Seminar für Diplom und Staatsexamenskandidaten, SS 2001

Elementare Einbettungen und Laver-Tafeln

1 Wiederholung

1.1 I3:

Sei λ eine Limesordinalzahl. Dann existiert eine elementare Einbettung $j : V_\lambda \to V_\lambda$.

1.2 Definition:

$$\widehat{E_\lambda} := \{j \mid j : V_\lambda \to V_\lambda \text{ elementar}\}$$

$$E_\lambda := \widehat{E_\lambda} \setminus (id \upharpoonright V_\lambda)$$

Seien j_1, $j_2 \in \widehat{E_\lambda}$, dann definiere die Anwendung von j_1 auf j_2 durch:

$$j_1[j_2] := \bigcup_{\alpha<\lambda} j_1(j_2 \upharpoonright V_\alpha)$$

j_1 ist Linksdivisor von j_2 in $(\widehat{E_\lambda}, [\,])$ genau dann, wenn gilt:

$$j_2 = j_1[j_3] \text{ mit } j_1, j_2, j_3 \in \widehat{E_\lambda}$$

1.3 Lemma:

In $(\widehat{E_\lambda}, [\,])$ gilt folgendes Linksdistributivitätsgesetz:

$$j_1[j_2[j_3]] = j_1[j_2]\,[j_1[j_3]] \text{ (LD)}$$

In $(\widehat{E_\lambda}, [\,], \circ)$ gelten folgende Gesetze:

$$\text{(i) } j_1 \circ (j_2 \circ j_3) = (j_1 \circ j_2) \circ j_3 \qquad \text{(ii) } (j_1 \circ j_2)[j_3] = j_1[j_2[j_3]]$$

$$\text{(iii) } j_1[j_2 \circ j_3] = j_1[j_2] \circ j_1[j_3] \qquad \text{(iv) } j_1 \circ j_2 = j_1[j_2] \circ j_1$$

1.4 Lemma:

Seien j_1, $j_2 \in E_\lambda$. Dann ist $crit(j_1[j_2]) = j_1(crit(j_2))$.

1.5 Definition:

(i) $\mathrm{Iter}(j)$ ist das Untersystem von $(E_\lambda, [\,])$, das von j erzeugt wird, $i \in \mathrm{Iter}(j)$ heißt reines Iterat von j.
(ii) $\widehat{\mathrm{Iter}}(j)$ ist der LD-Untermonoid von $(\widehat{E_\lambda}, [\,], \circ)$, der von j erzeugt wird, $i \in \widehat{\mathrm{Iter}}(j)$ heißt Iterat von j.

1.6 Satz:

$\mathrm{Iter}(j)$ ist ein freies LD-System und $\widehat{\mathrm{Iter}}(j)$ ist ein freier LD-Monoid.

2 Laver-Tafeln

Wir wollen nun versuchen, ein endliches System zu konstruieren, das nur einen Erzeuger besitzt und (LD) erfüllt. Wir starten mit einer unvollständigen Tafel in der wir uns die erste Spalte vorgeben und komplettieren diese, indem wir (LD) benutzen. Versuchen wir also ein System $(\{1, \ldots, N\}, *)$ zu konstruieren, indem jedes Element eine Linkspotenz der 1 ist, z.B. $1_{[p]}$. Die Linkspotenz $x_{[p]}$ von x ist induktiv definiert durch $x_{[1]} = x$ und $x_{[p+1]} = x_{[p]} \cdot x$. OBdA können wir annehmen, dass $1_{[p]} = p$ für $1 \leq p \leq N$ gilt. Nun muss nur noch der Wert von $N * 1$ bzw. $1_{[N+1]}$ festgelegt werden. Wir wählen $N * 1 = 1$, d.h. die erste Spalte bildet einen Zykel.

2.1 Notation:

$$(a)_N = a \bmod N$$

Die Bedingung an die Werte in der ersten Spalte kann nun wie folgt formuliert werden. Für jedes a aus $\{1, \ldots, N\}$ gilt:

$$a * 1 = (a+1)_N \tag{1}$$

2.2 Lemma:

(i) Für jedes N gibt es eine eindeutige Operation $*$ auf $\{1, \ldots, N\}$, die (1) erfüllt und für alle a, b

$$a * (b * 1) = (a * b) * (a * 1)$$

(ii) Die folgenden Relationen gelten:

$$a * b \begin{cases} = b & \text{für } a = N \\ = a + 1 & \text{für } b = 1, \text{ und für } a * (b-1) = N \\ > a * (b-1) & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $a < N$ gibt es $p \leq N - a$ und $c_1 = a + 1 < c_2 < \ldots < c_p = N$, so dass für jedes b gilt: $a * b = c_i$ mit $i = (b)_p$. Insbesondere gilt $a * b > a$.

2.3 Definition:

Das konstruierte System heisse S_N.

2.4 Bemerkung:

Es gilt:

$$\begin{aligned} (N-1) * b &= N \\ (N-2) * b &= \begin{cases} N-1 & \text{für } b \text{ ungerade} \\ N & \text{für } b \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

2.5 Lemma:

Jedes LD-System S, das nur einen Erzeuger g besitzt, mit $g_{[N+1]} = g$ und $g_{[a]} \neq g$ für $a \leq N$, ist isomorph zu S_N.

