Die Theorie der Ordinalzahlmengen

Martin Koerwien

11. Juni 2001

1 Axiomatisierung

Die in der folgenden Definition angegebene Theorie SO soll die Eigenschaften der Ordinalzahlen und der Mengen von Ordinalzahlen eines ZFC-Modells axiomatisch beschreiben. Dazu wird eine neue Sprache eingeführt, die einerseits die Zweisortigkeit dieser Struktur ausdrückbar macht, und andererseits ein Symbol G enthält, dem die Eigenschaften (GPF) und (SUR) der Gödelschen Paarungsfunktion zugewiesen werden.

Definition 1.1. Sei L_{SO} die Sprache erster Stufe mit Identität und den folgenden Symbolen: $<$ und $\in$ seien zweistellige Relationssymbole, Ord und SOrd seien einstellige Relationssymbole, G sei ein zweistelliges Funktionssymbol.

Definition 1.2. Bei der Formulierung des folgenden Axiomensystems SO und auch im weiteren Verlauf machen wir von den folgenden Konventionen für gebundene Variablen Gebrauch: Kleine griechische Buchstaben sollen Ord-Variablen sein, z.B. ist $\forall\alpha\phi(\alpha)$ eine Abkürzung für $\forall\alpha(\mathrm{Ord}(\alpha) \to \phi(\alpha))$. Kleine lateinische Buchstaben stellen SOrd-Variablen dar, z.B. wird $\forall a\phi(a)$ durch $\forall a(\mathrm{SOrd}(a) \to \phi(a))$ übersetzt. Soll explizit hervorgehoben werden, dass ein Quantor typlos ist, d.h. nicht unter diese Konvention fällt, so wird die Notation $\overline{\forall} a\phi(a)$ benutzt. Die Bezeichnung $\alpha \leq \beta$ steht abkürzend für $\alpha < \beta \vee \alpha = \beta$.

(TYP) Typaxiom:
$\overline{\forall} x, y((\mathrm{Ord}(x) \leftrightarrow \neg\mathrm{SOrd}(x)) \wedge (x < y \to \mathrm{Ord}(x) \wedge \mathrm{Ord}(y)) \wedge (x \in y \to \mathrm{Ord}(x) \wedge \mathrm{SOrd}(y)) \wedge \mathrm{Ord}(\mathrm{G}(x, y)))$

(WO) $<$ ist eine Wohlordnung:
$\forall\alpha, \beta, \gamma(\neg\alpha < \alpha \wedge (\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \to \alpha < \gamma) \wedge (\alpha < \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta < \alpha)) \wedge \forall a(\exists\alpha(\alpha \in a) \to \exists\alpha(\alpha \in a \wedge \forall\beta(\beta < \alpha \to \beta \notin a)))$

(INF) Unendlichkeitsaxiom (es gibt eine Limeszahl):
$\exists\alpha(\exists\beta(\beta < \alpha) \wedge \forall\beta(\beta < \alpha \to \exists\gamma(\beta < \gamma \wedge \gamma < \alpha))$

(EXT) Extensionalitätsaxiom:
$\forall a, b(\forall\alpha(\alpha \in a \leftrightarrow \alpha \in b) \to a = b)$

(INI) Existenz von Ord-Anfangsstücken:
$\forall\alpha\exists a\forall\beta(\beta < \alpha \leftrightarrow \beta \in a)$

(BOU) Beschränktheitsaxiom:
$\forall a\exists\alpha\forall\beta(\beta \in a \to \beta < \alpha)$

(GPF) Axiom der Gödel-Paarungsfunktion:
$\forall\alpha, \beta, \gamma(\mathrm{G}(\beta, \gamma) \leq \alpha \leftrightarrow \forall\delta, \epsilon((\delta, \epsilon) <^* (\beta, \gamma) \to \mathrm{G}(\delta, \epsilon) < \alpha))$

Hierbei ist $(\alpha, \beta) <^* (\gamma, \delta)$ eine Abkürzung für

$(|\alpha, \beta| < |\gamma, \delta| \vee (|\alpha, \beta| = |\gamma, \delta| \wedge \alpha < \gamma) \vee (|\alpha, \beta| = |\gamma, \delta| \wedge \alpha = \gamma \wedge \beta < \delta))$, wobei $x = |\alpha, \beta|$ eine Abkürzung für $((\alpha > \beta \wedge x = \alpha) \vee (\alpha \leq \beta \wedge x = \beta))$ ist.

(SUR) Surjektivität von G:
$\forall\alpha\exists\beta, \gamma(\alpha = \mathrm{G}(\beta, \gamma))$

(AUS) Aussonderungsschema: Sei $\phi(\alpha, p_1, \ldots, p_n)$ eine L_{SO}-Formel.
$\overline{\forall} p_1, \ldots, p_n\forall a\exists b\forall\alpha(\alpha \in b \leftrightarrow \alpha \in a \wedge \phi(\alpha, p_1, \ldots, p_n))$

(ERS) Ersetzungsschema: Sei $\phi(\alpha, \beta, p_1, \ldots, p_n)$ eine L_{SO}-Formel.
$\overline{\forall} p_1, \ldots, p_n(\forall\xi, \zeta_1, \zeta_2(\phi(\xi, \zeta_1, p_1, \ldots, p_n) \wedge \phi(\xi, \zeta_2, p_1, \ldots, p_n) \to \zeta_1 = \zeta_2) \to \forall a\exists b\forall\zeta(\zeta \in b \leftrightarrow \exists\xi \in a\phi(\xi, \zeta, p_1, \ldots, p_n)))$

(POT) Potenzmengenaxiom:
$\forall a\exists b(\forall z(\exists\alpha(\alpha \in z) \wedge \forall\alpha(\alpha \in z \to \alpha \in a) \to \exists!\xi\forall\beta(\beta \in z \leftrightarrow \mathrm{G}(\beta, \xi) \in b)))$

2 Konstruktion eines $L_{\in}$-Modells V

SOrd-Mengen können mittels der Paarungsfunktion G als Mengen von Paaren angesehen werden, d.h. als zweistellige Relationen: $a = \{(\mathrm{G}_1(\alpha), \mathrm{G}_2(\alpha))|\alpha \in a\}$, wobei $(\alpha_1, \alpha_2) := \mathrm{G}(\alpha_1, \alpha_2)$.

