Mathematisches Institut der Universität Bonn
Abt. für Grundlagenforschung der Mathematik
Prof. Dr. Peter Koepke

Einführung in die Mathematische Logik WS 2000/2001

Übungsaufgaben, Folge 3, Abgabe: 09.11.2000 in der Vorlesung

Aufgabe 1
Formalisieren Sie folgende Aussagen als (endliche Listen von) $\in$-Formeln:
(a) $(X, \mathcal{O})$ ist ein topologischer Raum.
(b) $(X, \mathcal{F}, \mu)$ ist ein Maßraum. (Die Existenz der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen darf vorausgesetzt werden.)

Aufgabe 2
Wir setzen **ZF** voraus.
(a) Es sei $a \in V$ und A sowie F seien Klassenterme mit $F: a \to V$. Zeigen Sie, dass die folgenden Klassen Mengen sind:

$$F, \quad F[A \cap a], \quad F^{-1}[A], \quad \bigtimes_{x \in a} F(x) :\equiv \{f \mid f: a \to V \wedge \forall x \in a\ f(x) \in F(x)\}.$$

Geben Sie an den wesentlichen Stellen an, welche Axiome sie verwenden.
(b) Es seien $a, b, c \in V$.
(α) Es sei $b \cap c = \emptyset$. Bestimmen Sie eine Bijektion $F: {}^{b \cup c}a \to {}^{b}a \times {}^{c}a$.
(β) Bestimmen Sie eine Bijektion $F: {}^{b \times c}a \to {}^{b}({}^{c}a)$.
(γ) Bestimmen Sie eine Bijektion $F: {}^{c}(a \times b) \to {}^{c}a \times {}^{c}b$.
Weisen Sie in jedem Fall nach, dass es sich um eine Bijektion handelt, und geben Sie an den wesentlichen Stellen an, welche Axiome Sie verwenden.

Aufgabe 3
Es sei A ein Klassenterm. Zeigen Sie:
(a) Falls A transitiv ist, so sind $\bigcup A$, $\bigcap A$ und $\mathcal{P}(A)$ transitiv.
(b) Es gelte $A \subseteq \mathrm{On}$ und A sei transitiv. Dann gilt $A \in \mathrm{On}$ oder $A = \mathrm{On}$.
(c) Es sei $A \subseteq \mathrm{On}$. Im Fall $A \in V$ ist $\bigcup A$ die kleinste obere Schranke von A. Im Fall $A \neq \emptyset$ ist $\bigcap A$ das kleinste Element von A.

Aufgabe 4
Das Axiomensystem **FIN** bestehe aus folgenden Axiomen und Schemata:
(Ex) $\emptyset \in V$
(Ext) $\forall v_0, v_1\, (v_0 = v_1 \longleftrightarrow \forall v_2 (v_2 \in v_0 \leftrightarrow v_2 \in v_1))$
($\cup$-Ax) $\forall v_0 \forall v_1\, v_0 \cup v_1 \in V$
(Ein) $\forall v_0\, \{v_0\} \in V$
(Ind) Für jede $\in$-Formel φ mit freien Variablen $x, \vec{y}$ das Axiom
$\forall \vec{y}\, ((\varphi(\emptyset, \vec{y}) \wedge \forall u, v\, ((\varphi(u, \vec{y}) \wedge \varphi(v, \vec{y})) \to \varphi(u \cup \{v\}, \vec{y}))) \longrightarrow \forall x \varphi(x, \vec{y}))$.
(a) Schreiben Sie die Axiome von **FIN** ohne Verwendung von Klassentermen.
(b) $\mathbf{ZFC}_0$ bezeichne das Axiomensystem, das aus **ZFC** durch Entfernen des Unendlichkeitsaxioms entsteht. Zeigen Sie, dass aus **FIN** alle Axiome von $\mathbf{ZFC}_0$ folgen.