Mathematics, Nr. 1019. Springer, Berlin 1983. S. 199–281.

[Mos80] MOSCHOVAKIS, Y. N.: *Descriptive set theory*. North-Holland, Amsterdam 1980.