Definition 2.1. Sei $\mathrm{SOrd}(a)$.
$\alpha a\beta := \mathrm{G}(\alpha, \beta) \in a$
$\widehat{a} := \mathrm{field}(a) := \{\mathrm{G}_1(\alpha)|\alpha \in a\} \cup \{\mathrm{G}_2(\alpha)|\alpha \in a\}$
$\mathrm{fund}(a) := \forall b \subset \widehat{a}(b \neq \emptyset \to \exists\beta \in b\forall\alpha \in \widehat{a}(\alpha a\beta \to \alpha \notin b))$

Definition 2.2. Seien $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$, $\mathrm{fund}(a)$, $\mathrm{SOrd}(c)$.
$unique(c, a) := \forall\gamma \in c\forall\eta_1, \eta_2 \in c((\eta_1 a\gamma \wedge \eta_2 a\gamma) \vee (\gamma a\eta_1 \wedge \gamma a\eta_2) \to \eta_1 = \eta_2)$
$exsuc(c, a, \alpha) := \forall\gamma \in c(\gamma \neq \alpha \leftrightarrow \exists\delta \in c(\gamma a\delta))$
$expre(c, a, \beta) := \forall\gamma \in c(\gamma \neq \beta \leftrightarrow \exists\delta \in c(\delta a\gamma))$
$chain(c, a, \alpha, \beta) := \alpha \in c \wedge \alpha \in \widehat{a} \wedge unique(c, a) \wedge exsuc(c, a, \alpha) \wedge expre(c, a, \beta)$
Gilt $chain(c, a, \alpha, \beta)$, so heißt c *a-Kette von α nach β*.

Definition 2.3. Sei $\mathrm{fund}(a)$.
$\beta \leq_a \alpha := \exists c(chain(c, a, \alpha, \beta))$
$\beta <_a \alpha := \beta \neq \alpha \wedge \beta \leq_a \alpha$

Bemerkung 2.1. Für $\mathrm{fund}(a)$ ist $\leq_a$ eine partielle Ordnung, d.h. $\leq_a$ ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.

Definition 2.4. Für $\alpha \in \widehat{a}$ sei der *α-Abschnitt in a* folgendermaßen definiert:
$cut(a, \alpha) := \{(\beta, \gamma)|\beta a\gamma \wedge \beta, \gamma \leq_a \alpha\}$

Definition 2.5. Sei $\mathrm{SOrd}(a)$.
$\mathrm{pred}_a(\alpha) := \{\beta|\beta a\alpha\}$
$\mathrm{ext}(a) := \forall\alpha, \beta \in \widehat{a}(pred_a(\alpha) = pred_a(\beta) \to \alpha = \beta)$
$\alpha = \mathrm{top}(a) := \forall\beta \in \widehat{a}\exists c(chain(c, a, \alpha, \beta))$
$\mathrm{unitop}(a) := \exists\alpha \in \widehat{a}(\alpha = top(a))$
$\alpha = \mathrm{bot}(a) := \alpha \in \widehat{a} \wedge \mathrm{pred}_a(\alpha) = \emptyset$
$\mathrm{unibot}(a) := \exists!\alpha \in \widehat{a}(\mathrm{bot}(a)a\alpha)$

$\alpha = \mathrm{sucbot}(a) := \mathrm{bot}(a)a\alpha$
$\mathrm{set}(a) := a \neq \emptyset \wedge \mathrm{fund}(a) \wedge \mathrm{ext}(a) \wedge \mathrm{unitop}(a) \wedge \mathrm{unibot}(a)$
$\mathrm{Set} := \{a | set(a)\}$

Hier ist die Konstruktion des "Mengenuniversums" bereits abgeschlossen. Nun müssen noch Identität und Elementrelation auf Set definiert werden.

Definition 2.6. Seien $a, b, f, g \in SOrd$.
$\mathrm{dom}(f) := \{\mathrm{G}_1(\alpha) | \alpha \in f\}$
$\alpha = f(\beta) := \alpha f \beta$
$f : \widehat{a} \to \widehat{b} := \forall \alpha, \beta_1, \beta_2 (\alpha f \beta_1 \wedge \alpha f \beta_2 \to \beta_1 = \beta_2) \wedge \forall \alpha (f(\alpha) \in \widehat{b}) \wedge \mathrm{dom}(f) = \widehat{a}$
$\mathrm{mor}(f, a, b) := f : \widehat{a} \to \widehat{b} \wedge \forall \alpha, \beta \in \widehat{a}(\alpha a \beta \to f(\alpha) a f(\beta))$.
$id_a := \{(\alpha, \alpha) | \alpha \in a\}$
$a \approx_{f,g} b := \mathrm{mor}(f, a, b) \wedge \mathrm{mor}(g, b, a) \wedge f \circ g = id_{\widehat{a}} \wedge g \circ f = id_{\widehat{b}}$
$a \approx b := \exists f, g (a \approx_{f,g} b)$
Ist $a \approx b$, so heißen a, b *isomorph*.
$a \widetilde{\in} b := set(b) \wedge \exists \alpha b \mathrm{top}(b)(a \approx \mathrm{cut}(b, \alpha))$

Hiermit ist die Definition der Struktur abgeschlossen. Das Ziel wird sein, auf der Grundlage von SO zu zeigen, dass $\mathrm{V} := (\mathrm{Set}, \approx, \widetilde{\in})$ die ZFC-Axiome erfüllt.

3 Das Auswahllemma

Bemerkung 3.1. Man kann leicht zeigen, dass nichtleere Abschnitte in Set-Mengen wieder Set-Mengen sind. Z.B. bilden die so erzeugbaren Set-Mengen einer fest gewählten Set-Menge x die transitive Hülle von x.

