Die Zeit und ihre Logik

Bertram Kienzle

Bonn, 5. Dezember 2002

Einleitung

- Leitfrage: Warum eigentlich *die* Zeit?

  Teilfrage (a): Gibt es nur eine Zeit?

  Teilfrage (b): Worin besteht ihre eindeutige Bestimmtheit?

- Prinzip der sprachanalytischen Methode
  Man analysiere die Sprache, in der ein Problem formuliert ist, um es zu verstehen und je nachdem zu lösen oder aufzulösen (zum Verschwinden zu bringen).

- Gliederung:

  1 Zeitliche Aussagen
  2 Zwei Arten von Gegenwart
  3 Analoge und digitale Zeitdarstellungen
  4 Flüsse und Inseln

1 Zeitliche Aussagen

Für zeitliche Aussagen gilt das folgende Prinzip:

> Man kann allen zeitlichen Aussagen den Satz-Operator „Es ist der Fall, dass" voranstellen.

Regel für die Veritation

(a) Syntaktischer Teil
Ist α ein Satz, so auch $\ulcorner$Es ist der Fall, dass $\alpha\urcorner$.
(b) Semantischer Teil
$\ulcorner$Es ist der Fall, dass $\alpha\urcorner$ ist an einer Zeitstelle t wahr gdw. α ist an t wahr.

Theorem 1 (Redundanztheorem der Gegenwart)
objektsprachliche Fassung: *Es ist der Fall, dass p, gdw. p.*

Regel für das Präteritum

(a) Syntaktischer Teil
Ist α ein Satz, so auch $\ulcorner$Es war der Fall, dass $\alpha\urcorner$.
(b) Semantischer Teil
$\ulcorner \mathsf{P}\ \alpha\urcorner$ ist an einer Zeitstelle t wahr gdw. es gibt eine Zeitstelle in der Vergangenheit von t, an der α wahr ist.

Regel für das Futur

(a) Syntaktischer Teil
Ist α ein Satz, so auch $\ulcorner$Es wird der Fall sein, dass $\alpha\urcorner$.
(b) Semantischer Teil
$\ulcorner \mathsf{F}\ \alpha\urcorner$ ist an einer Zeitstelle t wahr gdw. es gibt eine Zeitstelle in der Zukunft von t, an der α wahr ist.

Theorem 2 (Augustin) *Alle Zeit ist Gegenwart.*

Theorem 3 (Kant) *Die Gegenwart liegt allen Zeiten zugrunde.*

2 Zwei Arten von Gegenwart

Regel für das Präteritum (Wiederholung)

(b) $\ulcorner \mathsf{P}\,\alpha \urcorner$ ist an t wahr gdw. es gibt eine Zeitstelle in der Vergangenheit von t, an der α wahr ist.

Regel für das Futur (Wiederholung)

(b) $\ulcorner \mathsf{F}\,\alpha \urcorner$ ist an t wahr gdw. es gibt eine Zeitstelle in der Zukunft von t, an der α wahr ist.

Regel für die Veritation (schwache Version)

(b) $\ulcorner$Es ist der Fall, dass $\alpha\urcorner$ ist an t wahr gdw. es gibt eine Zeitstelle in der Gegenwart von t, an der α wahr ist.

Regel für die Veritation (starke Version)

(b) $\ulcorner$Es ist der Fall, dass $\alpha\urcorner$ ist an t wahr gdw. für alle Zeitstellen in der Gegenwart von t gilt, dass α an ihnen wahr ist.

Theorem 4 (Axiomatisierung der Gegenwart) *Die um das Redundanztheorem der Gegenwart* angereicherte *Aussagenlogik ist eine vollständige Axiomatisierung der Gegenwartsrelation.*

Theorem 5 (Nichtredundanz der jetzigen Gegenwart) *„Es ist jetzt der Fall, dass p, gdw. p“ ist nicht zeitlogisch allgemeingültig.*

3 Analoge und digitale Zeitdarstellungen

3.1 Die Syntax von $\mathbf{K_t}$

Definition von G $\mathsf{G} := \neg\mathsf{F}\,\neg$
Definition von H $\mathsf{H} := \neg\mathsf{P}\,\neg$

