Über Θ

Matthias Enders
Seminar deskriptive Mengenlehre

8. Februar 2000

Das Ziel dieses Vortrages ist zu untersuchen wie „groß“ die Menge der reellen Zahlen unter AD ist.

1 Was ist Θ?

Unter ZFC können wir den reellen Zahlen eine Kardinalzahl zuordnen, nämlich $\overline{\overline{\omega^\omega}} = 2^{\aleph_0}$.
Im Vortrag „AD versus AC“ haben wir hingegen gesehen, daß unter AD

$$\omega_1 \not\leq \omega^\omega, \tag{1}$$

d.h. es gibt keine überabzählbare wohlordenbare Teilmenge der reellen Zahlen, insbesondere sind also die reellen Zahlen nicht wohlordenbar; wir können ihnen also keine Kardinalzahl zuordnen.
Weiter liefert uns (1), daß die reellen Zahlen im Hinblick auf Injektionen von Ordinalzahlen nach ω^ω klein sind.
Wir können nun aber Surjektionen von ω^ω auf Ordinalzahlen untersuchen („eine Ordinalzahl α ist nicht größer als ω^ω, falls es eine Surjektion von ω^ω nach α gibt“). Nach dem Vortrag „AD und $\aleph_1$“ wissen wir zumindest

$$\omega^\omega \twoheadrightarrow \omega_1 \tag{2}$$

Wir definieren nun:

Definition 1.1. $\Theta = \sup(\{\alpha \mid \text{es gibt eine Surjektion } \omega^\omega \twoheadrightarrow \alpha\})$

Im Folgenden soll nun gezeigt werden, daß Θ unter AD sehr groß ist. Zuerst aber einige grundlegende Eigenschaften von Θ:

Satz 1.2 (ZF).

(i) $\Theta \in On$, *d.h. es gibt nicht für jede Ordinalzahl* α *eine Surjektion von* ω^ω *nach* α.

(ii) Θ *ist eine Kardinalzahl* $\geq \omega_2$.

(iii) In ZFC ist $\Theta = (2^{\aleph_0})^+$.

Beweis:

(i) Angenommen für jede Ordinalzahl α existiert eine Surjektion $\omega^\omega \twoheadrightarrow \alpha$. Ausgehend von einer solchen Surjektion $f : \omega^\omega \twoheadrightarrow \alpha$ erhält man eine Wohlordnung von $\{f^{-1}(\beta) \mid \beta < \alpha\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega^\omega))$.Betrachte nun die Funktion

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathcal{P}[\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega^\omega)) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega^\omega))] \quad &\longrightarrow \quad On \\ R \quad &\longmapsto \quad \begin{cases} \mathrm{otp}(R) & \text{falls } R \subseteq A \times A \text{ für ein} \\ & A \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega^\omega) \text{ und } R \\ & \text{ eine Wohlordnung,} \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Nach Annahme ist φ surjektiv. Mit Ersetzung folgt dann, daß On eine Menge ist, Widerspruch.

(ii) Angenommen nicht, also $\overline{\overline{\Theta}} < \Theta$. Dann existiert eine Surjektion $\omega^\omega \twoheadrightarrow \overline{\overline{\Theta}}$ und mit den Bijektionen $\overline{\overline{\Theta}} \leftrightarrow \Theta$ und $\Theta \leftrightarrow \Theta + 1$ erhält man durch Hintereinanderschalten eine Surjektion $\omega^\omega \twoheadrightarrow \Theta + 1$.Widerspruch zur Definition von Θ. [Insbesondere sieht man also, daß es keine Surjektion von ω^ω auf Θ gibt]. Der zweite Teil der Behauptung folgt mit (2).

(iii) klar

□

2 Θ ist groß

In diesem Kapitel sei stets ZF + AD vorausgesetzt.
Eines der wichtigsten Hilfsmittel zur Berechnung von Θ und der projektiven Ordinalzahlen, die wir in Kapitel 3 kennenlernen werden, ist das Coding Lemma von Moschovakis [Mosch70]. Das folgende Theorem ist eine abgeschwächte Form davon.