Lemma 3.1 (Auswahllemma). *Sei* $\mathrm{fund}(a)$, $\mathrm{ext}(a)$, $\mathrm{unibot}(a)$ *und sei* $\emptyset \neq d \subset \widehat{a} \setminus \{\mathrm{bot}(a)\}$. *Sei außerdem* $\alpha \notin \widehat{a}$ *ein beliebiges Element. Für*

$$\mathrm{set}(a, d, \alpha) := \{(\delta, \alpha) | \delta \in d\} \cup \bigcup_{\delta \in d} \mathrm{cut}(a, \delta)$$

gilt dann: $\mathrm{set}(\mathrm{set}(a, d, \alpha))$.

Beweis. Offenbar ist wegen $d \neq \emptyset$ auch $\mathrm{set}(a, d, \alpha) \neq \emptyset$

(1) Es gilt $\mathrm{fund}(\mathrm{set}(a, d, \alpha))$: Es ist $\widehat{\mathrm{set}(a, d, \alpha)} = \{\alpha\} \cup \mathrm{field}(\bigcup_{\delta \in d} \mathrm{cut}(a, \delta))$. Sei $b \subset \widehat{\mathrm{set}(a, d, \alpha)}$ nicht leer. Falls $b = \{\alpha\}$, so ist α $\mathrm{set}(a, d, \alpha)$-minimal in b, denn (α, α) ist definitionsgemäß nicht in $\mathrm{set}(a, d, \alpha)$ (beachte die Wahl von α). Falls $b \neq \{\alpha\}$, so gibt es ein $\beta \in b$ mit $\beta \in \mathrm{field}(\bigcup_{\delta \in d} \mathrm{cut}(a, \delta)) \subset \widehat{a}$. Sei $\beta \in b \setminus \{\alpha\}$ a-minimal (nach $\mathrm{fund}(a)$). Da α nach Definition keinen $\mathrm{set}(a, d, \alpha)$-Nachfolger hat und wegen $\bigcup_{\delta \in d} \mathrm{cut}(a, \delta) \subset a$, hat β in b keinen $\mathrm{set}(a, d, \alpha)$-Vorgänger und ist somit $\mathrm{set}(a, d, \alpha)$-minimal in b.

(2) $\mathrm{set}(a, d, \alpha)$ ist extensional: Seien $\beta, \gamma \in \widehat{\mathrm{set}(a, d, \alpha)}$ mit $\mathrm{pred}_{\mathrm{set}(a,d,\alpha)}(\beta) = \mathrm{pred}_{\mathrm{set}(a,d,\alpha)}(\gamma)$. Falls $\beta = \alpha$ und $\gamma \neq \alpha$, so gibt es ein $\epsilon \in d$ mit $\gamma \in \widehat{\mathrm{cut}(a, \epsilon)}$. Sei $\mathrm{chain}(c, a, \epsilon, \gamma)$. Nun hat γ dieselben $\mathrm{set}(a, d, \alpha)$-Vorgänger, wie $\beta = \alpha$, insbesondere den Vorgänger ϵ. Das heißt, dass dieser Fall nicht eintreten kann, da dies bedeutet, dass c kein $\mathrm{set}(a, d, \alpha)$-minimales Element hat (beachte $\mathrm{cut}(a, \epsilon) \subset \mathrm{set}(a, d, \alpha)$), im Widerspruch zu (1).

Seien nun also $\beta \neq \alpha$ und $\gamma \neq \alpha$. Da α keine $\mathrm{set}(a, d, \alpha)$-Nachfolger hat, sind die Vorgänger von β und γ in $\widehat{a}$. Wir zeigen nun $\mathrm{pred}_{\mathrm{set}(a,d,\alpha)}(\beta) = \mathrm{pred}_a(\beta)$ (analog gilt dann $\mathrm{pred}_{\mathrm{set}(a,d,\alpha)}(\gamma) = \mathrm{pred}_a(\gamma)$), so dass folgt: $\mathrm{pred}_a(\beta) = \mathrm{pred}_{\mathrm{set}(a,d,\alpha)}(\beta) = \mathrm{pred}_{\mathrm{set}(a,d,\alpha)}(\gamma) = \mathrm{pred}_a(\gamma)$ und somit $\beta = \gamma$ wegen $\mathrm{ext}(a)$. Sei also $\delta \mathrm{set}(a, d, \alpha)\beta$. Dann gilt für ein $\epsilon \in d \quad \delta \mathrm{cut}(a, \epsilon)\beta$, also $\delta a \beta$. Sei umgekehrt $\delta a \beta$. Es gibt ein $\epsilon \in d$ mit $\beta \in \widehat{\mathrm{cut}(a, \epsilon)}$. Nun ist $\beta \leq_a \epsilon$ und $\delta \leq_a \beta$, also $\delta \leq_a \epsilon$ und $\delta \in \widehat{\mathrm{cut}(a, \epsilon)}$. Also gilt auch $\delta \mathrm{cut}(a, \epsilon)\beta$ und $\delta \mathrm{set}(a, d, \alpha)\beta$ wegen $\mathrm{cut}(a, \epsilon) \subset \mathrm{set}(a, d, \alpha)$.

(3) Es gilt $\mathrm{unibot}(\mathrm{set}(a, d, \alpha))$: Nach (1) und (2) existiert $\gamma = \mathrm{bot}(\mathrm{set}(a, d, \alpha))$. Da $d \neq \emptyset$, gibt es ein $\epsilon \in d$ und es ist $\mathrm{cut}(a, \epsilon) \subset \mathrm{set}(a, d, \alpha)$. Nun ist $\mathrm{bot}(a) \in \widehat{\mathrm{cut}(a, \epsilon)} \subset \widehat{\mathrm{set}(a, d, \alpha)}$ und hat keine a-Vorgänger. Auch α ist nicht $\mathrm{set}(a, d, \alpha)$-Vorgänger von $\mathrm{bot}(a)$, da es keine $\mathrm{set}(a, d, \alpha)$-Nachfolger hat. Also hat $\mathrm{bot}(a)$ keine $\mathrm{set}(a, d, \alpha)$-Vorgänger und es muss $\gamma = \mathrm{bot}(a)$ sein. Wegen $\mathrm{unibot}(a)$, und da α nach Definition nicht Nachfolger von $\mathrm{bot}(a)$ ist ($\mathrm{bot}(a) \notin d$), gilt $\mathrm{unibot}(\mathrm{set}(a, d, \alpha))$.