2.6 Frage:

Gilt LD in S_N, d.h. gilt LD für beliebige Tripel aus S_N?

2.7 Lemma:

S_N ist ein LD-System, g.d.w. $a * N = N$ für jedes a gilt.

2.8 Satz:

(i) Wenn $N \neq 2^n$ für alle n gilt, so gibt es kein LD-System, das (1) erfüllt.
(ii) Für jedes n gibt es ein eindeutiges System, das (1) erfüllt, nämlich S_{2^n}.

2.9 Definition:

(i) Für $n \geq 0$ ist die n-te Laver-Tafel $(A_n, *_n)$ definiert als das LD-System S_{2^n}.
(ii) Für $1 \leq a \leq 2^n$ ist die Periode von a in A_n die Anzahl der verschiedenen Werte in der Spalte von a in A_n.

3 Endliche Quotienten von Einbettungsalgebren

3.1 Definition:

Seien $i, j \in E_\lambda$ und γ eine Limesordinalzahl mit $\gamma < \lambda$. Dann heißen i und j γ-äquivalent, notiert als $i \overset{\gamma}{=} j$, wenn $i(x) \cap V_\gamma = j(x) \cap V_\gamma$ für jedes $x \in V_\gamma$ gilt.

3.2 Lemma:

Sei $i \overset{\gamma}{=} j$ und $\alpha < \gamma$. Dann gilt entweder $i(\alpha) < \gamma$ und somit $j(\alpha) = i(\alpha)$ oder $i(\alpha) \geq \gamma$ und damit auch $j(\alpha) \geq \gamma$. Insbesondere gilt entweder crit(i)=crit(j) $\leq \gamma$ oder crit(i) $\geq \gamma$ und crit(j) $\geq \gamma$.

3.3 Lemma:

Seien j_1, $j_2 \in E_\lambda$. Dann ist $j_1[j_2] \overset{crit(j_1)}{=} j_2$.

3.4 Satz:

(i) Seien $j_1 \overset{\gamma}{=} j_1'$, $j_2 \overset{\gamma}{=} j_2'$ und j_1, j_1', j_2, $j_2' \in \widehat{E_\lambda}$. Dann gilt auch $j_1(j_2(x)) \overset{\gamma}{=} j_1'(j_2'(x))$ für $x \in V_\gamma$.
(ii) Seien $j_1 \overset{\gamma}{=} j_1'$ und $j_2 \overset{\gamma}{=} j_2'$ mit $j_1(\delta) \geq \gamma$. Dann gilt auch $j_1[j_2] \overset{\gamma}{=} j_1'[j_2']$.

3.5 Lemma:

Seien $j_0, \ldots, j_p \in E_\lambda$ und $\gamma = \text{crit}(j_0)$.

(i) Sei $j_0[j_1[j_2] \ldots [j_l]](\gamma) \geq \gamma'$ für $1 \leq l \leq p-1$. Dann gilt $j_0[j_1][j_2] \ldots [j_p] \overset{\gamma'}{=} j_0[j_1[j_2] \ldots [j_p]]$.
(ii) Sei $\text{crit}(j_1[j_2] \ldots [j_l]) < \gamma$ für $1 \leq l \leq p-1$ und $\text{crit}(j_1[j_2] \ldots [j_p]) \leq \gamma$. Dann gilt $\text{crit}(j_0[j_1][j_2] \ldots [j_p]) = j_0(\text{crit}(j_1[j_2] \ldots [j_p]))$.

3.6 Definition:

Die Ordinalzahl $\text{crit}_n(j)$ ist definiert als das (n+1)-te Element in der wachsenden Auzählung der kritischen Punkte der Iterationen von j. Insbesondere ist $\text{crit}_0(j) = \text{crit}(j)$.

3.7 Satz:

Sei $j \in E_\lambda$. Dann ist der Quotient von $\mathrm{Iter}(j)$ unter $\mathrm{crit}_n(j)$-Äquivalenz die Laver-Tafel $(A_n, *_n)$.

Zum Beweis dieses Satzes genügt es die Voraussetzungen von Lemma 2.5 zu erfüllen.

3.8 Lemma:

Seien $i_1, \ldots, i_{2^n}$ Iterate von j. Dann gilt $\mathrm{crit}(i_1[i_2]\ldots[i_p]) \geq \mathrm{crit}_n(j)$ für ein $p \leq 2^n$.

3.9 Lemma:

Sei n fest und i ein Iterat von j. Dann existiert ein reines Iterat i' von j, so dass $i \overset{crit_n(j)}{=} i'$ gilt.

3.10 Satz:

Sei $j \in E_\lambda$, $n > 0$ und i ein Iterat von j. Dann ist $j_{[p]} \overset{crit_n(j)}{=} i$ für ein $p \leq 2^n$.

3.11 Satz:

Sei $j \in E_\lambda$. Dann gilt für jedes p $\mathrm{crit}(j_{[p]}) = \mathrm{crit}_m(j)$, wobei m die größte Zahl ist, so dass 2^m p teilt.

3.12 Lemma:

Die Linkspotenzen $j_{[p]}$ und $j_{[p']}$ sind genau dann $\mathrm{crit}_n(j)$-äquivalent, wenn gilt $p = (p')_{2^n}$.