Theorem 2.1. *Falls eine Surjektion $\omega^\omega \twoheadrightarrow \alpha$ existiert, dann existiert auch eine Surjektion $\omega^\omega \twoheadrightarrow \mathcal{P}(\alpha)$.*

Beweis: Sei $f : \omega^\omega \twoheadrightarrow \alpha$ eine Surjektion.
Wir definieren nun rekursiv eine Folge $\langle g_\xi \mid \xi \leq \alpha \rangle$, so daß $g_\xi : \omega^\omega \twoheadrightarrow \mathcal{P}(\xi)$ eine Surjektion ist.
Für $\xi = 0$ sei g_0 durch $g_0(x) = \emptyset \quad \forall x \in \omega^\omega$ gegeben.
Für $\xi = n$ mit n endlich, ist $\mathcal{P}(n)$ endlich und wir finden eine Bijektion $b : m \to \mathcal{P}(n)$, $m \in \omega$, und wir setzen z.B.:

$$\begin{aligned} g_n : \quad \omega^\omega \quad &\longrightarrow \quad \mathcal{P}(n) \\ x \quad &\longmapsto \quad \begin{cases} b(k) & \text{falls } x(0) = k,\ k < m, \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

$\xi > \omega$, ξ Nachfolger:
Sei $\xi = \gamma + 1$ und sei $g_\gamma : \omega^\omega \twoheadrightarrow \mathcal{P}(\gamma)$ gegeben.
Die bekannte Bijektion $\gamma \leftrightarrow \gamma + 1$ liefert eine Bijektion $B : \mathcal{P}(\gamma) \leftrightarrow \mathcal{P}(\gamma + 1)$.
Damit erhalten wir
$g_\xi = B \circ g_\gamma : \omega^\omega \twoheadrightarrow \mathcal{P}(\gamma + 1)$.

$\xi = \delta$, δ Limesordinalzahl:
Idee: Für jedes $X \in \mathcal{P}(\delta)$ formulieren wir ein Spiel G^X, so daß wir eine Abbildung von der Menge der Bäume auf ω nach $\mathcal{P}(\delta)$ definieren können, die einer Gewinnstrategie für das Spiel G^X die Menge X zuordnet.
Dazu definieren wir zuerst einmal für $\gamma < \delta$ und $Y \subseteq \gamma$ eine Kodierung durch ω^ω: $z \in \omega^\omega$ kodiert $(\gamma, Y) :\Leftrightarrow f((z)_0) = \gamma$ und $g_\gamma((z)_1) = Y$; wobei $(z)_0(m) = z(2 \cdot 3^{m+1}), (z)_1(m) = z(2^2 \cdot 3^{m+1})$.
Betrachte nun für $X \subseteq \delta$ folgendes Spiel G^X:

$$\begin{array}{lcccccc} \mathrm{I} & x(0) & & x(2) & & \ldots \\ \mathrm{II} & & x(1) & & x(3) & \ldots \end{array} ,$$

in dem I und II immer abwechselnd Elemente von ω spielen. I verliert, falls nicht x_I ein Kode für $(\beta, X \cap \beta)$ für ein $\beta < \delta$ ist.
Dann verliert II, falls nicht x_{II} ein Kode für $(\eta, X \cap \eta)$ für ein $\beta < \eta < \delta$ ist.

(1) Hat I eine Gewinnstrategie σ für G^X, dann ist dieses σ keine Gewinnstrategie für I im Spiel G^Y für ein $Y \neq X$.
Bew: Es gilt:
$\forall y \in \omega^\omega (\sigma * y)_I$ kodiert $(\beta, X \cap \beta)$ für ein $\beta < \delta$.
Sei jetzt $Y \subseteq \delta, Y \neq X$ und sei $\gamma \in Y \triangle X$ und $y \in \omega^\omega$ kodiere $(\gamma+1, X \cap (\gamma+1))$.
$(\sigma * y)_I$ kodiert $(\beta, X \cap \beta)$ für ein $\beta > \gamma$, da σ Gewinnstrategie in G^X für I.
Aber es gilt $(X \cap \beta) \neq (Y \cap \beta)$, da γ nur in einer der beiden Seiten enthalten ist. Somit ist $(\sigma * y)_I$ kein Kode für ein $(\alpha, Y \cap \alpha)$ für alle $\alpha > \gamma$.