(4) Es ist $\alpha = \mathrm{top}(\mathrm{set}(a, d, \alpha))$: Sei $\gamma \in \widehat{\mathrm{set}(a, d, \alpha)}$. Ist $\gamma = \alpha$, so gilt $\mathrm{chain}(\{\alpha\}, \mathrm{set}(a, d, \alpha), \alpha, \gamma)$. Sei nun $\gamma \neq \alpha$. Nun gibt es ein $\epsilon \in d$ mit $\gamma \in \widehat{\mathrm{cut}(a, \epsilon)}$. Sei $\mathrm{chain}(c, a, \epsilon, \gamma)$. Nun gilt für alle $\alpha_1, \alpha_2 \in c$, dass $\alpha_1 a \alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_1 \mathrm{set}(a, d, \alpha)\alpha_2$: Sei zuerst $\alpha_1 a \alpha_2$. Offenbar ist $\alpha_1 \mathrm{cut}(a, \epsilon)\alpha_2$ und somit $\alpha_1 \mathrm{set}(a, d, \alpha)\alpha_2$ wegen $\mathrm{cut}(a, \epsilon) \subset \mathrm{set}(a, d, \alpha)$. Sei nun $\alpha_1 \mathrm{set}(a, d, \alpha)\alpha_2$. Es ist $c \subset \widehat{a}$, also $\alpha \notin c$ und daher $\alpha_2 \neq \alpha$. Nach Definition von $\mathrm{set}(a, d, \alpha)$ ist $\alpha_1 \mathrm{cut}(a, \eta)\alpha_2$ für ein $\eta \in \widehat{a}$, also insbesondere $\alpha_1 a \alpha_2$.

Hieraus ergibt sich $\mathrm{chain}(c, \mathrm{set}(a, d, \alpha), \epsilon, \gamma)$, d.h. $\gamma \leq_{\mathrm{set}(a,d,\alpha)} \epsilon$. Da $\epsilon \mathrm{set}(a, d, \alpha)\alpha$, gilt aber auch $\epsilon \leq_{\mathrm{set}(a,d,\alpha)} \alpha$, so dass schließlich, wie gewünscht, $\gamma \leq_{\mathrm{set}(a,d,\alpha)} \alpha$ folgt.

□

Lemma 3.2. *Sei* $\mathrm{fund}(a)$, $\mathrm{ext}(a)$, $\mathrm{unibot}(a)$ *und* $\emptyset \neq d \subset \widehat{a} \setminus \{\mathrm{bot}(a)\}$. *Sei weiter* $\alpha \notin \widehat{a}$. *Dann gilt für alle b:* $b \widetilde{\in} \mathrm{set}(a, d, \alpha) \Leftrightarrow \exists \delta \in d(b \approx \mathrm{cut}(a, \delta))$.

Beweis. Sei $\delta \in d$. Es gilt $\mathrm{field}(\mathrm{cut}(\mathrm{set}(a, d, \alpha), \delta)) = \widehat{\mathrm{cut}(a, \delta)}$, denn:

Sei $\gamma \in \mathrm{field}(\mathrm{cut}(\mathrm{set}(a, d, \alpha), \delta))$ und sei $\mathrm{chain}(c, \mathrm{set}(a, d, \alpha), \delta, \gamma)$. Da $\delta \mathrm{set}(a, d, \alpha)\alpha$ und weil α keinen $\mathrm{set}(a, d, \alpha)$-Nachfolger hat, ist $\alpha \notin c$, d.h. $c \subset \widehat{a}$. Also folgt aus $\alpha_1, \alpha_2 \in c$ und $\alpha_1 \mathrm{set}(a, d, \alpha)\alpha_2 \quad \alpha_1 a \alpha_2$. Sind $\alpha_1, \alpha_2 \in c$ mit $\alpha_1 a \alpha_2$, so gilt wegen $\alpha_1, \alpha_2 \leq_a \delta$ auch $\alpha_1 \mathrm{cut}(a, \delta)\alpha_2$ und somit $\alpha_1 \mathrm{set}(a, d, \alpha)\alpha_2$. Insgesamt folgt für $\alpha_1, \alpha_2 \in c$ also $\alpha_1 a \alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_1 \mathrm{set}(a, d, \alpha)\alpha_2$ und damit $\mathrm{chain}(c, a, \delta, \gamma)$.

Sei nun umgekehrt $\gamma \in \widehat{\mathrm{cut}(a, \delta)}$ und sei $\mathrm{chain}(c, a, \delta, \gamma)$. Da $\mathrm{cut}(a, \delta) \subset \mathrm{set}(a, d, \alpha)$, folgt für $\alpha_1, \alpha_2 \in c$ aus $\alpha_1 a \alpha_2 \quad \alpha_1 \mathrm{set}(a, d, \alpha)\alpha_2$. Ist $\alpha_1 \mathrm{set}(a, d, \alpha)\alpha_2$ für $\alpha_1, \alpha_2 \in c$, so folgt wegen $\alpha_1, \alpha_2 \neq \alpha \quad \alpha_1 a \alpha_2$. Also gilt $\mathrm{chain}(c, \mathrm{set}(a, d, \alpha), \delta, \gamma)$.

