Mathematisches Institut der Universität Bonn
Abt. für Grundlagenforschung der Mathematik
Prof. Dr. Peter Koepke

Einführung in die Mathematische Logik WS 2000/2001

Übungsaufgaben, Folge 2, Abgabe: 02.11.2000 in der Vorlesung

Aufgabe 1
Formalisieren Sie folgende Aussagen als (endliche Listen von) $\in$-Formeln:
(a) $(G, +, 0)$ ist eine Gruppe.
(b) $(R, +, \cdot, 0, 1)$ ist ein Ring.
(c) $(K, +, \cdot, 0, 1)$ ist ein Körper.
(d) $(X, +_X, 0_X)$ ist ein Vektorraum über dem Körper $(K, +, \cdot, 0, 1)$ mit skalarer Multiplikation $\cdot_{K,X}$.

Aufgabe 2
Es sei X eine nicht leere Menge mit $\mathcal{P}(X) \in V$.
(a) $\mathcal{P}(X)$ ist zusammen mit der symmetrischen Differenz $a \Delta b :\equiv (a \setminus b) \cup (b \setminus a)$ als Addition und der Schnittmengenbildung als Multiplikation ein Ring.
(b) Ist $\mathcal{P}(X)$ mit diesen Verknüpfungen auch ein Körper?

Aufgabe 3
Es sei $F: X \to V$ eine Funktion, A ein Klassenterm, $(A_i \mid i \in I)$ sei eine Sequenz von Teilmengen von X und $(B_i \mid i \in I)$ sei eine Sequenz von (beliebigen) Mengen. Zeigen Sie:
(a) $X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i)$.
(b) $X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i)$.
(c) $A \cap \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (A \cap A_i)$.
(d) $A \cup \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (A \cup A_i)$.
(e) $F^{-1}[\bigcup_{i \in I} B_i] = \bigcup_{i \in I} F^{-1}[B_i]$.
(f) $F^{-1}[\bigcap_{i \in I} B_i] = \bigcap_{i \in I} F^{-1}[B_i]$.
(g) $F[\bigcup_{i \in I} A_i] = \bigcup_{i \in I} F[A_i]$.
(h) $F[\bigcap_{i \in I} A_i] \subseteq \bigcap_{i \in I} F[A_i]$; geben Sie ein Beispiel dafür an, dass hier keine Gleichheit gelten muss.
(i) Falls $\operatorname{ran}(F) \subseteq Y$ und $G: Y \to V$, so gilt $(G \circ F)^{-1}[B] = F^{-1}[G^{-1}[B]]$ für jedes $B \subseteq V$.

Aufgabe 4
(a) Geben Sie analog zum Beweis von 2.20 aus der Vorlesung einen strukturierten Beweis dafür an, dass das Hausdorff-Paar $(x, y)_{\mathrm{H}} :\equiv \{\{x, \tilde{0}\}, \{y, \tilde{1}\}\}$ die Grundeigenschaft geordneter Paare erfüllt.
(b) Untersuchen Sie, ob durch

$$\langle x, y, z \rangle_0 :\equiv \{\{x, \tilde{0}\}, \{y, \tilde{1}\}, \{z, \tilde{2}\}\} \text{ bzw. } \langle x, y, z \rangle_1 :\equiv \{\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}$$

adäquat Tripel formalisiert werden.