(2) Hat II eine Gewinnstrategie τ im Spiel G^X, dann ist dieses τ keine Gewinnstrategie für ein $Y \neq X$ im Spiel G^Y.
Bew: Sei τ Gewinnstrategie für II, d.h.
$\forall z \in \omega^\omega$ (z kodiert $(\beta, X \cap \beta)$ für ein $\beta < \delta$
$\longrightarrow (z * \tau)_{II}$ kodiert $(\eta, X \cap \eta)$ für ein $\beta < \eta < \delta$)
Sei nun $Y \subseteq \delta$ mit $Y \neq X$ und sei $\beta \in Y \triangle X$ minimal, $z \in \omega^\omega$ kodiere
$Y \cap \beta = X \cap \beta$. Dann ist $(z * \tau)_{II}$ ein Kode für $(\eta, X \cap \eta)$ für ein $\eta > \beta$, aber nicht für $Y \cap \eta$, da dies $\neq X \cap \eta$.

Sei nun $S = \{\sigma \,|\, \sigma$ ist Gewinnstrategie für I oder II im Spiel G^X für ein $X \in \mathcal{P}(\delta)\}$. Nach (1) , (2) ist nun die folgende Funktion wohldefiniert:

$$\begin{array}{rcl} g'_\delta : S & \to & \mathcal{P}(\delta) \\ \sigma & \mapsto & \begin{cases} X & \text{falls } \sigma \text{ eine Gewinnstrategie im Spiel } G^X \\ & \text{für einen der beiden Spieler ist} \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases} \end{array}$$

Nach AD ist g'_δ surjektiv.

Wir benötigen nun noch eine Surjektion $\omega^\omega \twoheadrightarrow S$. Diese erhalten wir aber z.B. folgendermaßen:

$$\begin{array}{rcl} \omega^{<\omega} & \longrightarrow & \omega \\ \emptyset & \longmapsto & 0 \\ \langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle & \longmapsto & p_0^{x_0+1} \dots p_{n-1}^{x_{n-1}+1}, \\ & & \text{wobei } p_k \text{ die } k+1\text{-ste Primzahl ist} \end{array}$$

ist offensichtlich eine Injektion. Daraus erhalten wir eine Surjektion $\varphi : \omega \longrightarrow \omega^{<\omega}$ und damit:

$$\begin{array}{rcl} \phi : \omega^\omega & \longrightarrow & S \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \{\varphi(x(0)), \dots, \varphi(x(n)), \dots\} & \text{falls dies eine Gewinnstrategie in S ist} \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases} \end{array}$$

Schließlich definieren wir dann unser gesuchtes g_δ als $g'_\delta \circ \phi$. □

Korollar 2.2. *Θ ist eine Limeskardinalzahl.*

Beweis: Sei $\lambda < \Theta$. Nach dem Theorem gibt es dann auch eine Surjektion $\omega^\omega \to \mathcal{P}(\lambda)$. Mit Hilfe der Gödel-Pairing Funktion $\lambda \times \lambda \leftrightarrow \lambda$ erhalten wir eine Bijektion $\mathcal{P}(\lambda) \leftrightarrow \mathcal{P}(\lambda \times \lambda)$.
Beh: Die Komposition

$$\begin{array}{rcl} \omega^\omega \to \mathcal{P}(\lambda) \to \mathcal{P}(\lambda \times \lambda) & \to & \lambda^+ \\ R & \mapsto & \begin{cases} \mathrm{otp}(R) & \text{falls R eine Wohlordnung} \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases} \end{array}$$

