Mathematisches Institut der Universität Bonn
Abt. für Grundlagenforschung der Mathematik
Prof. Dr. Peter Koepke

Einführung in die Mathematische Logik WS 2000/2001

Übungsaufgaben, Folge 12, Abgabe: 25.01.2001 in der Vorlesung

Aufgabe 1
Untersuchen Sie, ob die folgenden L_{Arith}-Modellklassen axiomatisierbar sind:
(a) die Modellklasse der endlichen Körper.
(b) die Modellklasse der unendlichen Körper.
(c) die Modellklasse der abzählbaren Körper.
(d) die Modellklasse der überabzählbaren Körper.

Aufgabe 2
Es sei L eine formale Sprache. Wir definieren die Menge $P(L)$ der Formeln von L, die in pränexer Normalform sind, rekursiv durch

$$\begin{aligned} P_0(L) &:\equiv \{\varphi \in \mathrm{Fml}(L) \mid \varphi \text{ ist quantorenfrei}\}; \\ P_{n+1}(L) &:\equiv P_n(L) \cup \{\dot\exists\, \dot v_i\, \varphi \mid \varphi \in P_n(L) \wedge i < \omega\} \cup \{\dot\forall\, \dot v_i\, \varphi \mid \varphi \in P_n(L) \wedge i < \omega\}; \\ P(L) &:\equiv \bigcup_{n<\omega} P_n(L). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass es zu jedem $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$ ein $\varphi' \in P(L)$ gibt mit $\models \dot{(}\varphi \dot\leftrightarrow \varphi'\dot{)}$.

Aufgabe 3
Es sei $(X, <)$ eine partielle Ordnung und $n < \omega$. Ferner seien $x_1, \ldots, x_n \in X$. Dann heißt $(x_1, \ldots, x_n)$ ein Weg in X (der Länge n) von x_1 nach x_n falls gilt:
(i) Für $0 < i < n$ ist x_i der direkte $<$-Vorgänger von x_{i+1}.
(ii) Für $i \neq j$ gilt $x_i \neq x_j$.

Ein Weg $(x_1, \ldots, x_n)$ heißt Kreis in X, falls $x_1 = x_n$ gilt. Die partielle Ordnung $(X, <)$ heißt kreisfrei, falls X keine nichttrivialen Kreise (d.h., keine Kreise der Länge größer als 1) besitzt.
Axiomatisieren Sie in der Sprache $L_{\mathrm{\ddot{A}q}}$ die Modellklasse $\mathcal{M}$ der kreisfreien partiellen Ordnungen. Hat $\mathcal{M}$ eine endliche Axiomatisierung, d.h., gibt es ein endliches $\Phi \subseteq \mathrm{Fml}(L)$ mit $\mathrm{fr}(\Phi) = \emptyset$, so dass Φ die Modellklasse $\mathcal{M}$ axiomatisiert?
Tipp: Überlegen (und zeigen) Sie: $\mathrm{Mod}^{L_{\mathrm{\ddot{A}q}}}(\Psi)$ hat genau dann eine endliche Axiomatisierung, wenn es ein endliches $\Phi \subseteq \Psi$ gibt, das $\mathrm{Mod}^{L_{\mathrm{\ddot{A}q}}}(\Psi)$ axiomatisiert.

Aufgabe 4 (Nichtstandardmodell von $\mathbb{R}$)
Wir erweitern die Sprache L_{aoK} zur Sprache $L_{\mathbb{R}}$, indem wir für jede reelle Zahl r ein neues Konstantensymbol $\dot{c}_r$ hinzufügen. Dann erweitern wir die L_{aoK}-Struktur $\mathbb{R}$ zu einer $L_{\mathbb{R}}$-Struktur $\tilde{\mathbb{R}}$ indem wir für $r \in \mathbb{R}$ das Konstantensymbol $\dot{c}_r$ durch r interpretieren. Schliesslich setzen wir $\Phi :\equiv \{\varphi \in \mathrm{Fml}(L_{\mathbb{R}}) \mid \mathrm{frei}(\varphi) = \emptyset \wedge \tilde{\mathbb{R}} \models \varphi\}$.

(a) Zeigen Sie, dass Φ ein Modell $\tilde{\mathbb{R}}^*$ der Kardinalität $(2^{\aleph_0})^+$ hat, deren Trägermenge $\tilde{R}^*$ zur Menge der reellen Zahlen disjunkt ist.

(b) Zeigen Sie, dass auf $R^* :\equiv (\tilde{R}^* \setminus \{\dot{c}^{\tilde{\mathbb{R}}^*} \mid r \in \mathbb{R}\}) \cup \mathbb{R}$ eine L_{aoK}-Struktur $\mathbb{R}^*$ definiert werden kann, so dass folgendes gilt: Für jedes $\varphi \in \mathrm{Fml}(L_{\mathrm{aoK}})$ und jede Belegung β mit Werten in $\mathbb{R}$ (!) gilt $\mathbb{R} \models \varphi[\beta]$ genau dann wenn $\mathbb{R}^* \models \varphi[\beta]$.
Schliessen Sie hieraus, dass $\mathbb{R}^*$ ein angeordneter Oberkörper des angeordneten Körpers $\mathbb{R}$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass es ein $x \in \mathbb{R}^*$ gibt mit $0 < x < r$ für jedes $r \in \mathbb{R}$.
Tipp: Wählen Sie ein $y \in R^* \setminus \mathbb{R}$ und setzen Sie $x = 1/y$, falls $r < y$ für alle $r \in \mathbb{R}$, bzw. $x = -1/y$, falls $r > y$ für alle $r \in \mathbb{R}$, bzw. $x = y - \sup\{r \in \mathbb{R} \mid r < y\}$, falls $0 < y < r$ für ein $r \in \mathbb{R}$, bzw. $x = y - \inf\{r \in \mathbb{R} \mid y < r\}$, falls $r < y < 0$ für ein $r \in \mathbb{R}$.