Hiermit kann nun $\mathrm{cut}(a, \delta) = \mathrm{cut}(\mathrm{set}(a, d, \alpha), \delta)$ gezeigt werden: Sei $\alpha_1 \mathrm{cut}(a, \delta)\alpha_2$. Dann ist $\alpha_1 a \alpha_2$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in \widehat{\mathrm{cut}(a, \delta)} = \mathrm{field}(\mathrm{cut}(\mathrm{set}(a, d, \alpha), \delta))$. Aus $\alpha_1 \mathrm{cut}(a, \delta)\alpha_2$ folgt wegen $\mathrm{cut}(a, \delta) \subset \mathrm{set}(a, d, \alpha) \quad \alpha_1 \mathrm{set}(a, d, \alpha)\alpha_2$ und somit $\alpha_1 \mathrm{cut}(\mathrm{set}(a, d, \alpha), \delta)\alpha_2$. Ist umgekehrt $\alpha_1 \mathrm{cut}(\mathrm{set}(a, d, \alpha), \delta)\alpha_2$, so ist $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{field}(\mathrm{cut}(\mathrm{set}(a, d, \alpha), \delta)) = \widehat{\mathrm{cut}(a, \delta)}$, insbesondere sind $\alpha_1, \alpha_2 \neq \alpha$. Aus $\alpha_1 \mathrm{set}(a, d, \alpha)\alpha_2$ folgt damit $\alpha_1 a \alpha_2$ und $\alpha_1 \mathrm{cut}(a, \delta)\alpha_2$.

Nun gilt:

$$
\begin{aligned}
b\,\widetilde{\in}\,\mathrm{set}(a,d,\alpha) &\Leftrightarrow \exists\delta\,\mathrm{set}(a,d,\alpha)\,\mathrm{top}(\mathrm{set}(a,d,\alpha))(b \approx \mathrm{cut}(\mathrm{set}(a,d,\alpha),\delta))\\
&\Leftrightarrow \exists\delta\,\mathrm{set}(a,d,\alpha)\alpha(b \approx \mathrm{cut}(\mathrm{set}(a,d,\alpha),\delta))\\
&\Leftrightarrow \exists\delta \in d(b \approx \mathrm{cut}(\mathrm{set}(a,d,\alpha),\delta))\\
&\Leftrightarrow \exists\delta \in d(b \approx \mathrm{cut}(a,\delta))
\end{aligned}
$$

□

Lemma 3.3. *Sei* $\mathrm{set}(a)$ *und* $\emptyset \neq d \subset \widehat{a} \setminus \{\mathrm{bot}(a)\}$. *Dann ist* $\mathrm{set}(\mathrm{set}(a,d,\alpha))$ *für alle* $\alpha \notin \widehat{a}$.

Beweis. Nach Definition von $\mathrm{set}(a)$ gelten $\mathrm{fund}(a)$, $\mathrm{ext}(a)$ und $\mathrm{unibot}(a)$. □

4 Potenzmengenaxiom

Bemerkung 4.1. Das Nullmengenaxiom von $\mathrm{ZFC}^{\mathrm{V}}$ $((Nul)^{\mathrm{V}} = \exists a \in \mathrm{Set}\forall b \in \mathrm{Set}(\neg b\,\widetilde{\in}\,a))$ ist für die Menge $\widetilde{\emptyset} := \{(0,1)\} \in \mathrm{Set}$ offensichtlich erfüllt.

Definition 4.1. Seien $x, y, z \in \mathrm{SOrd}$.
$\mathrm{Pot}(y,x) = (\forall z(\exists\alpha(\alpha \in z) \wedge \forall\alpha(\alpha \in z \to \alpha \in x) \to \exists!\xi\forall\beta(\beta \in z \leftrightarrow G(\beta,\xi) \in y)))$
$\zeta = \xi_b(z) := \forall\beta(\beta \in z \leftrightarrow (\beta,\zeta) \in b)$

Satz 4.1. *Es gilt* $(Pot)^V = (\forall a\exists b\forall d(d \in b \leftrightarrow \forall e \in d(e \in a)))^V = \forall a \in \mathrm{Set}\exists b \in \mathrm{Set}\forall d \in \mathrm{Set}(d\,\widetilde{\in}\,b \leftrightarrow \forall e \in \mathrm{Set}\,\widetilde{\in}\,d(e\,\widetilde{\in}\,a))$.

Beweis. Sei $a \in \mathrm{Set}$. Die Beweisidee ist, für alle Teilmengen von $pred_a(\mathrm{top}(a))$ ein neues Element einzuführen, dessen Vorgängermenge genau diese Teilmenge sein soll. Alle diese neuen Elemente werden schließlich mittels des Auswahllemmas zu Vorgängern eines neu gewählten Topelements. Es stellt sich also erst einmal das Problem, die Teilmengen von $\mathrm{pred}_a(\mathrm{top}(a))$ "durchzunummerieren", um so die neuen Elemente zu erhalten. Hierfür wird das SO-Axiom (POT) verwendet. Da die leere Menge durch (POT) nicht kodiert wird, muss das neue Topelement noch mit dem sucbot verbunden werden. Außerdem muss beachtet werden, dass möglicherweise einige Teilmengen von $\mathrm{pred}_a(\mathrm{top}(a))$ bereits Vorgängermengen von Elementen von $\widehat{a}$ sind. In diesen Fällen darf kein weiteres Element hinzugefügt werden (sonst ginge die Extensionalität verloren); das Element, das diese Aufgabe erfüllt muss in die zu konstruierende Relation übernommen werden. Dies ist z.B. in jedem Fall bei $\mathrm{top}(a)$ notwendig.

Sei $\rho \geq lub(a)$ beliebig und sei nach (POT) $\mathrm{Pot}(y, \mathrm{pred}_a(\mathrm{top}(a)))$. Die Funktion $f := \{(\alpha,(\alpha,\rho))|\alpha \in Ord\}$ ist offenbar injektiv. Sei nun $s := \{\alpha \in \widehat{a}|\mathrm{pred}_a(\alpha) \subset \mathrm{pred}_a(\mathrm{top}(a))\} \setminus \{\mathrm{bot}(a)\}$ und $r := \{f(\xi_y(z))|\emptyset \neq z \subset \mathrm{pred}_a(\mathrm{top}(a)) \wedge \neg\exists\alpha \in s(z = \mathrm{pred}_a(\alpha))\}$. Wir setzen $\bar{b} := a \cup \{(\alpha,\beta)|\beta \in r \wedge \alpha \in \xi_y^{-1}(f^{-1}(\beta))\}$. Offenbar ist $\widehat{\bar{b}}$ die disjunkte Vereinigung von $\widehat{a}$ und r (um die Disjunktheit zu erreichen, wurde f eingeführt; es ist $min(r) \geq \rho \geq lub(\widehat{a})$).