liefert dann eine Surjektion $\omega^\omega \longrightarrow \lambda^+$.
Bew: Es ist nur zu zeigen, daß die letzte Funktion surjektiv ist. Sei $\alpha < \lambda^+$. Ist $\alpha < \lambda$ so ist die natürliche Wohlordnung von α vom Ordnungstyp α. Ist $\lambda < \alpha < \lambda^+$ so gibt es eine Bijektion $g : \lambda \leftrightarrow \alpha$, und eine Wohlordnung R für λ vom Ordnungstyp α ist gegeben durch die Wohlordnung $\gamma R \delta :\Leftrightarrow g(\gamma) < g(\delta)$. □

Korollar 2.3. $\Theta = \omega_\Theta$

Beweis: Wenn wir für alle $\alpha < \Theta$ gezeigt haben, daß $\omega_\alpha < \Theta$, dann sind wir fertig.
Ausgehend von einer Surjektion $\omega^\omega \twoheadrightarrow \alpha$ definieren wir nun rekursiv eine Folge $\langle g_\xi \mid \xi \leq \alpha \rangle$, so daß $g_\xi : \omega^\omega \twoheadrightarrow \omega_\xi$ eine Surjektion ist.
Sei also $f : \omega^\omega \twoheadrightarrow \alpha$ solch eine Surjektion.
$\xi = 0:$

$$\begin{array}{rcl} g_o : \omega^\omega & \longrightarrow & \omega \\ x & \longmapsto & x(0) \end{array}$$

$\xi = \beta + 1$:
$\omega^\omega \twoheadrightarrow \omega_\beta$ sei schon fest gegeben. Nach Korollar 2.2 lässt sich daraus dann eine Surjektion $\omega^\omega \to \omega_\beta^+ = \omega_{\beta+1}$ konstruieren.
$\xi = \delta, \delta$ Limes:
Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} g_\delta : \omega^\omega &\longleftrightarrow \omega^\omega \times \omega^\omega \longrightarrow \omega_\delta \\ z &\longmapsto (x,y) \qquad \longmapsto \begin{cases} g_{f(x)}(y) & \text{falls definiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

wobei $\omega^\omega \leftrightarrow \omega^\omega \times \omega^\omega$ eine beliebige aber fest gegebene Bijektion ist. z.z.: g_δ ist surjektiv:
Sei $\beta < \omega_\delta$. Da δ Limes ist ω_δ Limeskardinalzahl und die $\langle \omega_\gamma \,|\, \gamma < \delta \rangle$ liegen konfinal in ω_δ, somit gibt es ein $\omega_{\gamma'} > \beta$ mit $\gamma' < \delta \leq \alpha$. Da f surjektiv, gibt es $x \in \omega^\omega$ mit $f(x) = \gamma'$. Weiter ist $g_{\gamma'} : \omega^\omega \twoheadrightarrow \omega_{\gamma'}$ surjektiv, also existiert ein $y \in \omega^\omega$ mit $g_{\gamma'}(y) = \beta$. $\square$

Proposition 2.4 (DC). $cf(\Theta) > \omega$

Beweis: Angenommen $F : \omega \to \Theta$ ist konfinal.
Dann existiert für jedes n eine Surjektion $\omega^\omega \twoheadrightarrow F(n)$.Wegen DC existiert dann eine Folge $\langle h_{F(n)} \,|\, n < \omega \rangle$, wobei $h_{F(n)}$ eine Surjektion von ω^ω nach $F(n)$ ist. Es bleibt zu zeigen, daß

$$\begin{aligned} G : \omega^\omega &\longrightarrow \Theta \\ x &\longmapsto h_{F(x(0))}(\langle x(1), x(2), \dots \rangle) \end{aligned}$$

eine Surjektion ist:
Betrachte also $\alpha \in \Theta$. Da F konfinal ist, existiert ein $n' \in \omega$, so dass $F(n') > \alpha$. Da $h_{F(n')}$ surjektiv auf $F(n')$ existiert $x' \in \omega^\omega$ mit $h_{F(n')}(x') = \alpha$. Damit folgt: $z = \langle n' \rangle^\wedge x' \in \omega^\omega$ liefert $G(z) = \alpha$. $\square$

