DIPLOMARBEIT

Ultrapotenzen und Boolesche Potenzen

Angefertigt am Mathematischen Institut

vorgelegt der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Juni 2002

von

Tanja Hötte

aus

Unna

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Wie groß können Ultrapotenzen sein? Hat man mit Booleschen Potenzen[1] etwas Neues konstruiert oder sind Boolesche Potenzen immer durch Ultrapotenzen darstellbar?

Die Konstruktion von Modellen mit Ultraprodukten wurde von Skolem in den 1930ern entwickelt und wird seit den Arbeiten von Łoš intensiv genutzt. Boolesche Potenzen wurden Anfang der 70er Jahre unabhängig von Daigeneault [Da 71] und Mansfield [Ma 71] eingeführt, wobei Mansfield wesentlich grundlegender arbeitete.

Kardinalitätsbetrachtungen von Ultrapotenzen kamen in den 60er Jahren des letzten Jahrhunderts auf.

Ultrapotenzen basieren auf Funktionen von einer Indexmenge I in die Grundmenge M einer Struktur $\mathfrak{M}$. Dabei werden zwei Funktionen als gleich betrachtet, wenn sie „fast überall" gleich sind, d.h. auf Werten von einer Teilmenge von I, die in einem vorgegebenen Ultrafilter liegt. Man bildet also Äquivalenzklassen bezüglich des Ultrafilters. Ultrapotenzen können die Grundstruktur bezüglich der Größe echt erweitern (s. Lemma 5.3.4.), aber im Gegensatz zu Forcingerweiterungen kann die Ultrapotenz das Modell nicht inhaltlich ändern. Für Forcingerweiterungen gibt es so etwas wie das Fundamentaltheorem von Łoš (s. Kapitel 5.1) nicht. Einerseits sind Ultrapotenzen dadurch leichter handhabbar, andererseits ist auch nichts wirklich Neues gegenüber dem Grundmodell zu erreichen.

Boolesche Potenzen von einer Menge M, einer Booleschen Algebra B und einem Ultrafilter D auf B basieren auf Partitionen von B, die von M indiziert werden. Dabei werden zwei Partitionsfunktionen als gleich bezüglich des Ultrafilters angesehen, wenn es „genügend wahr" ist, daß sie gleich sind (d.h.

[1]Boolesche Potenzen werden in der Literatur meist Boolesche Ultrapotenzen genannt; da ich aber Ultrapotenzen und Boolesche Ultrapotenzen vergleiche, ist meine Sprechweise hier eindeutiger.

wenn das Element von B, auf dem sie gleich sind, in D liegt). Allerdings kommt es dabei nicht nur auf die erzeugte Partition an; falls zwei Partitionsfunktionen dieselbe Partition induzieren, sie aber unterschiedlich indizieren, können diese Partitionsfunktionen durchaus ungleich sein. Elemente m von M werden in einer Booleschen Potenz jeweils durch die Funktion $\breve{m} : M \to B$ mit $\breve{m}(m) = 1$ und $\breve{m}(m') = 0$ für $m \neq m'$ „bewahrt".

Auch bei Booleschen Potenzen werden also Äquivalenzklassen bezüglich des Filters gebildet. Man kann Ultrapotenzen sogar als Boolesche Potenzen auffassen, indem man die Indexmenge durch ihre Potenzmengenalgebra ersetzt (Abschnitt 6.2). Anfänglich war es unklar, ob Boolesche Potenzen mehr sind als eine andere (und kompliziertere) Schreibweise für Ultrapotenzen. In ihrem Artikel [KbKo 76] zeigen Koppelberg und Koppelberg allerdings, daß es echte Boolesche Potenzen gibt, d.h. solche, die nicht äquivalent zu einer Ultrapotenz sind. Durch dieses Ergebnis ist klar, daß es nicht möglich ist, Resultate, die man mit Hilfe der Booleschen Potenzen erhalten hat, einfach auf Ultrapotenzen zu übertragen.[2] Lange erweitert das Koppelbergsche Beispiel in [La 78] auf alle $B_\mu, \mu > \omega$,[3] und erhält darüberhinaus das Ergebnis, daß gerade die Booleschen Algebren, die Beispiele für echte Boolesche Potenzen liefern, sich auch als Beispiele für unechte Boolesche Potenzen anbieten (s. [La 78], Satz 2.1.7). Dabei geht es um Beispiele, bei denen man zu einer (nicht zu einfachen) Booleschen Potenz eine isomorphe Ultrapotenz sucht; wenn man hingegen zu einer Ultrapotenz eine Boolesche Algebra sucht, betrachtet man einfach die Boolesche Potenz der Potenzmengenalgebra (s. Abschnitt 6.2).

In der Modelltheorie kann man mit Hilfe von Ultrapotenzen beispielsweise Nonstandardmodelle der Analysis konstruieren. Da sie mit dem Satz von Łoš elementar äquivalent zum Ursprungsmodell (z.B. den reellen Zahlen) sind, kann man alle dort definierten Operationen übertragen, so daß Ultrapotenzen sehr leicht zu handhaben sind. Sie haben allerdings den Nachteil, daß sie nicht konstruktiv sind, weil für den Beweis der Existenz eines Ultrafilters das Auswahlaxiom benötigt wird.

Die Größe einer Ultrapotenz hängt von ihren drei Bestandteilen ab: der Grundmenge, der Indexmenge und dem Ultrafilter. Während von Grund- und Indexmenge nur die Mächtigkeit eingeht, spielen die Eigenschaften des Ultrafilters eine entscheidende Rolle.

Reguläre Ultrafilter erzeugen 'maximale' Ultrapotenzen, die in dem Sinne maximal sind, daß man zu jeder gegebenen Kardinalzahl eine Ultrapotenz

[2] Z.B. hat Mansfield in [Ma 71] einen neuen Beweis des Ultrapotenz-Isomorphiesatzes von Keisler und Shelah gegeben; vgl. auch Lange [La 78].

[3] B_μ ist eine spezielle Boolesche Algebra; der Vervollständigung der freien Booleschen Algebra auf μ Generatoren (vgl. Abschnitt 3.4).

mit einem regulären Ultrafilter konstruieren kann, der mindestens ebensogroß ist. Außerdem haben Ultrapotenzen mit maximal regulären Filtern reguläre Kardinalität (s. Satz 5.2.4). Meßbare Ultrafilter erzeugen hingegen eher kleine Ultrapotenzen (wenn die Struktur klein ist und die Menge, auf der der Filter lebt, meßbar, bleibt die resultierende Ultrapotenz so groß wie die Struktur). Allgemein kann man sagen, daß jede Kardinalzahl κ, die Kardinalität einer Ultra- oder auch Booleschen Potenz mit einem regulären Ultrafilter ist, der Bedingung $\kappa^\omega = \kappa$ genügt.

Kann man eine Potenz einer unerreichbaren Kardinalität erhalten? Für Ultrapotenzen ist dieses Problem bisher nur unter Annahme einer superkompakten Kardinalzahl gelöst (s. [Sh 99]), für Boolesche Potenzen hat Mansfield jedoch ein Beispiel konstruiert (s. [Ma 71] bzw. Abschnitt 6.4), das ohne diese Voraussetzung auskommt. Für Boolesche Potenzen von ω hat Lange in [La 78] sogar alle Kardinalitäten angegeben (s. Satz 6.3.6), die erreicht werden können.

Meine Arbeit teilt sich in zwei Themenbereiche: zum einen gebe ich eine Einführung in Ultrapotenzen und Boolesche Potenzen und untersuche sie im Hinblick auf ihre Größen. Zum anderen gebe ich eine Boolesche Potenzen an, die nicht isomorph zu einer Ultrapotenz sind.

ZFC setze ich für die gesamte Arbeit voraus. Wenn das Auswahlaxiom (AC) direkt in einen Beweis eingeht, werde ich zudem explizit darauf hinweisen.

Im zweiten Kapitel werden grundlegende Begriffe und Notationen zur Verfügung gestellt.

In Kapitel 3 geht es um die Einführung von Booleschen Algebren. Die Abschnitte 3.2 bis 3.4 führen das Thema weiter, wobei Vervollständigungen von freien Booleschen Algebren die Beispiele für Mansfields Konstruktion in 6.4 und die echten Booleschen Potenzen in Kapitel 7 liefern.

Filter sind in meiner Arbeit ein so wichtiges Werkzeug, daß ich sie in einem eigenen Kapitel behandle (Kapitel 4). Hier werden Definitionen zusammengestellt und Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Filtereigenschaften beleuchtet. Dabei spielen $<\delta$-vollständige Filter und δ-reguläre Filter eine besondere Rolle.[4] Ein eigener Abschnitt beschäftigt sich mit dem engen Zusammenhang zwischen absteigender Unvollständigkeit und Zerlegbarkeit von Filtern.

Gute Ultrafilter (Abschnitt 4.5) lassen sich nicht so kurz und einfach definieren wie die anderen Arten von Filtern; deshalb sind sie auch schwieriger

[4]In der Einleitung und in den Einleitungstexten der einzelnen Kapitel werde ich meist das „δ-“ zur besseren Lesbarkeit weglassen.

zu handhaben. Daher gebe ich in diesem Abschnitt nicht viel mehr als die Definition von guten Ultrafiltern an.

Mit dem 5. Kapitel beginnt der Hauptteil meiner Arbeit; es werden Ultraprodukte und Ultrapotenzen eingeführt. Dabei bilden einige grundlegende Sätze, wie das Fundamentaltheorem von Łoš (5.1.4) und das Expansionstheorem (5.1.3), den Anfang der Untersuchung. Bei den Betrachtungen der Größen von Ultrapotenzen über unendlichen Strukturen in Abschnitt 5.2 finden die Fälle einer Ultrapotenz mit δ-regulärem bzw. $<\delta$-vollständigem Ultrafilter besondere Beachtung.