(1) Zunächst einige grundlegende Feststellungen über $\bar{b}$: Offenbar haben Elemente aus r haben keinen $\bar{b}$-Nachfolger. Ist $\beta \in r$ und $\alpha\bar{b}\beta$, so ist $\alpha \in \xi_y^{-1}(f^{-1}(\beta)) \subset \mathrm{pred}_a(\mathrm{top}(a)) \subset \widehat{a}$, also $\alpha \in \widehat{a}$. Ist $\beta \in \widehat{a}$ und $\alpha\bar{b}\beta$, so ist $\alpha \in \widehat{a}$, sonst wäre $\alpha \in r$ und hätte, wie eben bemerkt, keinen $\bar{b}$-Nachfolger. Für $\alpha, \beta \in \widehat{a}$ gilt $\alpha a\beta \Leftrightarrow \alpha\bar{b}\beta$: Ist $\alpha a\beta$, so folgt $\alpha\bar{b}\beta$ aus $a \subset \bar{b}$. Ist aber $\alpha\bar{b}\beta$, so muss auch $\alpha a\beta$ sein, weil sonst nach Definition von $\bar{b}$ $\beta \in r$ sein müsste.

(2) Es gilt $\mathrm{fund}(\bar{b})$: Sei $x \subset \widehat{\bar{b}}$. Falls $x \subset r$, so ist nach (1) jeder $\bar{b}$-Vorgänger eines Elements von x in $\widehat{a}$, also nicht in r und erst recht nicht in x. Somit ist in diesem Fall

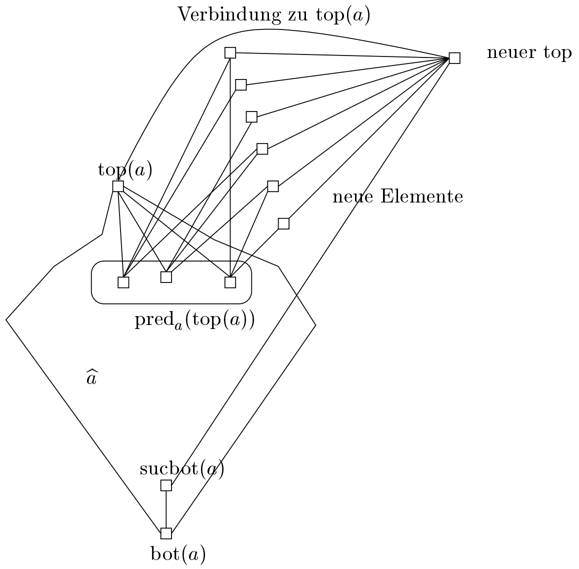

Abbildung 1: Konstruktion der Potenzmenge von a

jedes Element von x $\bar{b}$-minimal in x. Sei nun $x \cap \widehat{a} \neq \emptyset$, und sei $\alpha \in x \cap \widehat{a}$ a-minimal. Ist $\beta\bar{b}\alpha$, so ist nach (1) auch $\beta \in \widehat{a}$ und $\beta a\alpha$, so dass $\beta \notin x$ nach Wahl von α. Also ist α ein $\bar{b}$-minimales Element in x.

(3) Es gilt $\mathrm{ext}(\bar{b})$: Seien $\alpha_1, \alpha_2 \in \widehat{\bar{b}}$ mit $\mathrm{pred}_{\bar{b}}(\alpha_1) = \mathrm{pred}_{\bar{b}}(\alpha_2)$. Falls $\alpha_1, \alpha_2 \in \widehat{a}$, so gilt nach (1): $\mathrm{pred}_a(\alpha_1) = \mathrm{pred}_{\bar{b}}(\alpha_1) = \mathrm{pred}_{\bar{b}}(\alpha_2) = \mathrm{pred}_a(\alpha_2)$, so dass $\alpha_1 = \alpha_2$ aus $\mathrm{ext}(a)$ folgt.
Sei nun $\alpha_1 \in r$, d.h. $f^{-1}(\alpha_1) = \xi_y(z)$ für ein $z \subset \mathrm{pred}_a(\mathrm{top}(a))$. Nach Definition von $\bar{b}$ ist $\mathrm{pred}_{\bar{b}}(\alpha_1) = \xi_y^{-1}(f^{-1}(\alpha_1)) = z$. Angenommen (Widerspruchsannahme), es wäre $\alpha_2 \in \widehat{a}$. Da nach (1) $\gamma a\alpha_2 \Leftrightarrow \gamma\bar{b}\alpha_2$ für alle γ, ist $\mathrm{pred}_a(\alpha_2) = \mathrm{pred}_{\bar{b}}(\alpha_2) = \mathrm{pred}_{\bar{b}}(\alpha_1) = z \subset \mathrm{pred}_a(\mathrm{top}(a))$, so dass $\alpha_2 \in s$ folgt ($\alpha_2 = \mathrm{bot}(a)$ ist nicht möglich, da dann $\mathrm{pred}_{\bar{b}}(\alpha_2) = \emptyset$ (nach (1) wäre jeder $\bar{b}$-Vorgänger in $\widehat{a}$), also auch $\mathrm{pred}_{\bar{b}}(\alpha_1) = \emptyset$, was wegen $\alpha_1 \in r$ nicht möglich ist, da alle Elemente von r definitionsgemäß mindestens einen $\bar{b}$-Vorgänger haben). Da $z = \mathrm{pred}_a(\alpha_2)$, ist $\exists\alpha \in s(z = \mathrm{pred}_a(\alpha))$ erfüllt, und nach Definition von r ist $f(\xi_y(z)) \notin r$, d.h. $\alpha_1 = f(\xi_y(z)) \notin r$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $\alpha_2 \in r$. Es gibt nun $\emptyset \neq z' \subset \mathrm{pred}_a(\mathrm{top}(a))$, so dass $f^{-1}(\alpha_2) = \xi_y(z')$. Analog zu α_1 ist auch $\mathrm{pred}_{\bar{b}}(\alpha_2) = \xi_y^{-1}(f^{-1}(\alpha_2)) = z'$, und somit $z = \mathrm{pred}_{\bar{b}}(\alpha_1) = \mathrm{pred}_{\bar{b}}(\alpha_2) = z'$. Schließlich ist nun $f^{-1}(\alpha_1) = \xi_y(z) = \xi_y(z') = f^{-1}(\alpha_2)$, also $\alpha_1 = \alpha_2$.