Proposition 2.5 ($V = L(\mathbb{R})$). Θ *ist regulär.*

Beweis: (1) Es genügt eine Folge $\langle h_\alpha \,|\, 0 < \alpha < \Theta \rangle$ mit $h_\alpha : \omega^\omega \twoheadrightarrow \alpha$ surjektiv zu finden.
Bew: Sei also solch eine Folge gegeben. Angenommen Θ ist nicht regulär, d.h. $\kappa = cf(\Theta) < \Theta$, und sei $\langle \gamma_\beta \,|\, 0 \leq \beta < cf(\Theta) \rangle$ eine konfinale Menge in Θ. Dann ist

$$\begin{aligned} G : \omega^\omega \times \omega^\omega &\longrightarrow \Theta \\ (x,y) &\longmapsto h_{\gamma_{h_{cf(\Theta)}(x)}}(y) \end{aligned}$$

surjektiv:
Sei $\delta < \Theta$, dann existiert $\beta < cf(\Theta)$ mit $\gamma_\beta > \delta$. Da $h_{cf(\Theta)}$ Surjektion $\omega^\omega \twoheadrightarrow \kappa$ gibt es ein $x \in \omega^\omega$ mit $h_\kappa(x) = \beta$. Da h_{γ_β} Surjektion $\omega^\omega \twoheadrightarrow \gamma_\beta$, gibt es ein $y \in \omega^\omega$ mit $h_{\gamma_\beta}(y) = \delta$.

(2) Man kann eine Surjektion $\phi : On \times \omega^\omega \longrightarrow L(\mathbb{R})$ angeben.
Bew: Wir konstruieren induktiv für jedes $\alpha \in On$ eine Surjektion $\pi_\alpha : \lambda_\alpha \times \omega^\omega \longrightarrow L_\alpha(\mathbb{R})$, so daß für $\alpha < \beta \quad \pi_\alpha \subseteq \pi_\beta$.
$\alpha = 0$:
$L_0(\omega^\omega) = tc(\omega^\omega) = \omega^\omega \cup \omega \cup \omega \times \omega \cup [\omega]^2 \cup [\omega]^1$

$$
\begin{aligned}
\pi_0 : 1 \times \omega^\omega \quad &\longrightarrow \quad L_0(\mathbb{R}) \\
(0, x) \quad &\longmapsto \quad \begin{cases} \langle x(n+1) \,|\, n \in \omega \rangle & \text{falls } x(0) = 0), \\ (x(1), x(2)) & \text{falls } x(0) = 1, \\ \{x(1), x(2)\} & \text{falls } x(0) = 2, \\ \{x(1)\} & \text{falls } x(0) = 3, \\ x(1) & \text{falls } x(0) = 4, \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$\alpha = \beta + 1$:
Sei $\pi_\beta : \lambda_\beta \times \omega^\omega \twoheadrightarrow L_\beta(\mathbb{R})$ gegeben.
Seien desweiteren folgende Funktionen fest gewählt:
$f_n : \omega^\omega \leftrightarrow (\omega^\omega)^n \quad \forall n \in \omega$
$g : \omega \twoheadrightarrow \{\text{Formeln}\}$
$h_n : (\lambda_\beta)^n \leftrightarrow \eta_n \quad \forall n \in \omega$ (z.B. die lexikographische Wohlordnung von $(\lambda_\beta)^n$).
Sei $\eta = \sup(\langle \eta_n \,|\, n \in \omega \rangle)$.
Dann definiere

