Mathematisches Institut der Universität Bonn
Abt. für Grundlagenforschung der Mathematik
Prof. Dr. Peter Koepke

Einführung in die Mathematische Logik WS 2000/2001

Übungsaufgaben, Folge 13, Abgabe: 01.02.2001 in der Vorlesung

Aufgabe 1
Es sei L eine formale Sprache, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien L-Strukturen und $\pi\colon\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ sei ein Isomorphismus. Zeigen Sie, dass π eine elementare Abbildung ist, d.h., für jede Belegung β in $\mathfrak{A}$ und jedes $\varphi\in\mathrm{Fml}(L)$ gilt $\mathfrak{A}\models\varphi[\beta]$ genau dann wenn $\mathfrak{B}\models\varphi[\pi\circ\beta]$.
Folgern Sie, dass $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ elementar äquivalent sind: Für jedes $\varphi\in\mathrm{Fml}(L)$ mit $\mathrm{fr}(\varphi)=\emptyset$ gilt $\mathfrak{A}\models\varphi$ genau dann wenn $\mathfrak{B}\models\varphi$.

Aufgabe 2
Eine $L_{\text{Äq}}$-Formel φ heißt beschränkt, wenn jeder in φ vorkommende Quantor von der Form $\dot\exists\,\dot v_n\dot{(}\dot R\dot v_n\dot v_m\,\dot\wedge\,\ldots\dot{)}$ bzw. $\dot\forall\,\dot v_n\dot{(}\dot R\dot v_n\dot v_m\,\dot\to\,\ldots\dot{)}$.

(a) Geben Sie (rekursiv) eine exakte Definition der Menge der beschränkten $L_{\text{Äq}}$-Formeln an.

(b) Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ strikte lineare Ordnungen, d.h., Modelle von

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathrm{SLO}} :\equiv \{&\dot\forall\,\dot v_0\,\dot\neg\,\dot R\dot v_0\dot v_0, \dot\forall\,\dot v_0\dot\forall\,\dot v_1\,\dot{(}\,\dot\neg\,\dot v_0\doteq\dot v_1\,\dot\to\,\dot{(}\dot R\dot v_0\dot v_1\,\dot\vee\,\dot R\dot v_1\dot v_0\dot{)}\dot{)},\\ &\dot\forall\,\dot v_0\dot\forall\,\dot v_1\dot\forall\,\dot v_2\,\dot{(}\dot{(}\dot R\dot v_0\dot v_1\,\dot\wedge\,\dot R\dot v_1\dot v_2\dot{)}\,\dot\to\,\dot R\dot v_0\dot v_2\dot{)}\}.\end{aligned}$$

Es sei $\mathfrak{A}$ eine Substruktur von $\mathfrak{B}$ und der Träger A von $\mathfrak{A}$ sei ein Anfangsstück des Trägers B von $\mathfrak{B}$, d.h., es gibt ein $b\in B$ mit $A=\{a\in B\mid a<b\}$, wobei wir mit $<$ die Interpretation von $\dot R$ in $\mathfrak{B}$ bezeichnen.
Zeigen Sie: Ist β eine Belegung in $\mathfrak{A}$, so gilt für jede beschränkte $L_{\text{Äq}}$-Formel φ: $\mathfrak{A}\models\varphi[\beta]\iff\mathfrak{B}\models\varphi[\beta]$.

(c) Bleibt (b) richtig, wenn man auf die Voraussetzung, dass A ein Anfangsstück von B ist oder dass φ beschränkt ist, verzichtet?

Aufgabe 3
Es sei L eine formale Sprache. Eine Formel $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$ heißt $\forall$-Formel von L, falls sie von der Form $\dot\forall\, \dot v_{i_0} \ldots \dot\forall\, \dot v_{i_{n-1}} \psi$ mit ψ quantorenfrei ist. Sie heißt $\exists$-Formel von L, falls sie von der Form $\dot\exists\, \dot v_{i_0} \ldots \dot\exists\, \dot v_{i_{n-1}} \psi$ mit ψ quantorenfrei ist.

(a) Geben Sie (rekursiv) eine exakte Definition der Menge der $\forall$-Formel von L und der Menge der $\exists$-Formeln von L an.

(b) Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ L-Strukturen und $\mathfrak{A}$ sei eine Substruktur von $\mathfrak{B}$. Ferner sei β eine Belegung in $\mathfrak{A}$. Zeigen Sie:

(α) Falls φ eine $\forall$-Formel ist und $\mathfrak{B} \models \varphi[\beta]$ gilt, so gilt $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$.

(β) Falls φ eine $\exists$-Formel ist und $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ gilt, so gilt $\mathfrak{B} \models \varphi[\beta]$.

Bleiben diese Aussagen richtig, wenn man auf die Voraussetzungen, dass φ eine $\forall$-Formel bzw. eine $\exists$-Formel ist, verzichtet?

Aufgabe 4
Es sei L eine abzählbare Sprache und $\mathfrak{A}$ sei eine L-Struktur. Ferner sei $X \subseteq A$ und $\kappa \in \mathrm{Card}$ mit $\overline{\overline{X}} \leq \kappa < \overline{\overline{A}}$. Zeigen Sie, dass es eine elementare Substruktur $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ gibt, deren Träger Kardinalität κ hat und X umfasst. Hierbei heißt $\mathfrak{B}$ elementare Substruktur von $\mathfrak{A}$, falls $\mathfrak{B}$ eine Substruktur von $\mathfrak{A}$ ist und für jede Belegung β in $\mathfrak{B}$ und jedes $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$ gilt: $\mathfrak{B} \models \varphi[\beta] \iff \mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$.

Tipp: Man kann o.E. annehmen, dass $\overline{\overline{X}} = \kappa$ gilt. Mit Hilfe des Auswahlaxioms definiere dann für jede Formel $\dot\exists\, \dot v_m \varphi$, deren freie Variablen unter $\dot v_0, \ldots, \dot v_{n-1}$ vorkommen, eine Funktion $f_{\dot\exists\, \dot v_m \varphi} \colon A^n \to A$ so, dass $f_{\dot\exists\, \dot v_m \varphi}(a_0, \ldots, a_{n-1})$ ein Zeuge der Existenz $\mathfrak{A} \models \dot\exists\, \dot v_m \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$ ist. Schliesse dann X gegen diese Funktionen ab.