In Abschnitt 5.3 geht es neben einem stärkeren Fundamentaltheorem (5.3.2) um einen erweiterten Kompaktheitssatz (5.3.3).

In Kapitel 4.5 wurde der Begriff eines guten Ultrafilters eingeführt, ohne deren Existenz nachzuweisen. Das wird nun in Abschnitt 5.4 nachgeholt. Hier wird Kunens Konstruktion vorgestellt, die Ultrapotenzen benutzt; im nächsten Kapitel werden gute Ultrafilter mittels Boolescher Potenzen konstruiert. Einige Saturiertheitsergebnisse, die in Abschnitt 5.5 dargestellt werden, sind Anwendungsbeispiele für gute Ultrafilter.

Zum Abschluß des Kapitels gebe ich einen Überblick über die bisherigen Ergebnisse bezüglich möglicher Größen von Ultrapotenzen und Booleschen Potenzen (Abschnitt 5.6).

Parallel zur Konstruktion der Ultrapotenzen werden im 6. Kapitel Boolesche Potenzen eingeführt. Dabei läßt sich ein zum Fundamentaltheorem von Łoš (5.1.4) analoges Fundamentaltheorem formulieren (6.1.6). In Abschnitt 6.2 werden Ultrapotenzen als Spezialfälle von Booleschen Potenzen dargestellt.

Allgemeine Größenbetrachtungen von Ultrapotenzen kann man zum Teil auf Boolesche Potenzen übertragen; in Abschnitt 6.3 stelle ich zwei dieser Ergebnisse vor. Während man über Größen von Ultrapotenzen von ω nur vage Angaben machen kann (Satz 5.2.12), lassen sich die Größen von Booleschen Potenzen von ω genau bestimmen (Satz 6.3.6).

Mansfields Konstruktion eines κ-guten Ultrafilters (Abschnitt 6.4) bedient sich eines speziellen Beispiels und wird dementsprechend auf anderem Wege durchgeführt als Kunens allgemeineres Resultat. Auch hier erhält man (allerdings nur für das spezielle Beispiel) Ergebnisse über Saturiertheit von Strukturen.

Das letzte Kapitel klärt die Frage, ob es „echte“ Boolesche Potenzen gibt, die nicht isomorph zu einer Ultrapotenz sind. Im ersten Abschnitt wird eine Konstruktion dargestellt, die mit ZFC auskommt, dafür aber eine vergleichsweise große Grundstruktur benötigt. Im zweiten Abschnitt liegt die Präferenz auf möglichst kleinen Strukturen (ω bzw. ω_1), dafür werden aber stärkere Voraussetzungen ($\neg 0^\sharp$ bzw. LCH)in Kauf genommen.

Danken möchte ich Prof. Dr. Peter Koepke für die Betreuung meiner Arbeit und Dr. Bernd Koppelberg für die Anregung zu diesem Thema. Besonderer Dank gebührt Manfred Burghardt für seine ständige Bereitschaft, sich intensiv mit meinen Fragen auseinanderzusetzen. Des weiteren danke ich Kathrin Fornet-Ponse, meiner Schwester Heike, Luitgard Mayer, Miriam Ossa und Rainer Osswald fürs Korrekturlesen.

Kapitel 2

Präliminarien

In diesem Kapitel werden zunächst einige grundlegende Begriffe eingeführt und Ergebnisse dargestellt, die in der Arbeit verwendet werden.

Abschnitt 2.1 dient zur Festlegung der Notation, da sie in der Literatur nicht einheitlich ist.

In Abschnitt 2.2 werden einige Sätze und Resultate zitiert, die im Rahmen dieser Arbeit nicht bewiesen werden.

Abschnitt 2.3 enthält den Nachweis, daß eine Menge der Kardinalität α 2^α viele unabhängige Teilmengen enthält. Dieses Ergebnis wird in 5.4 für die Existenz eines guten Ultrafilters benötigt.

Schließlich werden in Abschnitt 2.4 einige topologische Begriffe in Erinnerung gerufen.

2.1 Modelltheoretische Notationen

Zuerst einige grundlegende Beziehungen zwischen Modellen:

Sei $\mathfrak{L}$ eine Sprache erster Stufe.

Definition 2.1.1 *Sei Σ eine Menge von Sätzen von $\mathfrak{L}$. Die Struktur $\mathfrak{A}$ ist ein* **Modell** *von Σ, $\mathfrak{A} \models \Sigma$, wenn jeder Satz $\varphi \in \Sigma$ in $\mathfrak{A}$ wahr ist.*

Die Menge Σ heißt **erfüllbar***, wenn sie mindestens ein Modell hat.*

Seien $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ und $\mathfrak{B} = \langle B, \ldots \rangle$ Strukturen von $\mathfrak{L}$. $\mathfrak{A}$ ist **elementar äquivalent** zu $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, wenn jeder Satz φ aus $\mathfrak{L}$ in $\mathfrak{A}$ genau dann wahr ist, wenn φ in $\mathfrak{B}$ wahr ist.

$\mathfrak{A}$ ist ein **elementares Submodell** von $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, wenn $A \subseteq B$ und für jede Folge $a_0, a_1, \ldots$ in A, die erweiterten Modelle $(\mathfrak{A}, a_0, a_1, \ldots)$ und $(\mathfrak{B}, a_0, a_1, \ldots)$ elementar äquivalent sind.

$\mathfrak{A}$ ist **elementar einbettbar** in $\mathfrak{B}$, wenn $\mathfrak{A}$ zu einem elementaren Submodell von $\mathfrak{B}$ isomorph ist.

Wir schreiben $\mathfrak{A} \prec\!\!\prec \mathfrak{B}$, wenn es für jede (auch überabzählbare) Folge $R'_0, R'_1, \ldots$ von endlichstelligen Relationen über A Relationen $S'_0, S'_1, \ldots$ über B gibt, so daß für die erweiterten Modelle $(\mathfrak{A}, R'_0, R'_1, \ldots) \equiv (\mathfrak{B}, S'_0, S'_1, \ldots)$ gilt.

Sei X eine Teilmenge von A. Sei für jedes $a \in X$ c_a eine neue Konstante. Dann ist $\mathfrak{L}_X$ die Sprache $\mathfrak{L} \cup \{c_a | a \in X\}$ und $\mathfrak{A}_X = (\mathfrak{A}, a)_{a \in X}$ die Erweiterung von $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{L}_X$.

Die Theorie von $\mathfrak{A}$, $Th(\mathfrak{A})$, ist die Menge aller $\mathfrak{L}$-Sätze, die in dem Modell $\mathfrak{A}$ gelten.

Definition 2.1.2 *Ein Modell $\mathfrak{A}$ ist κ-**saturiert**, wenn für jede Menge $Y \subseteq A$ mit $\mathrm{card}(Y) < \kappa$ gilt, daß jede Menge $\Gamma(x)$ von Formeln von $\mathfrak{L}_Y$ mit nur einer freien Variablen x, die konsistent mit $Th(\mathfrak{A}_Y)$ ist, in $\mathfrak{A}_Y$ realisiert wird.*

Definition 2.1.3 *Ein Modell $\mathfrak{M}$ ist saturiert, wenn es $\mathrm{card}(M)$-saturiert ist.*

2.2 Miscellanea

Definition 2.2.1 *Eine Familie von Mengen $(A_i | i \in I)$ heißt Δ-**System** (mit **Wurzel** d), falls gilt*

$$\forall i, j \in I (i \neq j \rightarrow A_i \cap A_j = d).$$

Satz 2.2.2 *(Allgemeiner Δ-System-Satz) Seien $\kappa < \lambda$ Kardinalzahlen. Dabei sei λ regulär und es gelte $\mathrm{card}(\alpha)^{\mathrm{card}(\beta)} < \lambda$ für alle $\alpha < \lambda$ und für alle $\beta < \kappa$. Sei $(A_i | i \in I)$ eine Familie und es gelte $\mathrm{card}(I) \geq \lambda$ sowie $\mathrm{card}(A_i) < \kappa$ für alle $i \in I$.*

Dann existiert ein $J \subseteq I$ mit $\mathrm{card}(J) \geq \lambda$, so daß $(A_i | i \in J)$ ein Δ-System ist.

Für den Beweis s. [BK 96], S. 95f.

Satz 2.2.3 *(Lemma von König) Sei ϑ eine unendliche Kardinalzahl und für $i < \vartheta$ seien κ_i, λ_i unendliche Kardinalzahlen mit $\kappa_i < \lambda_i$. Dann gilt*

$$\sum_{i<\theta} \kappa_i < \prod_{i<\vartheta} \lambda_i.$$

Für den Beweis s. [BK 96], S. 87.

Korollar 2.2.4 *Sei λ eine unendliche Kardinalzahl und κ eine Kardinalzahl, $\kappa \geq 2$. Dann gilt* $\mathrm{cf}(\kappa^\lambda) > \lambda$.

Beweis:
Angenommen, es gilt $\mathrm{cf}(\kappa^\lambda) \leq \lambda$. Dann gibt es in κ^λ eine konfinale Menge $\{\alpha_\eta | \eta < \lambda\}$. Wegen $\mathrm{card}(\alpha_\eta) < \kappa^\lambda$ folgt:

$$\begin{aligned}
\kappa^\lambda &= \mathrm{card}(\kappa^\lambda) \\
&= \mathrm{card} \bigcup_{\eta<\lambda} \alpha_\eta \\
&\leq \mathrm{card}\left(\bigcup_{\eta<\lambda} \alpha_\eta \times \{\eta\} \right) \\
&= \sum_{\eta<\lambda} \mathrm{card}(\alpha_\eta) \\
&< \prod_{\eta<\lambda} \kappa^\lambda, \text{ nach Satz 2.2.3:} \\
&= (\kappa^\lambda)^\lambda \\
&= \kappa^\lambda,
\end{aligned}$$

Widerspruch. □

Satz 2.2.5 *(Isomorphiesatz) Wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ elementar äquivalente saturierte Strukturen gleicher Mächtigkeit sind, so ist $\mathfrak{A}$ isomorph zu $\mathfrak{B}$.*

Für den Beweis s. [Po 81] S. 141.

