Mathematisches Institut der Universität Bonn
Abt. für Grundlagenforschung der Mathematik
Prof. Dr. Peter Koepke

Einführung in die Mathematische Logik WS 2000/2001

Übungsaufgaben, Folge 6, Abgabe: 30.11.2000 in der Vorlesung

Wir setzen, sofern nicht etwas anderes angegeben ist, das System **ZF** voraus.

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass es zu jeder Menge x eine $\subseteq$-kleinste Menge y gibt, die transitiv und Obermenge von x ist. Diese Menge y heißt transitive Hülle von x und wird mit $\mathrm{TC}(x)$ bezeichnet.
Tipp: Überlegen Sie, dass die durch $x \cup \bigcup x \cup \bigcup\bigcup x \cup \ldots$ angedeutete Menge die Eigenschaften einer transitiven Hülle von x besitzt. Geben Sie mit Hilfe einer ω-Rekursion eine exakte Definition dieser Menge.

Aufgabe 2
Zeigen Sie direkt, dass aus dem Lemma von ZORN der Wohlordnungssatz folgt.
Tipp: Zu vorgelegter Menge a betrachten Sie $\mathcal{Z} :\equiv \{(b,r) \mid b \subseteq a \wedge r \text{ ist Wohlordnung auf } b\}$ zusammen mit der Relation $(b_0, r_0) \preceq (b_1, r_1) :\equiv (b_0 \subseteq b_1 \wedge r_1$ ist eine Enderweiterung von $r_0)$, d.h., $r_0 = r_1 \cap (b_0 \times b_0)$ und für jedes $x \in b_1 \setminus b_0$ und alle $y \in b_0$ gilt $y r_1 x$. Wenden Sie das Lemma von ZORN auf $(\mathcal{Z}, \preceq)$ an.

Aufgabe 3
Wir setzen **ZFC** voraus. Es sei X eine Menge und $W \subseteq \mathcal{P}(X)$ sei nicht leer und erfülle folgende Endlichkeitseigenschaft:

$$\forall w \, (w \in W \longleftrightarrow \forall v \subseteq w \text{ endlich} \, v \in W).$$

Zeigen Sie, dass $(W, \subseteq)$ ein maximales Element hat.

Aufgabe 4
Es sei (a,r) eine Wohlordnung. Zeigen Sie, dass es genau eine Ordinalzahl α und genau eine Funktion f gibt, so dass f eine ordungstreue Bijektion von $(\alpha, <)$ auf (a,r) ist. Die Zahl α bezeichnet man auch als Ordnungstyp von (a,r) und schreibt $\alpha = \mathrm{otp}(a,r)$.
Tipp: Eine Beweisidee erhalten Sie, wenn Sie den Beweis, dass **(AC)** den Wohlordnungssatz impliziert, nacharbeiten.