Der $\mathbf{K_t}$-Kalkül umfasst die gesamte Aussagenlogik mit dem Modus ponens als Schlussregel. Die einschlägigen Axiomenschemata und Regeln von $\mathbf{K_t}$ lauten:

	für H	für G
Verteilungsschema	$\mathsf{H}\,(\alpha \to \beta) \to (\mathsf{P}\,\alpha \to \mathsf{P}\,\beta)$	$\mathsf{G}\,(\alpha \to \beta) \to (\mathsf{F}\,\alpha \to \mathsf{F}\,\beta)$
Mischschema	$\alpha \to \mathsf{H}\,\mathsf{F}\,\alpha$	$\alpha \to \mathsf{G}\,\mathsf{F}\,\alpha$
Regel	Wenn $\vdash_{\mathbf{K_t}} \alpha$, so $\vdash_{\mathbf{K_t}} \mathsf{H}\,\alpha$	Wenn $\vdash_{\mathbf{K_t}} \alpha$, so $\vdash_{\mathbf{K_t}} \mathsf{G}\,\alpha$

3.2 Die Semantik von $\mathbf{K_t}$

Definition 1. „*Zeitordnung*“

> $\langle T,<\rangle$ ist eine Zeitordnung gdw. $T \neq \emptyset$ und $< \subseteq T \times T$, d. h. für alle x und alle y gilt: wenn $\langle x, y\rangle \in <$, dann $x \in T$ und $y \in T$.

Definition 2. „$\mathbf{K_t}$-*Modell*“

> $\langle T, <, \Im\rangle$ ist ein $\mathbf{K_t}$-Modell gdw. $\langle T,<\rangle$ ist eine Zeitordnung und $\Im$ eine Funktion, die jedem Satzbuchstaben aus dem Alphabet von $\mathbf{K_t}$ eine Teilmenge von T zuordnet.

4 Flüsse und Inseln

Definitionen einiger wichtiger Eigenschaften von $<$:

Definition 3. $<$ ist konnex auf T gdw. für alle $t, t' \in T$ gilt:
$t < t'$ oder $t' < t$ oder $t = t'$.

Definition 4. $<$ ist verschmelzungsfrei auf T gdw. für alle $t, t', t'' \in T$ gilt:
wenn $t < t''$ und $t' < t''$, dann $t < t'$ oder $t' < t$ oder $t = t'$.

Definition 5. $<$ ist verzweigungsfrei auf T gdw. für alle $t, t', t'' \in T$ gilt:
wenn $t'' < t$ und $t'' < t'$, dann $t < t'$ oder $t' < t$ oder $t = t'$.

Definition 6. $<$ ist verinselungsfrei auf T gdw. für alle $t, t' \in T$ gilt:
wenn weder $t < t'$ noch $t' < t$, dann gilt $t = t'$ oder es gibt ein $t'' \in T$, derart dass $t'' < t$ und $t'' < t'$, oder es gibt ein $t'' \in T$, derart dass $t < t''$ und $t' < t''$.

Lemma 1 (Drei-Freiheiten-Lemma) *$<$ ist konnex auf T gdw. $<$ ist verschmelzungs-, verzweigungs- und verinselungsfrei auf T.*

Theorem 6 *Die Verschmelzungsfreiheit spiegelt sich in folgender* $\mathbf{K_t}$*-Formel wider:*

$$\mathsf{G}\,p \wedge p \wedge \mathsf{H}\,p \rightarrow \mathsf{G}\,\mathsf{H}\,p$$

Theorem 7 *Die Verzweigungsfreiheit spiegelt sich in folgender* $\mathbf{K_t}$*-Formel wider:*

$$\mathsf{H}\,p \wedge p \wedge \mathsf{G}\,p \rightarrow \mathsf{H}\,\mathsf{G}\,p$$

Theorem 8 *Die Verinselungsfreiheit spiegelt sich in folgender* $\mathbf{K_j}$*-Formel wider:*

$$\mathsf{H}\,p \wedge p \wedge \mathsf{G}\,p \wedge \mathsf{G}\,\mathsf{H}\,p \wedge \mathsf{H}\,\mathsf{G}\,p \rightarrow \mathsf{J}\,p$$