Eine Wohlordnung R über einer Menge X hat den **Ordnungstyp** α, wenn es eine bijektive Funktion $f : X \to \alpha$ gibt, so daß aus xRy folgt $f(x) \leq f(y)$.

Eine Kardinalzahl κ ist eine **Nachfolgerkardinalzahl**, wenn es eine Kardinalzahl λ gibt, so daß $\kappa = \lambda^+$.

Andernfalls ist κ eine **Limeskardinalzahl**.

Die **Konfinalität** einer Kardinalzahl κ ist die kleinste Kardinalität einer Menge, die unbeschränkt in κ liegt.

Definition 2.2.6 *Eine Kardinalzahl κ heißt* **starke Limeskardinalzahl**, *wenn für alle Kardinalzahlen $\lambda < \kappa$ gilt $2^\lambda < \kappa$.*

Satz 2.2.7 *Sei κ eine starke Limeskardinalzahl mit $\kappa > \mathrm{cf}(\kappa) > \omega$. Dann gilt $\kappa^\omega = \kappa$.*

Beweis:
Es ist $\kappa^\omega = \{f | f : \omega \to \kappa\}$. Da κ überabzählbar ist, sind die Funktionen f

jeweils beschränkt in κ, also

$$\{f : \omega \to \kappa\} = \bigcup_{\lambda<\kappa} \{f : \omega \to \lambda\}.$$

Also gilt

$$\kappa^\omega = \sum_{\lambda<\kappa} \lambda^\omega \leq \sum_{\lambda<\kappa} \lambda^\lambda = \sum_{\lambda<\kappa} 2^\lambda.$$

Da κ eine starke Limeskardinalzahl ist, gilt für $\lambda < \kappa$, daß $2^\lambda < \kappa$, das heißt,

$$\kappa^\omega \leq \sum_{\lambda<\kappa} 2^\lambda \leq \kappa.$$

$\square$

GCH, die generelle Kontinuumshypothese, besagt, daß für alle ξ gilt $2^{\aleph_\xi} = \aleph_{\xi+1}$. Die GCH impliziert, daß jede Limeskardinalzahl eine starke Limeskardinalzahl ist.

Definition 2.2.8 *Eine starke Limeskardinalzahl, die regulär ist, heißt* **unerreichbar**.

Im folgenden wird der Begriff „direkter Limes“ definiert:[1]
Sei $\mathfrak{L}$ eine Sprache 1. Stufe. Sei I eine Menge mit einer partiellen Ordnung $\leq$. I heißt **gerichtet**, wenn für alle $i, j \in I$ ein $k \in I$ existiert, so daß $i \leq k$ und $j \leq k$.

Definition 2.2.9 *Sei I eine gerichtete Menge und*

$$\mathcal{A} := \{\mathfrak{A}_i | i \in I\} \cup \{\varphi_{ij} | i \leq j, i, j \in I\},$$

so daß die $\mathfrak{A}_i$ $\mathfrak{L}$-Strukturen sind und

1. *φ_{ii} =id die Identität auf $\mathfrak{A}_i$ ist,*
2. *für $i \leq j$ ist $\varphi_{ij} : \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{A}_j$ ein Homomorphismus und*
3. *für $i \leq j \leq k$ gilt $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$.*

Dann heißt $\mathcal{A}$ ein **gerichtetes System von Strukturen**.

Definition 2.2.10 *Sei $\mathcal{A}$ ein gerichtetes System von Strukturen wie in Definition 2.2.9. Dann heißt*

$$\mathcal{B} := \{\mathfrak{A}\} \cup \{\varphi_i | i \in I\}$$

genau dann ein **direkter Limes** *von $\mathcal{A}$, wenn $\mathfrak{A}$ eine $\mathfrak{L}$-Struktur ist und folgendes gilt*

---

[1] s. auch [Kr 72], S. 100f.

1. *für jedes $i \in I$ ist die Funktion $\varphi_i : \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{A}$ ein Homomorphismus,*

2. *für $i \leq j$, $i, j \in I$ gilt $\varphi_i = \varphi_j \circ \varphi_{ij}$ und*

3. *angenommen, für jedes $i \in I$ ist die Funktion $\psi_i : \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{B}$ ein Homomorphismus, so daß für $i \leq j$, $i, j \in I$ gilt $\psi_j \circ \psi_{ij} = \psi_i$. Dann gibt es einen eindeutigen Homomorphismus $\psi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, so daß für jedes $i \in I$ gilt $\psi_i = \psi \circ \varphi_i$.*

2.3 Unabhängige Mengen und ein Satz von Hausdorff

Unabhängige Mengen werden für den Nachweis der ccc für freie Boolesche Algebren (Abschnitt 3.3) und Kunens Konstruktion eines guten Ultrafilters in Abschnitt 5.4 benötigt. Für letztere muß es möglich sein, in einer Menge der Kardinalität α mindestens 2^α unabhängige Teilmengen zu finden. Das hat Hausdorff in [Ha 36] elegant gezeigt. Dieser Beweis wird im folgenden dargestellt.

Sei $\mathcal{S}_\omega(\beta)$ die Menge aller endlichen Teilmengen von β.

Definition 2.3.1 *Sei A eine Menge. Eine Familie $\mathcal{X}$ von Teilmengen von A heißt* **unabhängig**, *wenn für alle disjunkten endlichen nichtleeren Teilmengen $\{X_1, \ldots, X_p\}$ und $\{X'_1, \ldots, X'_q\}$ von $\mathcal{X}$ gilt*

$$X_1 \cap \ldots \cap X_p \cap (A \setminus X'_1) \cap \ldots \cap (A \setminus X'_q) \neq \emptyset.$$

Lemma 2.3.2 *Wenn es für eine Menge A mit Kardinalität α β-viele unabhängige Teilmengen gibt, so auch für jede Menge B mit $\mathrm{card}(B) = \alpha$.*

Beweis:
Sei A eine Menge mit β unabhängigen Teilmengen und $\mathrm{card}(A) = \alpha$. Sei B eine Menge mit $\mathrm{card}(B) = \alpha$. Dann gibt es eine bijektive Funktion $f : A \to B$. Sei $\mathcal{X}$ die Familie der Kardinalität β von unabhängigen Teilmengen von A.

Definiere eine Familie $\mathcal{Y} := \{f\text{"}X | X \in \mathcal{X}\}$. Die Familie $\mathcal{Y}$ ist unabhängig: Seien $Y_1, \ldots, Y_p, Y'_1, \ldots, Y'_q$ aus $\mathcal{Y}$, $p, q < \omega$.

Es gilt

$$X_1 \cap \ldots \cap X_p \cap (A \setminus X'_1) \cap \ldots \cap (A \setminus X'_q) \neq \emptyset,$$

also auch

$$\begin{aligned}&f\text{"}X_1 \cap \ldots \cap f\text{"}X_p \cap f\text{"}(A \setminus X_1') \cap \ldots \cap f\text{"}(A \setminus X_q') \\ &\qquad = Y_1 \cap \ldots \cap Y_p \cap (B \setminus Y_1') \cap \ldots \cap (B \setminus Y_q') \neq \emptyset.\end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{Y}$ unabhängig. □

Die folgende Definition ist nur für diesen Abschnitt relevant; wird aber in Hausdorffs Beweis von Satz 2.3.5 benötigt.

Definition 2.3.3 *Sei A eine Menge, $\delta \subseteq A^A$. Die Funktionen in δ heißen* **wesentlich veschieden**, *wenn es für alle $f_1, \ldots, f_k \in \delta$, $k \in \omega$, ein $a \in A$ gibt, so daß für $1 \leq i < j \leq k$ gilt $f_i(a) \neq f_j(a)$.*

Folgenden Satz haben Fichtenholz und Kantorovich in [FiKant 35] bewiesen, Hausdorff zufolge jedoch „ziemlich umständlich"[2], so daß ich mich hier nach dem „sehr viel einfacheren"[3] Beweis von Hausdorff in [Ha 36] richte.

Satz 2.3.4 *(Fichtenholz, Kantorovich) Für jede Kardinalzahl $\alpha \geq \omega$ gibt es eine Menge A mit $\mathrm{card}(A) = \alpha$, so daß es 2^α wesentlich verschiedene Abbildungen in A^A gibt.*

Beweis:
Sei M eine Menge mit $\mathrm{card}(M) = \alpha$ und $A := \mathcal{S}_\omega(M)$. Dann gilt auch $\mathrm{card}(A) = \alpha$. Für jedes $t \in \mathfrak{P}(M)$ definiere $f_t : A \to A$ durch

$$f_t(a) := a \cap t.$$

Diese 2^α Abbildungen sind wesentlich verschieden: Seien $t_1, \ldots, t_k \in \mathfrak{P}(M)$ paarweise verschieden. Es gilt für $1 \leq i < j \leq k$

$$(t_i \setminus t_j) \cup (t_j \setminus t_i) \neq \emptyset.$$

Also kann ich ein $a_{ij} \in (t_i \setminus t_j) \cup (t_j \setminus t_i)$ wählen. Sei

$$a := \{a_{ij} | 1 \leq i < j \leq k\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} f_{t_i}(a) &= a \cap t_i = \{a_{nm} | a_{nm} \in t_i\} \\ &\neq \{a_{nm} | a_{nm} \in t_j\} = a \cap t_j = f_{t_j}(a), \end{aligned}$$

da jedes a_{ij} entweder in t_i oder in t_j liegt. □

Spezialfälle des folgenden Satzes sind bereits in [FiKant 35] bewiesen worden, nämlich die Fälle $\alpha = \aleph_0$ und $\alpha = 2^{\aleph_0}$.

