Mathematisches Institut der Universität Bonn
Abt. für Grundlagenforschung der Mathematik
Prof. Dr. Peter Koepke

Einführung in die Mathematische Logik WS 2000/2001

Übungsaufgaben, Folge 14, Abgabe: 08.02.2001 in der Vorlesung

Für $\kappa \in \mathrm{Card}$ sei $H_\kappa :\equiv \{x \mid \overline{\overline{\mathrm{TC}(x)}} < \kappa\}$ die Klasse der Mengen von erblicher Mächtigkeit kleiner als κ. Wir setzen im Folgenden **ZFC** voraus.

Aufgabe 1
Zeigen Sie $H_{\aleph_1} \models (\mathbf{ZFC} - (\mathbf{Pot})) + \neg(\mathbf{Pot})$, d.h., alle **ZFC**-Axiome außer dem Potenzmengenaxiom und die Negation des Potenzmengenaxioms gelten, wenn sie auf $H_{\aleph_1}$ relativiert werden.

Eine Limesordinalzahl λ heißt regulär, wenn jede Teilmenge X von λ, deren Kardinalität kleiner als λ ist, in λ beschränkt ist, es also ein $\gamma < \lambda$ gibt mit $X \subseteq \gamma$.

Aufgabe 2
(a) Falls λ regulär ist, gilt $\lambda \in \mathrm{Card}$.
(b) ω ist regulär.
(c) Falls $\lambda = \aleph_\delta$ mit $\mathrm{Lim}(\delta)$ und $\delta < \lambda$ ist, so ist λ nicht regulär.
(d) Falls $\lambda = \aleph_{\alpha+1}$ ist, so ist λ regulär.
Tipp: Falls X unbeschränkt in λ ist, gilt $\lambda = \bigcup_{\xi \in X} \xi$. Berechnen Sie die Kardinalität der rechts stehenden Menge.

Eine Kardinalzahl $\lambda > \omega$ heißt unererreichbar, falls sie eine reguläre Limeskardinalzahl ist, die gegen die Kardinalzahloperation $\gamma \in \mathrm{Card} \mapsto 2^\gamma \in \mathrm{Card}$ abgeschlossen ist, d.h., für $\gamma \in \mathrm{Card} \cap \lambda$ ist $2^\gamma < \lambda$.

Aufgabe 3
Geben Sie eine $\in$-Formel $\varphi(\lambda)$ an, die besagt, dass λ unerreichbar ist.

Aufgabe 4
(a) Falls κ unerreichbar ist, gilt $H_\kappa \models \mathbf{ZFC}$ und die Eigenschaft „λ ist unerreichbar“ ist H_κ-absolut.
(b) Schließen Sie aus (a): In **ZFC** kann die Existenz einer unerreichbaren Kardinalzahl nicht bewiesen werden.

Zur Erinnerung: Wer die Klausur nicht bestanden und Interesse an der Möglichkeit einer Nachprüfung bzw. Nachklausur hat, meldet sich bitte am Donnerstag, dem 01.02.2001 um 12.30 Uhr in meinem Zimmer (Beringstraße 4, Raum 34). MB