$$
\begin{aligned}
\pi_\alpha : (\lambda_\beta + \eta) \times \omega^\omega &\longrightarrow L_\alpha(\mathbb{R}) \\
(\tau, x) &\longmapsto \pi_\beta(\tau, x) \qquad \text{falls } \tau < \lambda_\beta \\
(\lambda_\beta + \mu, x) &\longmapsto \begin{cases} g(x(0))[\pi_\beta((h^{-1}_{x(1)}(\mu))_1, (f_{x(1)}(x^*))_1), & \\ \dots, \pi_\beta((h^{-1}_{x(1)}(\mu))_n, (f_{x(1)}(x^*))_n)] & \text{falls definiert} \\ \emptyset & \text{sonst,} \end{cases}
\end{aligned}
$$

dabei sei $x^* = \langle x(2), x(3), \dots \rangle$.
Beh: π_α ist surjektiv.
Bew: Sei $A \in L_\alpha(\mathbb{R})$ gegeben durch $\varphi[a_1, \dots, a_n]$ mit $a_1, \dots, a_n \in L_\beta(\mathbb{R})$
Wir müssen μ und x angeben:
$x(0) = g^{-1}(\varphi), x(1) = n;$
Da π_β surjektiv gibt es $\beta_1, \dots, \beta_n < \lambda_\beta$ und $y_1, \dots, y_n \in \omega^\omega$ so , dass $a_1 = \pi_\beta(\beta_1, y_1), \dots, a_n = \pi_\beta(\beta_n, y_n)$.
Setze dann $\mu = \delta_n(\langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle); x* = f_n^{-1}(\langle y_1, \dots, y_n \rangle)$
Man rechnet nach, daß für diese μ, x dann gilt $\pi_\alpha(\lambda_\beta + \mu, x) = A$.

α Limes:
Sei $\lambda_\alpha = \sup\limits_{\beta < \alpha} \lambda_\beta$
Sei $G : \lambda_\alpha \longrightarrow \lambda_\alpha \times \lambda_\alpha$ die Gödel Pairing Funktion :

Dann setze:

$$\begin{aligned}\pi_\alpha : \lambda_\alpha \times \omega^\omega &\longrightarrow L_\alpha(\mathbb{R})\\ (\gamma, x) &\longmapsto \begin{cases}\pi_{G(\gamma)_1}(G(\gamma)_2, x) & \text{falls } G(\gamma)_2 < \lambda_{G(\gamma)_1)}\\ \emptyset & \text{sonst}\end{cases}\end{aligned}$$

Nun kommen wir zur Konstruktion der Folge $\langle h_\alpha \,|\, 0 < \alpha < \Theta\rangle$. Sei

$$\begin{aligned}t : \Theta\backslash\{0\} &\longrightarrow On\\ \alpha &\longmapsto \min\{\gamma \,|\, \exists y \in \omega^\omega \Phi(\gamma, y) \text{ ist Surjektion } \omega^\omega \to \alpha\}\end{aligned}$$

Die h_α seien dann gegeben durch:

$$\begin{aligned}h_\alpha : \omega^\omega &\longrightarrow \alpha\\ x &\longmapsto \begin{cases}\Phi(t(\alpha), (x)_0)((x)_1) & \text{falls } \Phi(t(\alpha), (x)_0) \text{ Abbildung } \omega^\omega \to \alpha\\ \emptyset & \text{sonst}\end{cases}\end{aligned}$$

Beh: h_α ist Surjektion.
Bew: Sei $\beta < \alpha$.
Nach Definition von t gibt es ein $y \in \omega^\omega$ mit $\Phi(t(\alpha), y)$ ist eine Surjektion $\omega^\omega \to \alpha$, somit existiert also ein $z \in \omega^\omega$, so dass $\Phi(t(\alpha), y)(z) = \beta$. □

Korollar 2.6 ($V = L(\mathbb{R})$). *Θ in $L(\mathbb{R})$ ist schwach unerreichbar .*

3 Projektive Ordinalzahlen

Definition 3.1. Sei M eine Menge.
$R \subseteq M \times M$ heißt *Präwohlordnung*, falls R transitiv, reflexiv, konnex und $<_R$ fundiert ist, dabei ist
$x <_R y \Leftrightarrow xRy \wedge \neg yRx$ und $<_R$ fundiert bedeutet: Für jede nichtleere Teilmenge $A \subseteq M$ existiert ein $x \in A$, so daß für alle $y \in A$ nicht $y <_R x$ gilt.

