Mathematisches Institut der Universität Bonn
Abt. für Grundlagenforschung der Mathematik
Prof. Dr. Peter Koepke

Einführung in die Mathematische Logik WS 2000/2001

Übungsaufgaben, Folge 8, Abgabe: 14.12.2000 in der Vorlesung

Aufgabe 1
Es sei $L = (I, J, K, t)$ eine formale Spache, $j \in J$ mit $t(j) = 1$ und $k \in K$. Zeigen Sie:
(a) $\dot{f}_j \dot{(} \dot{v}_0 \dot{)} \notin \mathrm{Tm}(L)$.
(b) $\dot{\forall}\, \dot{c}_k\ \dot{v}_0 \doteq \dot{f}_j \dot{c}_k \notin \mathrm{Fml}(L)$.

Für die nächsten Aufgaben fixieren wir ein paar Sprechweisen. Es sei A ein Alphabet. ϱ heißt **Regel** über A, falls es ein $n = n_\varrho \in \mathbb{N}$ gibt mit $\varrho \subseteq (A^*)^n \times A^*$. Statt $\varrho((w_1, \ldots, w_n), w)$ schreiben wir auch

$$\varrho\colon \frac{w_1, \ldots, w_n}{w}$$

und sagen: Bei Input $w_1, \ldots, w_n$ produziert ϱ das Wort w. Im Fall $n_\varrho = 0$ gilt $\varrho \subseteq A^*$ und wir nennen ϱ eine Anfangsregel. Eine Menge $\mathcal{K}$ heißt **Kalkül** über A, falls jedes Element von $\mathcal{K}$ eine Regel über A ist. Das **Erzeugnis** $\mathrm{Erz}(\mathcal{K})$ von $\mathcal{K}$ die $\subseteq$-kleinste Menge mit

$$\forall \varrho \in \mathcal{K}\ \forall w_1, \ldots, w_{n_\varrho}, w \in A^*$$
$$((w_1 \in \mathrm{Erz}(\mathcal{K}) \wedge \ldots \wedge w_n \in \mathrm{Erz}(\mathcal{K}) \wedge \varrho((w_1, \ldots, w_{n_\varrho}), w)) \longrightarrow w \in \mathrm{Erz}(\mathcal{K})).$$

Aufgabe 2
(a) Zeigen Sie folgendes Induktionsschema: Es sei $\phi(x)$ eine $\in$-Formel und es gelte

$$\forall \varrho \in \mathcal{K}\ \forall w_1, \ldots, w_{n_\varrho}, w \in \mathrm{Erz}(\mathcal{K})$$
$$((\phi(w_1) \wedge \ldots \wedge \phi(w_{n_\varrho}) \wedge \varrho((w_1, \ldots, w_{n_\varrho}), w)) \longrightarrow \phi(w)).$$

Dann gilt: $\forall w \in \mathrm{Erz}(\mathcal{K})\ \phi(w)$.

(b) Es seien $w_1, \ldots, w_N, w \in A^*$. Die Sequenz $(w_1, \ldots, w_N)$ heißt **Ableitung** für w, falls gilt:
- $w_N = w$;
- $\forall k \leq N\ \exists \varrho \in \mathcal{K}\ \exists i_1, \ldots, i_{n_\varrho} < k\ \varrho((w_{i_1}, \ldots, w_{i_{n_\varrho}}), w_k)$.

Zeigen Sie $\mathrm{Erz}(\mathcal{K}) = \{w \in A^* \mid w \text{ hat eine Ableitung}\}$.

Wir sagen, der Kalkül $\mathcal{K}$ hat **eindeutige Zerlegung**, falls sich jedes $w \in \operatorname{Erz}(\mathcal{K})$ auf genau eine Weise produzieren läßt, genauer, falls gilt:

$$\begin{aligned}
&\forall w \in \operatorname{Erz}(\mathcal{K})\ \forall \varrho_0, \varrho_1 \in \mathcal{K}\, \forall w_1^0, \ldots, w_{n_{\varrho 0}}^0, w_1^1, \ldots, w_{n_{\varrho 1}}^1 \in \operatorname{Erz}(\mathcal{K}) \\
&((\varrho_0((w_1^0, \ldots, w_{n_{\varrho 0}}^0), w) \ \wedge\ \varrho_1((w_1^1, \ldots, w_{n_{\varrho 1}}^1), w)) \\
&\ \longrightarrow\ (\varrho_0 = \varrho_1 \ \wedge\ w_1^0 = w_1^1 \ \wedge\ \ldots \ \wedge\ w_{n_{\varrho 0}}^0 = w_{n_{\varrho 1}}^1)).
\end{aligned}$$

Aufgabe 3
Geben Sie über dem Alphabet A_L einen Kalkül $\mathcal{K}_L$ an, der eindeutige Zerlegung hat und für den $\operatorname{Erz}(\mathcal{K}_L) = \operatorname{Fml}(L)$ gilt.

Aufgabe 4
Es sei $\mathcal{K}$ ein Kalkül, der eindeutige Zerlegung hat. Beweisen Sie folgenden Rekursionssatz: Für jedes $\varrho \in \mathcal{K}$ sei $G_\varrho \colon V^{n_\varrho + 1} \to V$. Dann existiert genau eine Funktion $H \colon \operatorname{Erz}(\mathcal{K}) \to V$ mit folgender Eigenschaft:

$$\begin{aligned}
&\forall \varrho \in \mathcal{K}\ \forall w_1, \ldots, w_{n_\varrho}, w \in \operatorname{Erz}(\mathcal{K}) \\
&(\varrho((w_1, \ldots, w_{n_\varrho}), w) \ \longrightarrow\ H(w) = G_\varrho(H(w_1), \ldots, H(w_{n_\varrho}), w)).
\end{aligned}$$

Tipp: Setzen Sie $E_N :\equiv \{w \in \operatorname{Erz}(\mathcal{K}) \mid w \text{ hat eine Ableitung von höchstens Länge } N\}$. Definieren Sie dann $H_N \colon E_N \to V$ mit $H_N \restriction E_{N-1} = H_{N-1}$ geeignet, indem Sie ausnutzen, dass jedes $w \in E_N \setminus E_{N-1}$ auf eindeutige Weise durch eine Regel ϱ mit Input aus E_{N-1} produziert wird. Setzen Sie dann $H :\equiv \bigcup_{N \in \mathbb{N}} H_N$.