Mathematisches Institut der Universität Bonn
Abt. für Grundlagenforschung der Mathematik
Prof. Dr. Peter Koepke

Einführung in die Mathematische Logik WS 2000/2001

Übungsaufgaben, Folge 4, Abgabe: 16.11.2000 in der Vorlesung

Definition. Es seien A und R Klassenterme mit $R \subseteq A \times A$. R heißt **(starke) Wohlordung** auf A, falls folgende drei Eigenschaften gelten:

(i) $\forall x, y, z \in A\, (\neg xRx \wedge ((xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz) \wedge (x \neq y \rightarrow (xRy \vee yRx))$;

(ii) $\forall b \subseteq A\, (b \neq \emptyset \rightarrow \exists x \in b \forall y \in b\, (y = x \vee xRy))$;

(iii) $\forall x \in A\, \{y \mid yRx\} \in V$.

Aufgabe 1
Es sei R eine Wohlordnung auf A und S eine Wohlordnung auf B.

(a) Beweisen Sie folgendes Fundierungsschema: Falls $\varphi(x, \vec{z})$ eine $\in$-Formel ist, so gilt $\forall \vec{z}\, (\exists x \in A\, \varphi(x, \vec{z}) \longrightarrow \exists x \in A\, (\varphi(x, \vec{z}) \wedge \forall y\, (yRx \longrightarrow \neg\varphi(y, \vec{z}))))$.
Wie kann man dieses Fundierungsschema umgangssprachlich ausdrücken?

(b) Es sei $F: A \rightarrow A$ ordnungstreu. Dann gilt $xRF(x)$ oder $x = F(x)$ für alle $x \in A$. Insbesondere ist $\mathrm{ran}(F)$ kein Anfangsstück von A, d.h., es gibt kein $u \in A$ mit $\mathrm{ran}(F) = \{x \mid xRu\}$.

(c) Es gibt höchstens eine bijektive und ordnungstreue Abbildung (Isomorphismus) von (A, R) auf (B, S).

(d) Es gilt genau eine der folgenden drei Aussagen:

   (i) (A, R) und (B, S) sind isomorph, d.h., es gibt einen Isomorphismus von (A, R) auf (B, S).

   (ii) (A, R) ist isomorph zu einem Anfangsstück von (B, S).

   (iii) (B, S) ist isomorph zu einem Anfangsstück von (A, R).

   Tipp: Betrachten Sie $F :\equiv \{(x, y) \in A \times B \mid \{u \mid uRx\} \text{ ist isomorph zu } \{u \mid uSy\}\}$.

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$\begin{aligned}(\alpha_1, \beta_1) <_{\mathrm{On} \times \mathrm{On}} (\alpha_2, \beta_2) :\equiv (\, & \max\{\alpha_1, \beta_1\} < \max\{\alpha_2, \beta_2\} \vee \\ & (\max\{\alpha_1, \beta_1\} = \max\{\alpha_2, \beta_2\} \wedge \alpha_1 < \alpha_2) \vee \\ & (\max\{\alpha_1, \beta_1\} = \max\{\alpha_2, \beta_2\} \wedge \alpha_1 = \alpha_2 \wedge \beta_1 < \beta_2))\end{aligned}$$

eine Wohlordnung auf $\mathrm{On} \times \mathrm{On}$ definiert ist.
Zeigen Sie ferner, dass durch $(m, n) \mapsto (\max\{m, n\})^2 + r(m, n)$ mit

$$r(m, n) = \begin{cases} m, & \text{falls } m < n \\ m + n, & \text{falls } n \leq m \end{cases}$$

eine ordnungstreue Bijektion von $(\omega \times \omega, <_{\mathrm{On} \times \mathrm{On}} \cap\, \omega \times \omega)$ auf $(\omega, \in)$ definiert ist.

(b) Geben Sie eine Wohlordnung $<'$ von $\omega \times \omega$ an, so dass es ein Polynom p mit rationalen Koeffizienten gibt, das eine ordnungstreue Bijektion zwischen $(\omega \times \omega, <')$ und $(\omega, \in)$ ist.
Tipp: Betrachten Sie die Diagonalen $D_i = \{(m, n) \mid m + n = i\}$.

Benutzen Sie hierbei Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division natürlicher Zahlen auf naive Weise. Diese Operationen werden im weiteren Verlauf der Vorlesung noch formal definiert.

Aufgabe 3

(a) Es sei $\mathrm{Nat}(x) :\equiv (\mathrm{Succ}(x) \wedge \forall y \in x\ \mathrm{Succ}(y))$. Zeigen Sie $\omega = \{x \mid \mathrm{Nat}(x)\}$.

(b) Es sei n eine konkret gegebene natürliche Zahl. Zeigen Sie $\tilde{0} = \min(\omega)$ und $\tilde{n} = \min(\omega \setminus \{\tilde{0}, \ldots, \widetilde{n-1}\})$.

(c) Es sei **FIN** das Axiomensystem von Folge 3, Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass aus **FIN** die Negation des Unendlichkeitsaxioms folgt.

Aufgabe 4

Nach Zermelo werden die natürlichen Zahlen als Mengen durch iteriertes Mengenbilden modelliert: $0 \equiv \emptyset$, $1 \equiv \{\emptyset\}$, $2 \equiv \{\{\emptyset\}\}, \ldots$ Wir wollen diese Zermelo-Zahlen in der $\in$-Sprache formalisieren. Hierzu setzen wir

$$\begin{aligned} L(u,x) &:\equiv \emptyset \in u \wedge x \in u \wedge \{x\} \notin u \wedge \\ &\qquad \forall v \in u\, ((v \neq \emptyset \to \exists w \in u\, v = \{w\}) \wedge (v \neq x \to \{v\} \in u)) \\ \mathrm{Zz}(x) &:\equiv \exists u\, L(u,x) \end{aligned}$$

Gilt $L(u,x)$, so nennen wir u auch eine Leiter für x. Es sei nun $\omega^* :\equiv \{x \mid \mathrm{Zz}(x)\}$. Zeigen Sie, dass durch

$$x_0 <^* x_1 :\equiv x_0 \neq x_1 \wedge \exists u_0, u_1\, (L(u_0,x_0) \wedge L(u_1,x_1) \wedge u_0 \subseteq u_1)$$

eine Wohlordnung auf ω^* definiert ist.