Proposition 3.2. *Sei M Menge. Dann sind äquivalent:*
(1) $R \subseteq M \times M$ ist eine Präwohlordnung.
(2) Es gibt eine Abbildung $\varphi : M \to On$, so daß $xRy \Leftrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$.
Desweiteren gilt: Ist R eine Präwohlordnung, so gibt es eine eindeutige Surjektion $\varphi : M \to \lambda$ für eine Ordinalzahl λ.
Dieses λ heißt Länge der Präwohlordnung, $\lambda = |R| = |<_R|$.

Beweis: (2)⇒(1) Man zeigt leicht, daß die durch φ gegebene Relation eine Präwohlordnung ist.
(1)⇒(2) Man definiert rekursiv die Rangfunktion ρ durch $\rho(x) = \sup(\{\rho(y) + 1 \,|\, y <_R x\})$. Diese ist offensichtlich surjektiv auf eine Ordinalzahl.
Ist τ eine weitere Surjektion auf eine Ordinalzahl, die dieselbe Relation R liefert, dann gibt es x minimal mit der Eigenschaft $\rho(x) \neq \tau(x)$ und sei oBdA $\alpha = \rho(x) < \tau(x)$. Da τ surjektiv, existiert ein $y \in S$ mit $\tau(y) = \alpha < \tau(x)$. Damit gilt also $y <_R x$. Dann gilt aber $\rho(y) = \tau(y) = \alpha$ und ρ liefert damit $y \not<_R x$. Widerspruch, da ρ, τ unterschiedliche Relationen liefern. □

Definition 3.3. $\boldsymbol{\delta}^1_n = \sup\{| <_R | \mid R$ ist Präwohlordnung von $\omega, R \in \boldsymbol{\Delta}^1_n(\omega \times \omega)\}$
Die $\boldsymbol{\delta}^1_n, n \geq 1$, heißen projektive Ordinalzahlen.

Das folgende Theorem fasst einige der Aussagen, die bis Anfang der 70er Jahre über die projektiven Ordinalzahlen unter AD bekannt waren, zusammen (siehe dazu [Kech78]).

Theorem 3.4 (AD+DC). *Die $\langle \boldsymbol{\delta}^1_n \mid 1 < n \in \omega \rangle$ bilden eine strikt aufsteigende Folge meßbarer Kardinalzahlen. Ist n ungerade, so ist $\boldsymbol{\delta}^1_n$ kardinaler Nachfolger einer Kardinalzahl mit Konfinalität ω und $\boldsymbol{\delta}^1_{n+1} = (\boldsymbol{\delta}^1_n)^+$. Weiter gilt: $\boldsymbol{\delta}^1_1 = \omega_1$, $\boldsymbol{\delta}^1_2 = \omega_2$, $\boldsymbol{\delta}^1_3 = \omega_{\omega+1}$, und $\boldsymbol{\delta}^1_4 = \omega_{\omega+2}$ sind die ersten vier regulären überabzählbare Kardinalzahlen.*

Dies hat einige interessante Konsequenzen auch im ZFC Kontext.
Unter der Annahme ZFC + AD$^{L(\mathbb{R})}$ erhalten wir z.B., wenn wir die vierte reguläre überabzählbare Kardinalzahl in $L(\mathbb{R})$ und V vergleichen, daß