[2][Ha 36], S. 18.
[3]ebenda

Satz 2.3.5 *(Hausdorff [Ha 36]) Jede Menge der Kardinalität $\alpha \geq \omega$ enthält 2^α unabhängige Teilmengen.*

Beweis:
Sei M eine Menge mit $\mathrm{card}(M) = \alpha$. Sei $A := \mathcal{S}_\omega(M)$. Mit Satz 2.3.4 gibt es in A^A mindestens 2^α wesentlich verschiedene Abbildungen f_t.

Sei $B := \mathcal{S}_\omega(A)$ und $C := A \times B$. Es gilt $\mathrm{card}(B) = \mathrm{card}(C) = \alpha$. Für $t \in 2^\alpha$ definiere

$$Z_t := \{(x, y) \in C | f_t(x) \in y\}.$$

Dann gilt

$$C \setminus Z_t = \{(x, y) \in C | f_t(x) \notin y\}.$$

Die Familie $\{Z_t | t \in 2^\alpha\}$ ist unabhängig: Seien $p, q < \omega$ und $\{t_1, \ldots, t_p\}$, $\{t'_1, \ldots, t'_q\} \subseteq 2^\alpha$ disjunkt. Da die f_t wesentlich verschieden sind, gibt es ein x, so daß die $p + q$ Bilder

$$x_i := f_{t_i}(x) \text{ und } x'_j := f_{t'_j}(x)$$

für $1 \leq i \leq p$ und $1 \leq j \leq q$ alle verschieden sind. Für $y := \{x_1, \ldots, x_p\}$ gilt dann

$$f_{t_i}(x) \in y \text{ und } f_{t'_j}(x) \notin y,$$

also

$$(x, y) \in Z_{t_1} \cap \ldots \cap Z_{t_p} \cap (C \setminus Z_{t'_1}) \cap \ldots \cap (C \setminus Z_{t'_q}) \neq \emptyset.$$

Also gilt der Satz mit Lemma 2.3.2. □

2.4 Topologische Grundbegriffe

Für die topologische Darstellung von Booleschen Algebren benötigt man die folgenden Begriffe.

Definition 2.4.1 *Eine* **Topologie** *auf einem Raum X ist eine Menge $\tau \subseteq \mathfrak{P}(X)$, die folgende Bedingungen erfüllt:*

1. *$\emptyset, x \in \tau$,*
2. *für $a_0, \ldots, a_n \in \tau$ gilt $\bigcap_{0 \leq i \leq n} a_i \in \tau$ und*
3. *für jedes $A \subseteq \tau$ gilt $\bigcup A \in \tau$.*

Die Elemente von τ heißen **offen**.

Wenn $\tau = \mathfrak{P}(X)$ so nennt man τ die **diskrete Topologie**.

Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Menge $a \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, wenn $\neg a \in \tau$ ist, d.h. das Komplement von a ist offen. Ist eine Menge offen und abgeschlossen, so nennt man sie **clopen** (closed and open). Der Abschluß von $a \subseteq X$ ist die kleinste abgeschlossene Obermenge von a, das Innere von a die größte offene Teilmenge von a. Für $a \subseteq X$ ist ra, das Innere des Abschlusses von a, die **Regularisierung** von a. Eine Menge $a \subseteq X$ heißt **regulär offen**, wenn $ra = a$.

Definition 2.4.2 *Eine* **Basis einer Topologie** τ *ist eine Teilmenge* $B \subseteq \tau$*, so daß jedes Element von* τ *als Vereinigung von Elementen aus* B *dargestellt werden kann.*

Definition 2.4.3 *Sei* (X, τ) *ein topologischer Raum. Eine Teilmenge* S *von* τ *heißt* **Subbasis** *von* τ*, wenn die Menge*

$$S' = \{s_1 \cap \ldots \cap s_n | n \in \mathbb{N}, s_i \in S\}$$

eine Basis von τ *ist.*

Definition 2.4.4 *Angenommen,* $((S_i, \tau_i)|i \in I)$*, ist eine Familie von topologischen Räumen. Sei*

$$S = \{\prod_I W_i | W_i = S_i \textit{ für alle bis auf höchstens ein } i, \textit{ und } W_i \subseteq S_i \textit{ offen } \}.$$

Dann wird die Topologie τ *auf* $\prod_I S_i$*, für die* S *eine Subbasis ist, die* **Produkttopologie** *genannt, und* $(\prod_I S_i, \tau)$ *heißt der* **Produktraum** *der Räume* $((S_i, \tau_i)|i \in I)$*.*

Satz 2.4.5 *Sei* $\prod_I (S_i, \tau_i)$ *der Produktraum einer Familie von Räumen* $((S_i, \tau_i)|i \in I)$*. Setze*

$$B = \{\prod_I V_i | V_i \textit{ offen in } S_i \textit{ und } V_i = S_i \textit{ für fast alle } i\}.$$

Dann ist B *eine Basis für* τ*.*

Beweis:
Sei S Subbasis für τ wie in Definition 2.4.4. Dann erhalte ich eine Basis für τ, indem ich alle endlichen Schnitte von Elementen von S bilde. Angenommen,

$U_1, \ldots, U_n$ sind Elemente von S mit $U_k = \prod_I W_i$ mit $W_i = S_i$ für alle $i \in I$ außer vielleicht $i = i_k$, $k = 1, \ldots, n$. Dann

$$U_1 \cap \ldots \cap U_n = \prod_I V_i,$$

wobei $V_i = S_i$ außer vielleicht für $i_1, \ldots, i_n$. Das heißt, das jedes Element der Basis, die von S abgeleitet wird, auch Element von B ist; aber jedes Element von B ist der Schnitt von endlich vielen Elementen von S. Also ist B eine Basis für τ. $\square$

Kapitel 3

Boolesche Algebren

In diesem Kapitel wird in die Theorie Boolescher Algebren eingeführt. Aus diesen werden in Kapitel 6 Boolesche Potenzen konstruiert. Wichtig sind dafür insbesondere Partitionen von Booleschen Algebren.

Zur Konstruktion eines guten Ultrafilters braucht man disjunktifizierbare Funktionen (Abschnitt 6.4).

Boolesche Algebren lassen sich dann einfacher handhaben, wenn sie die ccc haben; diese nützliche Eigenschaft kommt immer wieder vor.

Die Konstruktion von Subalgebren (3.2) wird hauptsächlich in Kapitel 7 betrieben; dort werden insbesondere Ketten von Subalgebren gebildet.

Freie Boolesche Algebren werden in Abschnitt 3.3 eingeführt, um im nächsten Abschnitt ihre Vervollständigungen betrachten zu können.

Vervollständigungen von freien Booleschen Algebren (Abschnitt 3.4) liefern die Beispiele für eine Boolesche Potenz mit gutem Ultrafilter (6.4) und eine echte Boolesche Potenz. Sie sind auch deswegen so hilfreich, weil sie die ccc erfüllen (mit Satz 3.3.5). Das zentrale Ergebnis ist Lemma 3.4.2. Es besagt, daß eine spezielle Kette von Subalgebren wieder die Ursprungsalgebra ergibt.

3.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

Definition 3.1.1 *Eine* **Boolesche Algebra** *ist eine Struktur*

$$\mathfrak{B} = (B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$$

mit zwei binären Operationen $\vee$ und $\wedge$, einer einstelligen Operation $\neg$ und zwei ungleichen Elementen 0 und 1, so daß für alle $p, q, r \in B$ folgende Eigenschaften gelten

1. $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$ *und* $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$.

2. *$p \vee q = q \vee p$ und $p \wedge q = q \wedge p$.*

3. *$p \vee (p \wedge q) = p$ und $p \wedge (p \vee q) = p$.*

4. *$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ und $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.*

5. *$p \vee (\neg p) = 1$ und $p \wedge (\neg p) = 0$.*

Für $a, b \in B$ heißt $a \wedge b$ das **Produkt** von a und b.

Ich habe die Schreibweise mit logischen Symbolen gewählt. Es werden auch $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ oder $(B, \cup, \cap, \neg, 0, 1)$ oder andere Symbole benutzt. Dabei ist die mengentheoretische Schreibweise sicherlich am suggestivsten. Leider kann sie aber auch Falsches suggerieren, wie das Beispiel der Intervallalgebra auf $\mathbb{R}$ zeigt (s.u.).

Im folgenden werde ich der Einfachheit halber für die gesamte Struktur die Bezeichnung B der Grundmenge wählen.

Auf B kann man eine Halbordnung $\leq$ (bzw. $\subseteq$) durch $p \leq q$ gdw. $p \vee q = q$ definieren. „$\geq$“ wird dann definiert durch: $p \geq q$ gdw. $q \leq p$.

Ferner schreiben wir $p - q$ als Abkürzung für $p \wedge \neg q$.

Elemente $b \in B$, so daß $b > 0$ und es kein $a \in B$ gibt mit $0 < a < b$, heißen **Atome** von B. Eine Boolesche Algebra heißt **atomar**, wenn es für jedes $b \in B \setminus \{0\}$ ein Atom $a \in B$ gibt mit $a \leq b$.
Zum Beispiel sind alle endlichen Booleschen Algebren atomar.

