Mathematisches Institut der Universität Bonn
Abt. für Grundlagenforschung der Mathematik
Prof. Dr. Peter Koepke

Einführung in die Mathematische Logik WS 2000/2001

Übungsaufgaben, Folge 1, Abgabe: 26.10.2000 in der Vorlesung

Aufgabe 1

(a) Formalisieren Sie in einer geeigneten Quantorensprache folgende aus dem Grundstudium bekannten Eigenschaften einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
- (α) f ist monoton wachsend;
- (β) f ist stetig (im Sinne der ε-δ-Definition von Stetigkeit);
- (γ) f ist gleichmäßig stetig;
- (δ) f hat genau eine Unstetigkeitsstelle;
- (ε) f besitzt ein Maximum;
- (ζ) f hat die Zwischenwerteigenschaft;
- (η) f ist differenzierbar.

(b) Formalisieren Sie in einer geeigneten Quantorensprache folgende Eigenschaften der natürlichen Zahlen k und n:
- (α) n ist gerade;
- (β) n ist Summe von zwei Quadratzahlen;
- (γ) k ist ein Teiler von n;
- (δ) n ist eine Primzahl;
- (ε) Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie auf der Grundlage von **EML** die Richtigkeit folgender Aussagen:
- (α) $\emptyset \in V$;
- (β) $\forall x\ \{x\} \in V$;
- (γ) $\forall x, y\ \{x, y\} \in V$;
- (δ) $\forall x, y\ \{\{x\}, \{x, y\}\} \in V$;
- (ε) $\forall x, y\ x \cup y \in V$.

(b) Berechnen Sie $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ sowie $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))$ und argumentieren Sie auf der Grundlage von **EML**, dass es sich hierbei um Mengen handelt.

(c) Betrachten Sie naiv die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen und die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen mit ihren kanonischen Ordnungen $<$. Interpretieren Sie das System **EML** in $(\mathbb{N}, <)$ und $(\mathbb{Q}, <)$, d.h., bestimmen Sie, welche Aussagen entstehen, wenn man das Relationssymbol $\in$ in den Axiomen von **EML** durch $<$ ersetzt und den Laufbereich der Quantoren auf die Elemente von $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{Q}$ beschränkt. Formulieren Sie in Worten, welche Aussagen über natürliche bzw. rationale Zahlen dadurch entstehen. Bestimmen Sie, ob diese richtig oder falsch sind.

Aufgabe 3
Es sei n eine natürliche Zahl, $n \neq 0$. $\mathbb{W}_n :\equiv \{f \mid f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}\}$ ist die Menge der n-stelligen Wahrheitsfunktionen. Entsprechend den Junktoren der Aussagenlogik definieren wir ein- bzw. zweistellige Wahrheitswertfunktionen $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$ und $\leftrightarrow$ durch „Wahrheitstafeln", wobei wir z.B. $P \wedge Q$ statt $\wedge(P,Q)$ schreiben:

P	$\neg P$
0	1
1	0

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \to Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

(a) Schreiben Sie die Funktionen $\wedge$, $\to$ und $\leftrightarrow$ als Komposition von $\neg$ und $\vee$.

(b) Zeigen Sie, dass sich jede Wahrheitswertfunktion als eine aus $\neg$ und $\vee$ aufgebaute Komposition darstellen läßt.

(c) Läßt sich jede Wahrheitswertfunktion als Komposition von $\to$ darstellen?

(d) Zeigen Sie, dass $\mathbb{W}_n$ genau 2^{2^n} Elemente besitzt.

Aufgabe 4
Eine Boolesche Algebra ist ein Tupel $(A, \wedge, \vee, (\ )^*, 0, 1)$, wobei A eine Menge ist und $0, 1 \in A$ sowie $\wedge\colon A \times A \to A,\ (a,b) \mapsto a \wedge b$; $\vee\colon A \times A \to A,\ (a,b) \mapsto a \vee b$; $(\ )^*\colon A \to A,\ a \mapsto a^*$ gilt, so dass folgende Eigenschaften für alle $a, b, c \in A$ erfüllt sind:

(i) $0 \neq 1$

(ii) $a \wedge b = b \wedge a$, $a \vee b = b \vee a$;

(iii) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$, $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$;

(iv) $(a \wedge b) \vee b = b$, $(a \vee b) \wedge b = b$;

(v) $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$, $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$;

(vi) $a \wedge a^* = 0$, $a \vee a^* = 1$.

Zeigen Sie:

(a) Falls X eine nichtleere Menge und $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X ist, so bildet die Menge der Teilmengen von X, die bezüglich $\mathcal{O}$ offen und abgeschlossen sind, zusammen mit den Verknüpfungen $\cap$, $\cup$ und der Komplementbildung bzgl. X sowie den ausgezeichneten Elementen $\emptyset$ und X eine Boolesche Algebra.

(b) Folgt aus (a), dass (mit den in (a) angegebenen Verknüpfungen und ausgezeichneten Elementen) auch $\mathcal{P}(X)$ eine Boolesche Algebra ist (falls $\mathcal{P}(X) \in V$ gilt)?