$$\boldsymbol{\delta}^1_4 = \omega^{L(\mathbb{R})}_{\omega+2} \leq \omega_4$$

[Beachte, daß reguläre Kardinalzahl zu sein abwärts absolut ist und man zeigen kann, daß ${\boldsymbol{\delta}^1_n}^{L(\mathbb{R})} = \boldsymbol{\delta}^1_n$.]
Wir können also durch Berechnung der projektiven Ordinalzahlen in AD eine Abschätzung für die projektiven Ordinalzahlen in einem ZFC-Modell V erhalten. Dies führt dann zu interessanten Ergebnissen im Hinblick auf das „definierbare Kontinuumsproblem“, d.h.: für bestimmte definierbare Punktklassen (z.B. $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$) können wir Aussagen treffen über mögliche Kardinalitäten, die die Mengen aus dieser Punktklasse besitzen. Wenn wir weiterhin unter ZFC+AD$^{L(\mathbb{R})}$ arbeiten (und AD$^{L(\mathbb{R})}$ gilt unter der Voraussetzung, daß große Kardinalzahlen vorhanden sind!), so liefert uns folgender Satz (vgl.z.B. [Kech78, Theorem 3.4]) eine Anwendung in obigem Sinn:

Satz 3.5 (DC). *Sei $n \in \omega$ und gelte Det($\boldsymbol{\Delta}^1_{2n}$). Dann ist jede $\boldsymbol{\Sigma}^1_{2n+2}$-Menge $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$-Suslin.*

Nun ist eine $\boldsymbol{\Sigma}^1_{2n+2}$-Menge in V auch $\boldsymbol{\Sigma}^1_{2n+2}$ in $L(\mathbb{R})$ und dort, wegen $AD^{L(\mathbb{R})}$, $\boldsymbol{\delta}^1_{2n+1}$-Suslin. Da Nichtfundiertheit absolut ist, gilt diese Suslin-Eigenschaft auch in V. Nach dem Vortrag „Baumdarstellungen von $\boldsymbol{\Pi}^1_1$-Mengen“ wissen wir dann, daß einige Kardinalitäten zwischen $\aleph_0$ und $2^{\aleph_0}$ nicht als Kardinalitäten für $\boldsymbol{\Sigma}^1_{2n+2}$-Mengen auftreten können; z.B. kann für eine $\boldsymbol{\Sigma}^1_4$-Menge A nur gelten:
$\overline{\overline{A}} \in \omega \cup \{\aleph_0 . \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, 2^{\aleph_0}\}$.
Allerdings war zur Zeit, in der obiges Theorem 3.4 bekannt wurde, sogar die Frage, welcher Kardinalzahl $\boldsymbol{\delta}^1_5$ entspricht, unbeantwortet. Erst 1983 bestimmte Jackson die restlichen $\boldsymbol{\delta}^n_1$ und seine Analyse liefert dann, daß unter ZFC + AD$^{L(\mathbb{R})}$ die projektiven Ordinalzahlen kleiner als ω_ω sind. Eine Vermutung von Martin, daß $\boldsymbol{\delta}^1_n \leq \omega_n \;\; \forall n \in \omega$ ist, bleibt aber weiterhin ein ungelöstes Problem. Die Jackson-Analyse gab auch Anlass zur Hoffnung, auf ähnliche Art $L(\mathbb{R})$ für grössere Zahlen als die projektiven Ordinalzahlen zu untersuchen, und dadurch weitere Einblicke in diese abgeschwächte Form des Kontinuumsproblem zu bekommen.

Literatur

[Kan97] Akihiro Kanamori, *The higher infinite*, Perspectives in mathematical logic, Springer 1997.

[Kech78] Alexander S. Kechris, *AD and projective ordinals*, IN: Kechris, Moschovakis (Hrsg.): Cabal Seminar 1976-1977, Lecture notes in mathematics 689, Springer Verlag 1978.

[Mosch70] Yiannis N. Moschovakis, *Determinacy and prewellorderings of the continuum*, IN: Bar-Hillel (Hrsg.): Mathematical logic and foundation of set theory, North-Holland 1970.

[Mosch80] Yiannis N. Moschovakis, *Descriptive set theory*, Studies in logic and the foundations of mathematics Vol. 100, North-Holland 1980.