Definition 3.1.2 *Wenn es existiert, ist $\bigvee X := \min\{a \in B | \forall x (x \in X \rightarrow x \leq a)\}$ die* **kleinste obere Schranke von** X **in** B*. Analog dazu ist $\bigwedge X := \max\{a \in B | \forall x (x \in X \rightarrow a \leq x)\}$ die* **größte untere Schranke** *von X in B.*

Ist $X = \{X_i | i \in I\}$, so schreiben wir auch $\bigwedge_{i \in I} X_i$ statt $\bigwedge X$ und $\bigvee_{i \in I} X_i$ statt $\bigvee X$.

Wenn $B \subseteq \mathfrak{P}(X)$ eine Boolesche Algebra mit $\wedge = \cap$, $\vee = \cup$, $0 = \emptyset$ und $1 = X$ ist, und $\bigcup M \in B$ für eine Teilmenge M von B gilt, dann ist $\bigcup M = \bigvee M$. Wir nennen solche Algebren Mengenalgebren.

Es kann aber auch sein, daß $\bigvee M$ existiert, aber nicht gleich $\bigcup M$ ist; sei zum Beispiel $B = \{[x, \infty) | x \in \mathbb{R}\}$ mit den mengentheoretischen Operationen als Verknüpfungen eine Intervallalgebra auf $\mathbb{R}$ und

$$M := \{[x, \infty) | x \in \mathbb{R}, 0 < x\}.$$

Dann ist $\bigcup M$ das offene Intervall $(0, \infty)$ und $\bigvee M$ das halboffene Intervall $[0, \infty)$.

Es ist präziser $\bigvee^B M$ zu schreiben, um die Algebra anzugeben, in der das Supremum gebildet wird. Das wird aber nur da geschehen, wo die Boolesche Algebra nicht eindeutig ist.

Definition 3.1.3 *Eine Boolesche Algebra B heißt* **κ-vollständig**, *wenn für jede Menge $X \subseteq B$ mit $\mathrm{card}(X) < \kappa$ sowohl $\bigvee X$ als auch $\bigwedge X$ existieren.*

B heißt **vollständig**, *wenn für alle $X \subseteq B$ sowohl $\bigvee X$ also auch $\bigwedge X$ existieren, das heißt, wenn sie vollständig für alle κ ist.*

Definition 3.1.4 *Sei B eine Boolesche Algebra, $x, y \in B$ und $X \subseteq B$. Die Elemente x und y sind* **disjunkt**, *wenn $x \wedge y = 0$. Die Menge X ist eine* **paarweise disjunkte Familie**, *wenn für alle $x \in X$ gilt $0 < x$ und je zwei verschiedene Elemente von X disjunkt sind.*

Definition 3.1.5 *In einer Booleschen Algebra B ist eine* **Partition** *eine maximale Menge paarweise disjunkter, nicht negativer Elemente, das heißt, $\mathcal{P}$ ist Partition genau dann, wenn folgendes gilt*

1. *für alle $p \in P$ gilt $p \neq 0$,*
2. *für alle $p, q \in P$ gilt $(p \neq q \rightarrow p \wedge q = 0)$ und*
3. *$\bigvee P = 1$.*

Sei M eine Menge. Eine injektive Funktion $f : M \rightarrow B$ ist eine **Partitionsfunktion**, *wenn f eine Partition auf B induziert, das heißt, wenn $\mathrm{ran}(f) \setminus \{0\}$ eine Partition ist.*

Zum Beispiel bildet die Menge A der Atome einer atomaren Booleschen Algebra eine Partition. Falls nämlich $\bigvee A < 1$, so ist $\neg \bigvee A \neq 0$, also gibt es ein Atom $a \in A$ mit $a \leq \neg \bigvee A$, im Widerspruch zur Disjunktheit von $\bigvee A$ und $\neg \bigvee A$.

Partitionsfunktionen werden vor allem in Kapitel 6 gebraucht; sie sind ein Grundbaustein für Boolesche Potenzen.

Definition 3.1.6 *Sei X eine Menge. Eine Funktion $f : X \rightarrow B$ in B heißt* **disjunkt**, *falls $0 \notin \mathrm{ran}(f)$ und $f(x) \wedge f(y) > 0 \rightarrow x = y$.*

Jede Partition ist insbesondere durch eine disjunkte Funktion gegeben; allerdings muß eine disjunkte Funktion nicht unbedingt eine Partition erzeugen.

Definition 3.1.7 *Eine Boolesche Algebra B ist κ-***disjunktifizierbar***, wenn es zu jeder Menge X mit $\operatorname{card}(X) < \kappa$ und jeder Funktion $f : X \to B$ eine Funktion $g : X \to B$ gibt, die disjunkt in B ist, so daß für alle $x \in X$ gilt $g(x) \leq f(x)$.*

Satz 3.1.8 *Sei B eine κ-vollständige Boolesche Algebra. Dann gibt es zu jeder Familie $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ in B eine Familie $(b_\alpha)_{\alpha<\kappa}$, die aus paarweise disjunkten Elementen besteht, so daß für alle $\alpha < \kappa$ gilt $b_\alpha \leq a_\alpha$ und*

$$\bigvee_{\alpha<\kappa} a_\alpha = \bigvee_{\alpha<\kappa} b_\alpha,$$

falls eines dieser Suprema existiert.

Beweis:
Sei für $\alpha < \kappa$

$$b_\alpha := a_\alpha \wedge \neg \bigvee_{\beta<\alpha} a_\beta.$$

Dann ist $b_\alpha \leq a_\alpha$ und für $\beta < \alpha$ gilt $b_\alpha \wedge b_\beta = 0$, da $b_\beta \leq a_\alpha$ und $b_\alpha \leq \neg a_\beta$.
Als nächstes zeigen wir

$$\bigvee_{\beta<\alpha} b_\beta = \bigvee_{\beta<\alpha} a_\beta \text{ für alle } \alpha < \kappa. \tag{3.1}$$

Beweis von (3.1) (Induktion nach α):
$b_0 = a_0$ nach Definition von b_0.
Gelte (3.1) für α. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\bigvee_{\beta<\alpha+1} b_\beta &= \bigvee_{\beta<\alpha} a_\beta \vee b_\alpha \\
&= \bigvee_{\beta<\alpha} a_\beta \vee (a_\alpha \wedge \neg \bigvee_{\beta<\alpha} a_\beta) \\
&= (\bigvee_{\beta<\alpha} a_\beta \vee a_\alpha) \wedge (\bigvee_{\beta<\alpha} a_\beta \vee \neg \bigvee_{\beta<\alpha} a_\beta) \\
&= (\bigvee_{\beta<\alpha} a_\beta \vee a_\alpha) \wedge 1 \\
&= \bigvee_{\beta<\alpha+1} a_\beta
\end{aligned}$$

Sei α eine Limesordinalzahl und die Aussage wahr für alle $\beta < \alpha$. Dann ist

$$\bigvee_{\beta<\alpha} b_\beta = \bigvee_{\beta<\alpha} \bigvee_{\gamma<\beta} b_\gamma = \bigvee_{\beta<\alpha} \bigvee_{\gamma<\beta} a_\gamma = \bigvee_{\beta<\alpha} a_\beta.$$

Damit gilt (3.1).

Also haben $\{b_\alpha|\alpha < \kappa\}$ und $\{a_\alpha|\alpha < \kappa\}$ die gleiche Menge von oberen Schranken in B, was die letzte Behauptung beweist.

$\square$

Korollar 3.1.9 *Jede κ-vollständige Boolesche Algebra ist κ-disjunktifizierbar.*

Beweis:
Sei B eine κ-vollständige Boolesche Algebra. Sei X eine Menge mit $\mathrm{card}(X) < \kappa$. Zu zeigen ist, daß es zu jeder Funktion $f : X \to B$ eine Funktion $g : X \to B$ gibt, die disjunkt in B ist, so daß gilt $g(x) \leq f(x)$ für alle $x \in X$.

Sei also $f : X \to B$ eine Funktion. Sei $\psi : \mathrm{card}(X) \to X$ eine bijektive Funktion. Definiere nun eine Familie $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ durch

$$a_\alpha :=:= \begin{cases} f(\psi(\alpha)) & \text{für } \alpha < \mathrm{card}(X) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit Satz 3.1.8 gibt es eine Familie $(b_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ von paarweise disjunkten Elementen mit

$$b_\alpha \leq a_\alpha \text{ für } \alpha < \kappa \text{ und}$$
$$\bigvee_{\alpha<\kappa} a_\alpha = \bigvee_{\alpha<\kappa} b_\alpha$$

Definiere die Funktion $g : X \to B$ durch

$$g(x) := b_{\psi^{-1}(x)}.$$

Dann gilt $g(x) \leq f(x)$ für alle $x \in X$ und $\mathrm{ran}(g)$ ist disjunkt in B. $\square$

Definition 3.1.10 *Eine Boolesche Algebra B erfüllt die κ-***chain condition***, wenn gilt* $\mathrm{card}(X) < \kappa$ *für jede paarweise disjunkte Familie X in B.*

Eine paarweise disjunkte Familie in B wird auch **Antikette** *genannt.*

B erfüllt die **countable chain condition (ccc)***, wenn jede Antikette in B höchstens abzählbar ist.*

3.2 Subalgebren

Weil sich Boolesche Algebren als Erzeugnis einer Menge darstellen lassen, ist es naheliegend, das Erzeugnis einer Teilmenge (Subalgebren) zu betrachten. Reguläre Subalgebren haben die schöne Eigenschaft, daß sie $\bigwedge$ und $\bigvee$ erhalten.

Boolesche Algebren sind vollständig, wenn alle ihre Infima und Suprema existieren. Falls eine Boolesche Algebra die ccc hat, so auch ihre Vervollständigung.

