Mathematisches Institut der Universität Bonn
Abt. für Grundlagenforschung der Mathematik
Prof. Dr. Peter Koepke

Einführung in die Mathematische Logik WS 2000/2001

Übungsaufgaben, Folge 10, Abgabe: 11.01.2001 in der Vorlesung

Aufgabe 1
In den Teilaufgaben (a) — (d) sei $\vdash^{(a)}, \ldots, \vdash^{(d)}$ jeweils die $\subseteq$-kleinste Menge U, die außer den Regeln des Sequenzenkalküls folgendes erfüllt:

(a) $$\frac{(\Phi \cup \{\varphi_1\}, \psi_1) \in U \quad (\Phi \cup \{\varphi_2\}, \psi_2) \in U}{(\Phi \cup \{\dot{(}\varphi_1 \dot{\vee} \varphi_2\dot{)}\}, \dot{(}\psi_1 \dot{\vee} \psi_2\dot{)}) \in U};$$

(b) $$\frac{(\Phi \cup \{\varphi_1\}, \psi_1) \in U \quad (\Phi \cup \{\varphi_2\}, \psi_2) \in U}{(\Phi \cup \{\dot{(}\varphi_1 \dot{\vee} \varphi_2\dot{)}\}, \dot{(}\psi_1 \dot{\wedge} \psi_2\dot{)}) \in U};$$

(c) $$\frac{(\Phi \cup \{\varphi\}, \psi) \in U}{(\Phi \cup \{\dot{\forall}\, x\, \varphi\}, \dot{\exists}\, x\, \psi) \in U};$$

(d) $$\frac{(\Phi, \varphi\frac{\dot{f}y}{x}) \in U}{(\Phi, \dot{\forall}\, x \varphi) \in U} \quad (\dot{f} \text{ einstellig, } \dot{f}, y \text{ kommen in } \Phi \cup \{\dot{\forall}\, x\, \varphi\} \text{ nicht vor}).$$

Untersuchen Sie, ob $\vdash^{(a)}, \ldots, \vdash^{(d)}$ korrekt sind.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass folgende Regeln ableitbar sind.

(a) $$\frac{\Phi, \varphi \vdash \chi \quad \Phi, \psi \vdash \chi}{\Phi, \dot{(}\varphi \dot{\vee} \psi\dot{)} \vdash \chi};$$

(b) $$\frac{\Phi \vdash \varphi}{\Phi \vdash \dot{(}\varphi \dot{\vee} \psi\dot{)}};$$

(c) $$\frac{\Phi, \varphi\frac{y}{x} \vdash \psi}{\Phi, \dot{\exists}\, x\, \varphi \vdash \psi} \quad (y \notin \mathrm{fr}(\Phi \cup \{\psi\}) \cup \mathrm{var}(\varphi));$$

(d) $$\frac{\Phi \vdash \varphi\frac{s}{x}}{\Phi \vdash \dot{\exists}\, x\, \varphi} \quad (\varphi, s \text{ kollisionsfrei}).$$

Aufgabe 3
Es sei L eine formale Sprache und es sei $\Psi \subseteq \mathrm{Fml}(L)$.

(a) Argumentieren Sie: Durch $s_1 \approx s_2 :\equiv \Psi \vdash s_1 \doteq s_2$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Tm}(L)$ definiert und analog zum in der Vorlesung betrachteten Fall, dass Ψ eine Henkin-Menge ist, kann auf $A :\equiv \mathrm{Tm}(L)/\approx$ eine L-Struktur $\mathfrak{A}$ definiert werden.

(b) Charakterisieren Sie $\mathfrak{A}$ im Fall, dass Ψ L-inkonsistent ist.

(c) Falls Ψ L-konsistent ist, gilt $\forall \varphi \in \mathrm{At}(L)\,(\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \longleftrightarrow \Psi \vdash \varphi)$, wobei die Belegung β jeder Variablen ihre $\approx$-Äquivalenzklasse zuordnet.

(d) Zeigen Sie, dass in (c) die Voraussetzung $\varphi \in \mathrm{At}(L)$ nicht weggelassen werden kann.
Tipp: Betrachten Sie eine formale Sprache L mit genau einem einstelligen Relationssymbol $\dot{R}$ und setzen Sie $\Psi :\equiv \{\exists \dot{v}_0 \dot{R} \dot{v}_0\} \cup \{\dot{\neg} \dot{R} \dot{v}_n \mid n < \omega\}$.

Aufgabe 4
Es sei L eine formale Sprache und $\vdash'_L$ sei die $\subseteq$-kleinste Teilmenge U von $\mathcal{P}(\mathrm{Fml}(L)) \times \mathrm{Fml}(L)$, die die Regeln des Sequenzenkalküls und

$$\frac{}{(\Phi \cup \{\dot{\exists}\, x\, \varphi\}, \dot{\forall}\, x\, \varphi) \in U}$$

erfüllt. Zeigen Sie, dass $\vdash'_L$ eine echte, nicht triviale Erweiterung von $\vdash_L$ ist: $\vdash_L \subsetneq \vdash'_L \subsetneq \mathcal{P}(\mathrm{Fml}(L)) \times \mathrm{Fml}(L)$.
Tipp: Zum Nachweis der Nichttrivialität zeige man z.B. $\dot{\exists}\, \dot{v}_0\, \dot{v}_0 \doteq \dot{v}_0 \nvdash' \dot{\exists}\, \dot{v}_0\, \dot{\exists}\, \dot{v}_1\, \dot{\neg}\, \dot{v}_0 \doteq \dot{v}_1$.

Im Folgenden ausser Konkurrenz noch eine Aufgabe mit höherem Schwierigkeitsgrad. Bei ihrer Lösung erzielte Punkte werden Ihrem Punktekonto gutgeschrieben.

Aufgabe 5
Es sei $L = L_{\mathrm{Arith}}$ die Sprache der Arithmetik, siehe 15.3.6, und $\Phi_{\text{Körper}}$ sei die Theorie der Körper, siehe 15.3.7. Formalisieren Sie die Eigenschaft der Nullteilerfreiheit in einer L_{Arith}-Formel φ und geben Sie einen formalen Beweis für $\Phi_{\text{Körper}} \vdash_L \varphi$ an.