(4) $\mathrm{unibot}(\bar{b})$: Nach (2) und (3) ist $\mathrm{bot}(\bar{b})$ eindeutig definiert. Da Elemente aus r keinen $\bar{b}$-Nachfolger haben, und $\mathrm{bot}(a) \in \widehat{\bar{b}}$ auch keinen a-Vorgänger hat, muss $\mathrm{bot}(\bar{b}) = \mathrm{bot}(a)$ sein. Wegen $\mathrm{unibot}(a)$ gibt es in $\widehat{a}$ nur einen $\bar{b}$-Nachfolger von $\mathrm{bot}(\bar{b})$. Angenommen, es gäbe ein $\alpha \in r$ mit $\mathrm{bot}(a)\bar{b}\alpha$. Da $\mathrm{pred}_{\bar{b}}(\alpha) = z \subset \mathrm{pred}_a(\mathrm{top}(a))$ für ein z mit

$\alpha = f(\xi_y(z))$, folgt $\mathrm{bot}(a) a \mathrm{top}(a)$, so dass $a \approx \widetilde{\emptyset}$ sein muss. In diesem Fall ist $s = \{\mathrm{top}(a)\}$. Da es nur ein z' mit $\emptyset \neq z' \subset \mathrm{pred}_a(\mathrm{top}(a))$ gibt, nämlich $z' = \{\mathrm{bot}(a)\}$, aber $z' = \mathrm{pred}_a(\mathrm{top}(a))$ ist und $\mathrm{top}(a) \in s$, ist $r = \emptyset$ im Widerspruch zur Existenz von $\alpha \in r$.

(5) Sei $d := r \cup s \cup \{\mathrm{sucbot}(\bar{b})\}$. Offenbar ist $\emptyset \neq d \subset \widehat{\bar{b}} \setminus \{\mathrm{bot}(\bar{b})\}$ und nach (2), (3) und (4) sind alle Voraussetzungen des Auswahllemmas erfüllt. Sei also $\eta \notin \widehat{\bar{b}}$ beliebig und $b := \mathrm{set}(\bar{b}, d, \eta)$. Nach dem Auswahllemma gilt $\mathrm{set}(b)$. Nach Lemma 3.2 gilt für alle $e \in \mathrm{Set}$: $e \widetilde{\in} b \Leftrightarrow \exists \delta \in d(e \approx \mathrm{cut}(\bar{b}, \delta)) \Leftrightarrow \exists \delta \in r \cup s \cup \{\mathrm{sucbot}(\bar{b})\}(e \approx \mathrm{cut}(\bar{b}, \delta)) \Leftrightarrow e \approx \widetilde{\emptyset} \vee \exists \delta \in r \cup s(e \approx \mathrm{cut}(\bar{b}, \delta))$.

(6) Für $\alpha \in \widehat{a}$ ist $\mathrm{cut}(a, \alpha) = \mathrm{cut}(\bar{b}, \alpha)$: Sei zuerst $\alpha_1 \mathrm{cut}(a, \alpha) \alpha_2$. Aus $\alpha_1 a \alpha_2$ folgt $\alpha_1 \bar{b} \alpha_2$ wegen $a \subset \bar{b}$. Aus $\mathrm{chain}(c, a, \alpha, \alpha_1)$ folgt wegen $c \subset \widehat{a}$ und nach (1) (für $\beta_1, \beta_2 \in c$ gilt: $\beta_1 a \beta_2 \Leftrightarrow \beta_1 \bar{b} \beta_2$) dann auch $\mathrm{chain}(c, \bar{b}, \alpha, \alpha_1)$ (analog für α_2), so dass $\alpha_1 \mathrm{cut}(\bar{b}, \alpha) \alpha_2$. Sei nun umgekehrt $\alpha_1 \mathrm{cut}(\bar{b}, \alpha) \alpha_2$. Sei $\mathrm{chain}(c, \bar{b}, \alpha, \alpha_2)$. Wegen $\alpha \in \widehat{a}$ gilt wieder $c \subset \widehat{a}$ (sonst gäbe es ein $\bar{b}$-minimales Element in c, das noch in $\widehat{a}$ ist, und sein Vorgänger in c müsste nach Wahl in $\widehat{\bar{b}} \setminus \widehat{a}$ sein, wegen (1) aber auch in $\widehat{a}$ ↯). Insbesondere ist $\alpha_2 \in \widehat{a}$ (analog auch $\alpha_1 \in \widehat{a}$) und mit (1) folgt $\alpha_1 \mathrm{cut}(a, \alpha) \alpha_2$.

(7) Nun gilt für $\delta \in s$ $\mathrm{pred}_a(\delta) \subset \mathrm{pred}_a(\mathrm{top}(a))$ und $\delta \in \widehat{a}$, so dass nach (1) $\mathrm{pred}_a(\delta) = \mathrm{pred}_{\bar{b}}(\delta)$. Für $\delta \in r$ ist $\mathrm{pred}_{\bar{b}}(\delta) = \xi_y^{-1}(f^{-1}(\delta)) \subset \mathrm{pred}_a(\mathrm{top}(a))$. Insgesamt folgt aus $\delta \in r \cup s$ also $\mathrm{pred}_{\bar{b}}(\delta) \subset \mathrm{pred}_a(\mathrm{top}(a))$ (und offensichtlich ist dann auch $\mathrm{pred}_{\bar{b}}(\delta) \neq \emptyset$).