Definition 3.2.1 *Eine Struktur* $(A, \vee_A, \wedge_A, \neg_A, 0_A, 1_A)$ *ist eine* **Subalgebra** *der Booleschen Algebra* $(B, \vee_B, \wedge_B, \neg_B, 0_B, 1_B)$*, wenn gilt* $A \subseteq B$*,* $0_A = 0_B$*,* $1_A = 1_B$ *und die Operationen* $\vee_A, \wedge_A, \neg_A$ *die Einschränkungen von* $\vee_B, \wedge_B$ *und* $\neg_B$ *auf* A *sind.*

Definition 3.2.2 *Eine Subalgebra* A *einer Booleschen Algebra* B *ist eine* **reguläre Subalgebra***, wenn für jedes* $M \subseteq A$*, für das* $\bigvee^A$ *existiert, gilt*

$$\bigvee\nolimits^A M = \bigvee\nolimits^B M.$$

Definition 3.2.3 *Sei* B *eine Boolesche Algebra. Eine Teilmenge* X *von* $B \setminus \{0\}$ *ist* **dicht** *in* B*, wenn für jedes* $b \in B \setminus \{0\}$ *ein* $x \in X$ *existiert, so daß* $0 < x \leq b$*.*

Eine Subalgebra A *von* B *ist eine* **dichte Subalgebra***, wenn* $A \setminus \{0\}$ *dicht in* B *ist.*

Lemma 3.2.4 *Sei* B *eine Boolesche Algebra. Eine Menge* S*, die* 0 *enthält, ist genau dann dicht in* B*, wenn jedes Element* $b \in B$ *Supremum aller* $s \in S$ *ist, so daß* $s < b$*.*

Beweis:
Angenommen,S ist dicht in B. Sei zu $b \in B$ das Element $b' \in B$ so, daß $s < b'$ ist für jedes $s \in S$, so daß $s < b$ ist. Die Differenz $b - b'$ muß das Nullelement sein, denn ansonsten gäbe es ein Element $s_0 \in S \setminus \{0\}$, das kleiner als b aber nicht kleiner als b' wäre. $b - b' = 0$ impliziert, daß $b < b'$ ist, was beweist, daß b das Supremum aller $s \in S$ ist, so daß gilt $s < b$.

Die andere Richtung gilt offensichtlich. □

Lemma 3.2.5 *Wenn* S *eine dichte Teilmenge einer Booleschen Algebra* B *ist, die die* κ*-cc erfüllt, so ist jedes Element von* B *Supremum einer Menge* $\{b_t | t \in T\}$ *von disjunkten Elementen von* S*, wobei* $\mathrm{card}(T) < \kappa$*.*

Beweis:
Sei $\{b_t | t \in T\}$ eine maximale Menge disjunkter Elemente von S für die gilt $b_t < b$. Es gilt $b = \bigvee_{t \in T} b_t$, da S dicht in B liegt und $\{b_t | t \in T\}$ maximal ist. Ferner ist $\mathrm{card}(T) < \kappa$, da b die κ-cc erfüllt. □

Satz 3.2.6 *Jede dichte Subalgebra einer Booleschen Algebra* B *ist regulär in* B*.*

Beweis:
Sei A eine dichte Subalgebra von B und $M \subseteq A$. Wenn $a := \bigvee^A M$ existiert, dann ist a obere Schranke von M in A und damit in B. Sei b eine obere Schranke von M in B.

Es bleibt noch zu zeigen

$$a \leq b. \tag{3.2}$$

Beweis von (3.2) (durch Widerspruch):
Andernfalls gilt $a \wedge \neg b > 0$, also kann man ein $a' \in A \setminus \{0\}$ wählen, so daß $a' \leq a \wedge \neg b$. Damit folgt

$$\bigvee^A M \wedge a' \leq \bigvee^A M \wedge a \wedge \neg b = 0 \wedge a = 0,$$

also $\bigvee^A M \wedge \neg a' = \bigvee^A M$ und $\neg a'$ ist eine obere Schranke von M in A. Also ist auch $a \wedge \neg a'$ obere Schranke von M in A, aber da $a' \wedge a \wedge \neg b = a' > 0$, gilt $\neg a' \wedge a \neq a$, also $a \wedge \neg a' < a$ im Widerspruch zur Wahl von a. Damit gilt (3.2). □

Definition 3.2.7 *Sei A eine Boolesche Algebra. Eine* **Vervollständigung** *von A ist eine vollständige Boolesche Algebra B, die A als dichte Teilmenge enthält.*

Satz 3.2.8 *Jede Boolesche Algebra hat eine bis auf Isomorphismus eindeutige Vervollständigung.*

Für den Beweis s. [Ko 89], S. 60.

Definition 3.2.9 *Sei X eine Teilmenge einer Booleschen Algebra B. Dann ist*

$$\langle X \rangle = \bigcap \{A \subseteq B | X \subseteq A \textit{ und } A \textit{ ist Subalgebra von } B\}$$

die kleinste Subalgebra von B, die X enthält, und heißt die **Subalgebra, die von X in B generiert wird**. *Die Elemente von $\langle X \rangle$ werden von X* **generiert**.

Eine Menge X ist Menge von **Generatoren** *für eine Boolesche Algebra A, wenn $X \subseteq A$ und $\langle X \rangle = A$.*

Definition 3.2.10 *Sei B eine Boolesche Algebra. Für $\epsilon \in \{-1, +1\}$ und $x \in B$ definiere das Element ϵx von B durch*

$$(+1)x := x \textit{ und } (-1)x := \neg x.$$

Für $X \subseteq B$ ist ein **elementares Produkt** *über X ein endliches Produkt mit Faktoren der Form ϵx mit $\epsilon \in \{-1, +1\}$ und $x \in X$.*

Ein Element von B ist in **(additiver) Normalform über** X*, wenn es von der Form*

$$(\epsilon_{11}x_{11} \wedge \ldots \wedge \epsilon_{1n}x_{1n}) \vee \ldots \vee (\epsilon_{m1}x_{m1} \wedge \ldots \wedge \epsilon_{mk}x_{mk})$$

mit $n, m, k < \omega$ ist.

Satz 3.2.11 *(Normalformtheorem) Die Subalgebra, die von $X \subseteq B$ generiert wird, enthält genau die Elemente von B, die sich in Normalform über X darstellen lassen.*

Für den Beweis s. [Ko 89] S. 52f.

Definition 3.2.12 *Sei X eine Teilmenge einer Booleschen Algebra B. Dann ist*

$$\langle X \rangle^{\mathrm{cm}} = \bigcap \{A \subseteq B | X \subseteq A \text{ und } A \text{ ist vollständige Subalgebra von } B\}$$

die **vollständige Subalgebra, die von X generiert wird**.[1]

Man sieht leicht, daß $\langle X \rangle^{\mathrm{cm}}$ vollständig ist.

Satz 3.2.13 *Sei F eine Boolesche Algebra mit der ccc, B ihre Vervollständigung. Dann erfüllt B die ccc.*

Beweis:
Angenommen, B enthält eine paarweise disjunkte Familie $X = (x_i)_{i<\lambda}$ mit $\mathrm{card}(X) = \lambda > \omega$.

Nach der Definition von Vervollständigung liegt F dicht in B, also gibt es zu jedem $x_i \in B$ ein $y_i \in F$ mit $0 < y_i \leq x_i$. Da F die ccc hat, gibt es in den $(y_i)_{i<\lambda}$ y_ℓ und y_k, so daß $0 < y_\ell \wedge y_k \leq x_\ell \wedge x_k$. Damit sind die x_i nicht paarweise disjunkt. Widerspruch zur Annahme. □

3.3 Freie Boolesche Algebren

In diesem Abschnitt werde ich auf die Grundzüge der Theorie der freien Booleschen Algebren eingehen; dabei werde ich mich hauptsächlich an der Darstellung von S. Koppelberg in [Ko 89] orientieren.

Neben der Definition von freien Booleschen Algebren wird gezeigt, daß sie die ccc haben (Satz 3.3.5).

[1] Dabei steht „cm“ für „complete“.

Definition 3.3.1 *Sei X eine Menge. Eine* **freie Boolesche Algebra** *über X ist ein Paar (e, B), so daß B eine Boolesche Algebra und e eine Abbildung von X in B ist, so daß es für jede Abbildung f von X in eine Boolesche Algebra A einen eindeutigen Homomorphismus $g : B \to A$ gibt, der $g \circ e = f$ erfüllt.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, dashed, "g"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Eine Boolesche Algebra B ist **frei**, *wenn es ein X und $e : X \to B$ gibt, so daß (e, B) frei über X ist.*

Definition 2.3.1 hat für Boolesche Algebren folgende Form:

Definition 3.3.2 *Eine Teilmenge U einer (beliebigen) Booleschen Algebra B ist* **unabhängig**, *wenn alle nichttrivialen Produkte über U nicht leer sind, das heißt, wenn für beliebige disjunkte endliche Teilmengen $\{u_1, \ldots, u_n\}$ und $\{v_1, \ldots, v_m\}$ von U gilt*

$$u_1 \wedge \ldots \wedge u_n \wedge \neg v_1 \wedge \ldots \wedge \neg v_m > 0.$$

Die Subalgebra von B, die von U generiert wird, heißt dann **unabhängig generiert** *oder* **frei generiert** *von U.*

Satz 3.3.3 *Damit eine Boolesche Algebra mit κ Generatoren frei ist, ist es notwendig und hinreichend, daß sie von einer unabhängigen Menge mit κ Elementen erzeugt wird.*

Zum Beweis s. [S 69] S. 43. Es gilt also, daß freie Boolesche Algebren mit der gleichen Anzahl an unabhängigen Generatoren isomorph sind.

Die freie Boolesche Algebra auf κ Generatoren, F_κ, kann man topologisch folgendermaßen beschreiben:
Für jedes $\alpha < \kappa$ sei $T_\alpha := \{0, 1\}$, versehen mit der diskreten Topologie. Sei $T := \prod_{\alpha<\kappa} T_\alpha$. Definiere für $\alpha < \kappa$ die Menge $u_\alpha := \{x \in T | x(\alpha) = 1\}$, die Menge alle Punkte in T, deren αte Koordinate gleich 1 ist.

