Mathematisches Institut der Universität Bonn
Abt. für Grundlagenforschung der Mathematik
Prof. Dr. Peter Koepke

Einführung in die Mathematische Logik WS 2000/2001

Übungsaufgaben, Folge 7, Abgabe: 07.12.2000 in der Vorlesung

Aufgabe 1
Statt des Rekursionsschemas 5.3 wird oft folgender Rekursionssatz verwendet:

$$\forall\alpha\,\forall a\,\forall g\,\exists f\ (g\colon {}^{<\alpha}a \to a \longrightarrow (f\colon \alpha \to a \wedge \forall\beta < \alpha\ f(\beta) = g(f \upharpoonright \beta))).$$

Beweisen Sie diesen Rekursionssatz in $\mathbf{ZF}^-$.

Aufgabe 2
Berechnen Sie die Kardinalitäten der folgenden Mengen: ${}^{<\omega}a$, $\{f \mid f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \wedge f \text{ stetig}\}$, $\{f \mid f\colon \omega \to \omega \wedge f \text{ bijektiv}\}$.

Aufgabe 3
(a) Es sei K ein Körper, X ein K-Vektorraum und B eine K-Basis von X. Berechnen Sie $\overline{\overline{X}}$ in Abhängigkeit von $\overline{\overline{K}}$ und $\overline{\overline{B}}$.
(b) Es sei K ein Körper, und für $i = 0, 1$ sei X_i ein K-Vektorraum und B_i eine K-Basis von X_i. Zeigen Sie, dass X_0 und X_1 isomorph sind, falls $\overline{\overline{B_0}} = \overline{\overline{B_1}} = \mu \geq \aleph_0$. Ist X_0 isomorph zum Vektorraum $\times_{\alpha<\mu} K$?
(c) Berechnen Sie die Kardinalität einer Hamelbasis (des $\mathbb{Q}$-Vektorraumes $\mathbb{R}$).

Aufgabe 4
Jede reelle Zahl r mit $0 < r < 1$ hat eine eindeutige Darstellung der Form

$$r = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 10^{-i} \text{ mit } a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\} \text{ und } \forall i\,\exists j > i\ a_j \neq 9.$$

Wir nennen diese Darstellung Normaldarstellung und definieren eine Abbildung Φ: $]0,1[\, \to\,]0,1[\times]0,1[$ wie folgt: Es sei $r \in\,]0,1[$ und $r = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 10^{-i}$ sei die Normaldarstellung von r. Setze

$$\Phi(r) :\equiv (\sum_{i=1}^{\infty} a_{2i} 10^{-i}, \sum_{i=1}^{\infty} a_{2i-1} 10^{-i}).$$

Zeigen Sie, dass Φ stetig und surjektiv aber nicht injektiv ist.
Argumentieren Sie schließlich allgemein, dass $]0,1[$ und $]0,1[\times]0,1[$ nicht homöomorph sind, d.h., dass es keine bijektive Abbildung f zwischen $]0,1[$ und $]0,1[\times]0,1[$ gibt, so dass f und f^{-1} stetig sind.