(8) Sei $e \widetilde{\in} b$. Dann gilt $\widetilde{\forall} x(x \widetilde{\in} e \to e \widetilde{\in} a)$: Nach (5) ist $e \approx \widetilde{\emptyset} \vee \exists \delta \in r \cup s(e \approx \mathrm{cut}(\bar{b}, \delta))$. Falls $e \approx \widetilde{\emptyset}$, so ist die Behauptung erfüllt. Sei nun $\neg e \approx \widetilde{\emptyset}$. Dann gilt also $\exists \delta \in r \cup s(e \approx \mathrm{cut}(\bar{b}, \delta))$. Wegen (7) folgt daraus $\exists \delta(\emptyset \neq \mathrm{pred}_{\bar{b}}(\delta) \subset \mathrm{pred}_a(\mathrm{top}(a)) \wedge e \approx \mathrm{cut}(\bar{b}, \delta))$. Sei δ ein Element mit diesen Eigenschaften. Sei $x \in \mathrm{Set}$ beliebig mit $x \widetilde{\in} e$. Dann ist also $x \widetilde{\in} \mathrm{cut}(\bar{b}, \delta)$ und es gibt ein $\gamma \bar{b} \delta$ mit $x \approx \mathrm{cut}(\bar{b}, \gamma)$. Nach Wahl von δ ist $\gamma a \mathrm{top}(a)$ und nach (6) ist $\mathrm{cut}(\bar{b}, \gamma) = \mathrm{cut}(a, \gamma)$, so dass also $x \widetilde{\in} a$ folgt.

(9) Sei nun $\emptyset \neq z \subset \mathrm{pred}_a(\mathrm{top}(a))$ beliebig. Angenommen, es gibt kein $\alpha \in \widehat{a}$ mit $\mathrm{pred}_a(\alpha) = z$. Dann ist $f(\xi_y(z)) \in r$ und $\mathrm{pred}_{\bar{b}}(f(\xi_y(z))) = \xi^{-1}(f^{-1}(f(\xi_y(z)))) = z$. Ist aber andererseits $z = \mathrm{pred}_a(\alpha)$ für ein $\alpha \in \widehat{a}$, so ist $\alpha \in s$ und $z = \mathrm{pred}_a(\alpha) = \mathrm{pred}_{\bar{b}}(\alpha)$. Insgesamt gibt es also für alle z mit $\emptyset \neq z \subset \mathrm{pred}_a(\mathrm{top}(a))$ ein $\alpha \in r \cup s$ mit $z = \mathrm{pred}_{\bar{b}}(\alpha)$.

(10) Gelte $\widetilde{\forall} x(x \widetilde{\in} e \to x \widetilde{\in} a)$. Dann ist $e \widetilde{\in} b$: Ist $e \approx \widetilde{\emptyset}$, so ist $e \approx \{(\mathrm{bot}(\bar{b}), \mathrm{sucbot}(\bar{b}))\} = \mathrm{cut}(b, \mathrm{sucbot}(b)) \widetilde{\in} b$, da definitionsgemäß $\mathrm{sucbot}(b) b \eta$ (beachte, dass offensichtlich $\mathrm{sucbot}(b) = \mathrm{sucbot}(\bar{b})$ ist). Sei nun $\neg e \approx \widetilde{\emptyset}$. Sei $z := \{\alpha \in \mathrm{pred}_a(\mathrm{top}(a)) | \exists x \widetilde{\in} e(x \approx \mathrm{cut}(a, \alpha))\}$. Es ist $z \neq \emptyset$, da es wegen $\neg e \approx \widetilde{\emptyset}$ ein $x \widetilde{\in} e$ gibt, und nach Voraussetzung dann auch $x \widetilde{\in} a$ ist. Nach (9) gibt es ein $\alpha \in r \cup s$ mit $\mathrm{pred}_{\bar{b}}(\alpha) = z$. Nun gilt $e \approx \mathrm{cut}(b, \alpha)$ (und damit ist die Behauptung wegen $\mathrm{cut}(b, \alpha) \widetilde{\in} b$ gezeigt): Wir benutzen das Extensionalitätsaxiom und zeigen: $x \widetilde{\in} e \Leftrightarrow x \widetilde{\in} \mathrm{cut}(b, \alpha)$. Sei zuerst $x \widetilde{\in} e$. Nach Voraussetzung ist dann auch $x \widetilde{\in} a$, so dass es ein $\gamma a \mathrm{top}(a)$ gibt mit $x \approx \mathrm{cut}(a, \gamma)$. Nach Definition ist $\gamma \in z$ und somit $\gamma \bar{b} \alpha$. Da $\gamma \in \widehat{a}$, folgt mit (6), dass $\mathrm{cut}(a, \gamma) = \mathrm{cut}(\bar{b}, \gamma)$, so dass schließlich $x \widetilde{\in} \mathrm{cut}(\bar{b}, \alpha)$ folgt. Offensichtlich ist $\mathrm{cut}(\bar{b}, \alpha) = \mathrm{cut}(b, \alpha)$ (das neue Element η hat keine Nachfolger und kann in den betrachteten Ketten nicht auftreten), so dass also $x \widetilde{\in} \mathrm{cut}(b, \alpha)$ gilt. Sei nun umgekehrt $x \widetilde{\in} \mathrm{cut}(b, \alpha)$ vorausgesetzt. Dann gibt es ein $\gamma b \alpha$, so dass $x \approx \mathrm{cut}(b, \gamma)$. Aus $\gamma b \alpha$ folgt $\gamma \in z$, also $\gamma a \mathrm{top}(a)$ und die Existenz eines $y \widetilde{\in} e$ mit $y \approx \mathrm{cut}(a, \gamma)$. Also ist $\mathrm{cut}(a, \gamma) \widetilde{\in} e$. Da $\gamma \in \widehat{a}$ ist, folgt mit (6), dass $x \approx \mathrm{cut}(b, \gamma) = \mathrm{cut}(\bar{b}, \gamma) = \mathrm{cut}(a, \gamma) \widetilde{\in} e$.

(11) Nach (8) und (10) gilt $e \widetilde{\in} b$ genau dann, wenn $\widetilde{\forall} x(x \widetilde{\in} e \to x \widetilde{\in} a)$ gilt. b erfüllt also das Potenzmengenaxiom.

□