Sei F die Boolesche Algebra aller clopen Teilmengen von T. Es folgt aus der Definition der Topologie im Cartesischen Produkt T, daß F die kleinste Boolesche Algebra ist, die alle Mengen $u_\alpha, \alpha < \kappa$, enthält.

Die Mengen u_α sind unabhängig, denn wenn $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_m$ paarweise verschieden sind, so gehört jeder Punkt $\{a_\tau\}_{\tau<\kappa} \in T$ mit $a_t = 1$ für $t \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ und $a_{t'} = 0$ für $t' \in \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_m\}$ zu

$$u_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge u_{\alpha_n} \wedge u_{\alpha'_1} \wedge \ldots \wedge u_{\alpha'_m}.$$

Somit ist $U := \{u_\alpha | \alpha < \kappa\}$ eine Menge von unabhängigen Generatoren von F. Damit ist F isomorph zu F_κ.

Satz 3.3.4 *Sei κ eine reguläre, überabzählbare Kardinalzahl. Wenn A eine freie Boolesche Algebra ist und $X \subseteq A$ Kardinalität κ hat, so hat X eine unabhängige Teilmenge der Größe κ.*

Beweis:
Sei A unabhängig generiert von U und habe $X \subseteq A$ Größe κ. Für jedes $x \in X$ wähle eine endliche Teilmenge $U_x \subseteq U$, die x generiert, das heißt, es gilt $x \in \langle U_x \rangle$.

Da die Subalgebren $\langle U_x \rangle$, die von U_x generiert werden, endlich sind, hat X eine Teilmenge X' der Größe κ, so daß $U_x \neq U_y$ für alle $x \neq y$ in X'.

Mit dem Δ-System-Lemma 2.2.2 hat X' eine Teilmenge X'' der Größe κ, so daß die U_x, $x \in X''$, ein Δ-System[2] formen; nenne die Wurzel V.

Setze $W_x := U_x \setminus V$ für $x \in X''$ und sei $S := \langle V \rangle$. S ist endlich. Seien $s_1, \ldots, s_n$ die Atome von S.

Jedes $x \in X''$ wird von $U_x = V \cup W_x \subseteq S \cup W_x$ generiert, also gibt es $a_{1x}, \ldots, a_{nx} \in \langle W_x \rangle$, so daß

$$x = (a_{1x} \wedge s_1) \vee \ldots \vee (a_{nx} \wedge s_n)$$

Wegen $s_1 \vee \ldots \vee s_n = 1$ gilt

$$\begin{aligned} & (a_{1x} \wedge s_1) \vee \ldots \vee (a_{nx} \wedge s_n) \vee (\neg a_{1x} \wedge s_1) \vee \ldots \vee (\neg a_{nx} \wedge s_n) \\ = \; & [((a_{1x} \wedge s_1) \vee (\neg a_{1x} \wedge s_1)] \vee \ldots \vee [(a_{nx} \wedge s_n) \vee (\neg a_{nx} \wedge s_n)] \\ = \; & s_1 \vee \ldots \vee s_n = 1 \end{aligned}$$

und damit

$$\neg x = ((\neg a_{1x}) \wedge s_1) \vee \ldots \vee ((\neg a_{nx}) \wedge s_n).$$

Definiere eine Funktion $f : X'' \to \mathcal{S}_\omega(\omega) \times \mathcal{S}_\omega(\omega)$ durch

$$f(x) := (\{i \in \{1, \ldots, n\} | a_{ix} > 0\}, \{i \in \{1, \ldots, n\} | \neg a_{ix} > 0\}).$$

[2] Für die Definition des Δ-Systems und seiner Wurzel s. 2.2.1.

Wegen $\mathrm{card}(\mathcal{S}_\omega(\omega) \times \mathcal{S}_\omega(\omega)) = \aleph_0$, also gibt es abzählbar viele Mengen $f^{-1}``\{(K,L)\}$ mit $(K,L) \in \mathcal{S}_\omega(\omega) \times \mathcal{S}_\omega(\omega)$. $X'' = \bigcup_{(K,L)} f^{-1}``\{(K,L)\}$ und da κ regulär, $\kappa > \omega$ und $\kappa = \mathrm{card}(X'')$, gibt es also ein Paar (M,N) mit

$$\mathrm{card}(f^{-1}``\{(M,N)\}) = \kappa.$$

Sei $Y := f^{-1}``\{(M,N)\}$. Damit gilt $\mathrm{card}(Y) = \kappa$ und für jedes $x \in Y$

$$\begin{array}{rcl} \{i \in \{1,\ldots,n\} | a_{ix} > 0\} & = & M, \\ \{i \in \{1,\ldots,n\} | \neg a_{ix} > 0\} & = & N. \end{array}$$

Es gilt $M \cap N \neq \emptyset$, denn betrachte $x, y \in Y, x \neq y$. Ohne Einschränkung gelte $x \wedge \neg y > 0$. Nach obigen Überlegungen läßt $x \wedge \neg y$ sich darstellen durch

$$x \wedge \neg y = \bigvee \{a_{ix} \wedge \neg a_{iy} \wedge s_i | 1 \leq i \leq k\}.$$

Es folgt, daß $a_{ix} \wedge \neg a_{iy} > 0$ für gewisse i, also $i \in M \cap N$.

Es bleibt die Unabhängigkeit von Y zu zeigen. Seien dazu E und F disjunkte endliche Teilmengen von Y. Betrachte das elementare Produkt

$$p = \bigwedge_{e \in E} e \wedge \bigwedge_{f \in F} \neg f.$$

Für jedes $i \in \{1,\ldots,k\}$ gilt

$$p \geq s_i \wedge \bigwedge_{e \in E} a_{ie} \wedge \bigwedge_{f \in F} \neg a_{if}. \tag{3.3}$$

Für $i \in M \cap N$ ist die rechte Seite von (3.3) nicht Null, da $s_i \in \langle V \rangle$, $0 < a_{ie} \in \langle W_e \rangle, 0 < \neg a_{if} \in \langle W_f \rangle$ und die Mengen V, W_e, für $e \in E$, und W_f, für $f \in F$, sind paarweise disjunkte Teilmengen von U.

□

Satz 3.3.5 *Jede freie Boolesche Algebra F hat die ccc.*

Beweis:
Angenommen, F enthalte eine paarweise disjunkte Familie X mit $\mathrm{card}(X) = \aleph_1$.

Dann enthält X mit 3.3.4 eine unabhängige Teilmenge der Größe $\aleph_1$, die insbesondere nicht disjunkt ist. Widerspruch.

□

Insbesondere erfüllt B_κ, die Vervollständigung der freien Booleschen Algebra F_κ auf κ Generatoren, mit Satz 3.2.13 die ccc.

3.4 ... und ihre Vervollständigungen

Vervollständigungen von freien Booleschen Algebren werden benötigt, um in Kapitel 6.4 einen guten Ultrafilter zu und in Kapitel 7 eine Boolesche Potenz, die nicht isomorph zu einer Ultrapotenz ist, zu konstruieren.

In Lemma 3.4.2 wird gezeigt, daß es vollständige Boolesche Algebren gibt, die durch eine aufsteigende Kette vollständiger Subalgebren dargestellt werden können. Der Abschnitt schließt mit einer Kardinalitätsaussage für eine Boolesche Algebra, die in Kapitel 6.4 gebraucht wird.

Sei B_κ die Vervollständigung der freien Booleschen Algebra F_κ auf κ Generatoren.

Die Boolesche Algebra B_κ hat, ebenso wie F_κ, eine topologische Darstellung:
Betrachte auf dem Raum $T = \prod_{\alpha<\kappa} T_\alpha$ die Algebra B aller regulär offenen Teilmengen[3] von T. Auf B werden die Booleschen Operationen folgendermaßen definiert: Das Supremum $a \vee b$ zweier Mengen $a, b \in B$ sei das Innere des Abschlusses von $a \cup b$. Das Infimum $a \wedge b$ von $a, b \in B$ sei der mengentheoretische Schnitt von a und b. Das Boolesche Komplement $\neg a$ von $a \in B$ sei das Innere des mengentheoretischen Komplementes von a.

B ist eine Vervollständigung von F_κ (s. [S 69] §35 C). Da nach Satz 3.2.8 die Vervollständigung von F_κ bis auf Isomorphie eindeutig ist, ist B isomorph zu B_κ.

Lemma 3.4.1 *Sei κ eine Kardinalzahl mit $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$. Sei B_κ die Vervollständigung der freien Booleschen Algebra auf κ Generatoren; U die Generatorenmenge von B_κ. Sei $(U_\eta)_{\eta<\kappa}$ eine Folge von disjunkten Teilmengen von U, so daß $\mathrm{card}(U_\eta) \geq \omega$ für $\eta < \kappa$ und $\bigcup_{\eta<\kappa} U_\eta = U$. Sei für $\eta < \kappa$ $B_\eta := \langle \bigcup_{\xi<\eta} U_\xi \rangle^{\mathrm{cm}}$. Dann gilt*

$$B_\kappa \cong \bigcup_{\eta<\kappa} B_\eta.$$

Beweis:
„$\supseteq$“: klar.

„$\subseteq$“: B_κ erfüllt die ccc aufgrund der Bemerkung nach Satz 3.3.5.

Behauptung:

$$\langle U \rangle \text{ liegt dicht in } F_\kappa. \tag{3.4}$$

Beweis von (3.4):
Es gilt $\langle U \rangle \subseteq F_\kappa$. Jede Menge $x > 0$ in F_κ ist clopen, also insbesondere offen.

---
[3] s. Abschnitt 3.3.

