Mathematisches Institut der Universität Bonn
Abt. für Grundlagenforschung der Mathematik
Prof. Dr. Peter Koepke

Einführung in die Mathematische Logik WS 2000/2001

Übungsaufgaben, Folge 11, Abgabe: 18.01.2001 in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Beziehungen zwischen Eigenschaften einer Theorie)
Sei L eine beliebige Sprache und Φ eine Formelmenge. Wir wollen Φ L-**quasikategorisch** nennen, wenn Φ keine endlichen Modelle hat und eine Kardinalzahl $\kappa \geq \overline{\overline{L}}$ existiert, so dass Φ κ-kategorisch ist.
Füllen Sie die folgende Tabelle aus. Belegen Sie Ihre Antworten durch einen Beweis oder durch ein kurzes Gegenbeispiel.

		WAHR	**FALSCH**
(a)	Jedes erfüllbare Φ ist L-konsistent.		
(b)	Jedes L-quasikategorische Φ ist L-vollständig.		
(c)	Jedes L-konsistente Φ ist L-vollständig.		
(d)	Jedes L-vollständige Φ ist L-konsistent.		
(e)	Jedes L-quasikategorische Φ ist L-konsistent.		
(f)	Jedes L-vollständige Φ ist erfüllbar.		
(g)	Jedes L-konsistente Φ ist erfüllbar.		

Tipp: Die Beweise für die wahren Aussagen bestehen zumeist nur aus einem Zitat eines Ergebnisses in der Vorlesung oder einer einfachen Kombination von solchen Zitaten.

Aufgabe 2 (Unvollständige Theorien)
Zeigen Sie, dass die Theorien Φ_{aGr} und Φ_{aoK} unvollständig sind.
Tipp: Eine Begründung steht in den Abschnitten **18.5.2** und **18.5.6** des Skripts. Bitte seien Sie bei ihrer Begründung ausführlicher als das Skript.

Aufgabe 3 (Konsistenz)
In Analogie zu Abschnitt **15.3.5** setzen wir

$$
\begin{aligned}
\varphi_{(\mathrm{i})} &:\equiv \dot\forall\, \dot v_0 \,\dot\neg\, \dot R \dot v_0 \dot v_0 \\
\varphi_{(\mathrm{ii})} &:\equiv \dot\forall\, \dot v_0 \dot\forall\, \dot v_1 \,\dot{(}\, \dot\neg\, \dot v_0 \doteq \dot v_1 \dot\to \dot{(} \dot R \dot v_0 \dot v_1 \;\dot\vee\; \dot R \dot v_1 \dot v_0 \dot{)}\dot{)} \\
\varphi_{(\mathrm{iii})} &:\equiv \dot\forall\, \dot v_0 \dot\forall\, \dot v_1 \dot\forall\, \dot v_2 \,\dot{(}\dot{(} \dot R \dot v_0 \dot v_1 \;\dot\wedge\; \dot R \dot v_1 \dot v_2 \dot{)} \dot\to \dot R \dot v_0 \dot v_2 \dot{)} \\
\varphi_{(\mathrm{iv})} &:\equiv \dot\forall\, \dot v_0 \dot\forall\, \dot v_1 \dot\exists\, \dot v_2 \,\dot{(} \dot R \dot v_0 \dot v_1 \dot\to \dot{(} \dot R \dot v_0 \dot v_2 \;\dot\wedge\; \dot R \dot v_2 \dot v_1 \dot{)}\dot{)} \\
\varphi_{(\mathrm{v})} &:\equiv \dot\forall\, \dot v_0 \dot\exists\, \dot v_1 \dot\exists\, \dot v_2 \,\dot{(} \dot R \dot v_1 \dot v_0 \;\dot\wedge\; \dot R \dot v_0 \dot v_2 \dot{)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\mathrm{NT}} &:\equiv \dot\exists\, \dot v_0 \dot\exists\, \dot v_1 \, \dot R \dot v_0 \dot v_1 \\
\varphi_{\mathrm{ME}} &:\equiv \dot\exists\, \dot v_0 \dot\forall\, \dot v_1 \,\dot{(} \dot R \dot v_1 \dot v_0 \,\dot\vee\, \dot v_0 \doteq \dot v_1 \dot{)} \\
\varphi_{\mathrm{LE}} &:\equiv \dot\exists\, \dot v_0 \dot\forall\, \dot v_1 \,\dot{(} \dot R \dot v_0 \dot v_1 \,\dot\vee\, \dot v_0 \doteq \dot v_1 \dot{)} \\
\varphi_{\mathrm{LEP}} &:\equiv \dot\forall\, \dot v_0 \dot\exists\, \dot v_1 \dot\forall\, \dot v_2 \,\dot{(} \dot R \dot v_0 \dot v_2 \dot\to \dot{(} \dot R \dot v_2 \dot v_1 \,\dot\vee\, \dot v_1 \doteq \dot v_2 \dot{)}\dot{)}
\end{aligned}
$$

Prüfen Sie, ob die folgenden Formelmengen konsistent sind:

(a) $\{\varphi_{(\mathrm{i})}, \varphi_{(\mathrm{iii})}, \varphi_{\mathrm{ME}}, \varphi_{\mathrm{LE}}, \varphi_{\mathrm{NT}}\}$,

(b) $\{\varphi_{(\mathrm{i})}, \varphi_{(\mathrm{iii})}, \varphi_{(\mathrm{v})}, \varphi_{\mathrm{ME}}\}$,

(c) $\{\varphi_{(\mathrm{i})}, \varphi_{(\mathrm{iii})}, \varphi_{\mathrm{LEP}}, \neg\varphi_{\mathrm{ME}}\}$,

(d) $\{\varphi_{(\mathrm{i})}, \varphi_{(\mathrm{ii})}, \varphi_{(\mathrm{iii})}, \varphi_{\mathrm{LEP}}, \neg\varphi_{\mathrm{ME}}\}$.

Tipp: Für den Fall, dass die Mengen konsistent sind, verwenden Sie **Satz 17.8**, und zeigen Sie statt der Konsistenz die Erfüllbarkeit, indem Sie geeignete Modelle angeben. Für den Fall, dass die Mengen inkonsistent sind, verwenden Sie **Satz 17.25**, und zeigen Sie statt der Inkonsistenz die Nicht-Erfüllbarkeit.

Aufgabe 4 (Ableiten im Sequenzenkalkül)
Wir betrachten die Theorie Φ_{aoK} der angeordneten Körper. Schreiben Sie die folgenden Aussagen (i) – (iii) als Formeln der Sprache L_{aoK} und leiten Sie diese Formeln aus Φ_{aoK} im Sequenzenkalkül ab.

(i) $\forall x \forall y\, (-x) \cdot (-y) = x \cdot y$;

(ii) $\forall x\, (x > 0 \to -x < 0)$;

(iii) $0 < 1$.

Tipp: Zeigen Sie die Ableitbarkeit der Formeln in der hier angegebenen Reihenfolge. Um eine Idee für die formalen Beweise zu bekommen, können Sie zunächst den Vollständigkeitssatz heranziehen und zeigen, dass die Formeln aus Φ_{aoK} *folgen.* Übertragen Sie dann diese Beweise in formale Beweise im Sequenzenkalkül.