Mathematisches Institut der Universität Bonn
Abt. für Grundlagenforschung der Mathematik
Prof. Dr. Peter Koepke

Einführung in die Mathematische Logik WS 2000/2001

Übungsaufgaben, Folge 5, Abgabe: 23.11.2000 in der Vorlesung

Aufgabe 1
Es gelte $G\colon V \to V$ und F sei der durch $<$-Rekursion auf On und die Rekursionsvorschrift G bestimmte kanonische Term. Beweisen Sie detailliert die Eindeutigkeitsaussage des Rekursionssatzes: Wenn F' ein Klassenterm ist, so dass $F'\colon \mathrm{On} \to V$ gilt und F' die Rekursionsvorschrift erfüllt ($\forall \alpha \in \mathrm{On}\ F'(\alpha) = G(F' \upharpoonright \alpha)$), so gilt $F' = F$.

Aufgabe 2
(a) Zeigen Sie durch transfinite Induktion (Ordinalzahlinduktion): Addition und Multiplikation von Ordinalzahlen sind assoziativ. Außerdem gelten folgende Monotonieregeln: Falls $\beta < \gamma$, so $\beta + \alpha \leq \gamma + \alpha$ sowie $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$ und $\beta \cdot \alpha \leq \gamma \cdot \alpha$ sowie (falls $\alpha \neq 0$) $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$.

(b) Rechtfertigen Sie anhand des Rekursionssatzes aus der Vorlesung, dass es eine Funktion $f\colon \omega \to \omega$ gibt mit $f(n) = n!$. Geben Sie hierzu einen Klassenterm G (in der Form $G = \{u \mid \varphi\}$) an mit $G\colon V \to V$, so dass f die Einschränkung des durch $<$-Rekursion auf On und die Rekursionsvorschrift G bestimmten kanonischen Terms F auf ω ist. Wählen Sie G so, dass F die Fakultätsfunktion mit der üblichen Definition ($F(\alpha{+}1) = F(\alpha)\cdot(\alpha{+}1)$) auf ganz On fortsetzt, wobei an Limesstellen δ gelten soll $F(\delta) = \sup_{\alpha<\delta} F(\alpha)$.

Aufgabe 3
(a) Zeigen Sie $2^\omega = \omega$.

(b) Das Resultat aus (a) kann so gedeutet werden: ω ist ein Fixpunkt der Funktion $\alpha \mapsto 2^\alpha$. Zeigen Sie, dass *jede* monotone und stetige Funktion $F\colon \mathrm{On} \to \mathrm{On}$ beliebig große Fixpunkte hat, genauer: Sei $F\colon \mathrm{On} \to \mathrm{On}$ ordnungstreu und es gelte $F(\delta) = \sup_{\alpha<\delta} F(\alpha)$ für jede Limesordinalzahl δ. Dann existiert zu jedem $\gamma \in \mathrm{On}$ eine Limesordinalzahl $\delta > \gamma$ mit $F(\delta) = \delta$.
Was bedeutet dieses Resultat für die Funktionen $\alpha \mapsto \xi + \alpha$, $\alpha \mapsto \xi \cdot \alpha$, $\alpha \mapsto \xi^\alpha$?
Tipp: Wenn Sie keine Idee haben, wie der Fixpunkt gefunden werden kann, schauen Sie in den Beweis des aus dem Grundstudium bekannten BANACHschen Fixpunktsatz.

Aufgabe 4
Zeigen Sie: Jede Ordinalzahl ist eindeutig darstellbar als $\delta{+}n$, wobei δ eine Limesordinalzahl oder $\delta = 0$ und $n \in \omega$ ist.