Damit ist x Vereinigung von Basismengen der Topologie, d.h. von Mengen aus $\langle U\rangle$. Weil $x > 0$ ist, so muß es auch $y \in \langle U\rangle$ geben mit $0 < y \leq x$.

Damit ist (3.4) gezeigt.

Da F_κ dicht in B_κ liegt, liegt $\langle U\rangle$ auch dicht in B_κ. Aufgrund von Satz 3.2.5 ist jedes $b \in B_\kappa$ Supremum einer abzählbaren Menge $\{u_n | n < \omega\}$ von disjunkten Elementen von $\langle U\rangle$.

Sei nun $b \in B_\kappa$. Da $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ ist, gibt es ein $\eta < \kappa$, so daß b Supremum einer abzählbaren disjunkten Teilmenge von $\langle\bigcup_{\xi<\eta} U_\xi\rangle$ ist. Damit gilt $b \in B_\eta$.
□

Satz 3.4.2 *Sei B_κ die Vervollständigung der freien Booleschen Algebra auf κ Generatoren, und sei κ unerreichbar. Dann gilt*

$$\mathrm{card}(B_\kappa) = \kappa.$$

Beweis:
Sei U eine Menge von unabhängigen Generatoren von F_κ. Jedes Element von $\langle U\rangle$ wird aus U endlich generiert, also ist $\mathrm{card}(\langle U\rangle) = \mathrm{card}(U) = \kappa$. Wie im Beweis von Lemma 3.4.1 gezeigt ist jedes $b \in B_\kappa$ Supremum einer höchstens abzählbaren Mengen $\{u_n | n < \omega\}$ von disjunkten Elementen von $\langle U\rangle$. κ ist eine starke Limeskardinalzahl, also gilt $\kappa^\omega = \kappa$ (Satz 2.2.7). Damit gilt

$$\mathrm{card}(B_\kappa) \leq \mathrm{card}(\langle U\rangle)^\omega = \kappa^\omega = \kappa.$$

□

Kapitel 4

Filter

Da Filter einer der Grundbausteine von Ultrapotenzen und Booleschen Potenzen sind, wirken sich die verschiedenen Filtereigenschaften auch auf die Eigenschaften der mit ihnen gebildeten Potenzen aus. In diesem Kapitel werden deshalb einige Eigenschaften von Filtern und ihre gegenseitigen Abhängigkeiten betrachtet.

In Bild 4.1 sind diese Abhängigkeiten zusammengestellt; dabei bedeutet „D“ an einem Pfeil, daß die Implikation nur für Ultrafilter gilt. Filter sind dual zu Idealen (die im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht gebraucht werden). Deshalb habe ich Ultrafilter (die zu Primidealen dual sind) D genannt; normale Filter nenne ich im allgemeinen F.

In Abschnitt 4.1 werden Ultrafilter, prinzipale und uniforme Filter definiert. Das sind sehr grundlegende Arten von Filtern. Das Ultrafiltertheorem 4.1.8 sichert die Existenz von Ultrafiltern.

Abschnitt 4.2 liefert dann die Definition von Vollständigkeit für Filter und Überlegungen dazu, wie vollständig ein Filter werden kann, ohne prinzipal zu sein. Aus diesen Überlegungen ergibt sich der Begriff der Meßbarkeit.

Reguläre Filter definiere ich in 4.3 zuerst allgemein auf Booleschen Potenzen und gebe dann die einfachere Definition für Potenzmengenalgebren an.

Zwischen absteigender Unvollständigkeit und Zerlegbarkeit besteht ein enger Zusammenhang, wie in Abschnitt 4.4 gezeigt wird.

Gute Ultrafilter, die in 4.5 eingeführt werden, werden in 6.4 gebraucht, um eine Boolesche Potenz unerreichbarer Kardinalität anzugeben.

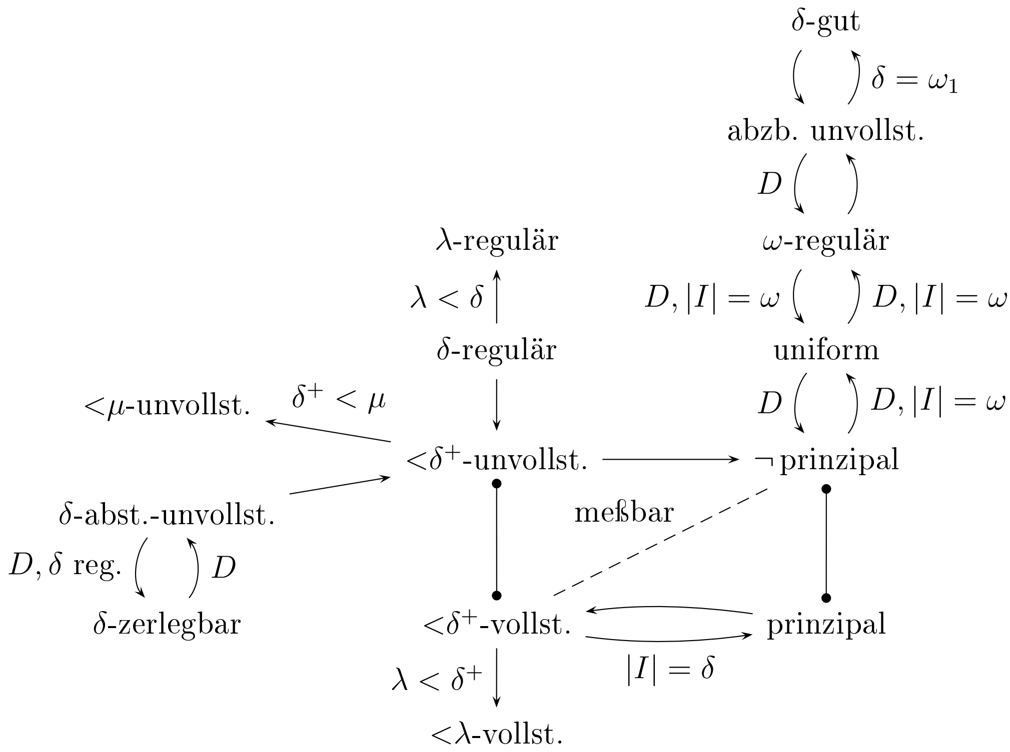

Abbildung 4.1: Eigenschaften von Filtern über einer Menge I

4.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

Zentral in diesem Abschnitt sind - neben der Definition des Filters - das Ultrafiltertheorem 4.1.8 und die Begriffe uniform und prinzipal.

Definition 4.1.1 *Ein* **Filter** *auf einer Booleschen Algebra B ist eine Teilmenge F von B, die folgende Bedingungen erfüllt:*

1. $1 \in F$.

2. $p \in F, q \in B$ *und* $p \leq q \rightarrow q \in F$.

3. $p, q \in F \rightarrow p \wedge q \in F$.

F ist ein **echter Filter**, *falls* $0 \notin F$.
F ist ein **Ultrafilter**, *falls für alle* $p \in B$

$$p \in F \leftrightarrow \neg p \notin F.$$

Äquivalent kann man Filter auch als Teilmengen F von B charakterisieren, so daß $1 \in F$ und

(4.1) für alle $x, y \in B, x \wedge y \in F$ gdw. $x \in F$ und $y \in F$:

Wenn F Filter ist und $x \wedge y \in F$, dann folgt $x \wedge y \leq x$ und $x \wedge y \leq y$, also $x, y \in F$; damit erfüllt F (4.1).

Wenn $x \in F$ und $y \in F$, dann ergibt sich $x \wedge y \in F$ nach der dritten Bedingung für Filter.

Umgekehrt, wenn F (4.1) erfüllt, und $x \in F$ und $y \in B$, dann folgt aus $x \wedge y = x \in F$, daß $y \in F$; also ist F Filter.

Im folgenden seien alle Filter echt.

Der Filter, der nur die 1 enthält, heißt **trivialer Filter**.

Ein Filter F im üblichen Sinne (über einer Menge I) ist nach obiger Definition ein Filter auf $\mathfrak{P}(I)$. Wenn ich mich mit Filtern auf Potenzmengenalgebren beschäftige, werde ich dem üblichen Sprachgebrauch folgen und von Filtern über Mengen sprechen.

Definition 4.1.2 *Eine Menge $E \subseteq B$ hat die* **endliche Durchschnittseigenschaft**, *wenn für alle $a_1, \ldots, a_n \in E$ gilt $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} a_i \neq 0$.*

Zum Beispiel hat jeder Filter die endliche Durchschnittseigenschaft.

Definition 4.1.3 *Sei $E \subset B$. Der* **von E erzeugte Filter** *F ist der Schnitt über alle Filter auf B, die E enthalten:*

$$F = \bigcap \{F' | E \subseteq F' \text{ und } F' \text{ ist Filter auf } B\}.$$

Man sieht sofort, daß auch F ein Filter auf B ist.

Satz 4.1.4 *Sei E eine Teilmenge von B und F der Filter, der von E erzeugt wird. Dann gilt*

1. *F ist die Menge aller $X \in B$, für die entweder $X = 1$ gilt oder für die es $Y_1, \ldots, Y_n \in E$ gibt mit*

$$Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_n \leq X.$$

2. *F ist genau dann ein echter Filter, wenn E die endliche Durchschnittseigenschaft hat.*

Beweis:

1. Sei F' die Menge aller $X \in B$, für die $X = 1$ oder für die es $Y_1, \ldots, Y_n \in E$ gibt mit $Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_n \leq X$.

   Es ist also zu zeigen, daß $F' = F$.

   $1 \in F'$.

   Seien $X, X' \in F'$ und $Y_1, \ldots, Y_n, Y_1', \ldots, Y_m' \in E$, so daß
   $$Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_n \leq X \text{ und } Y_1' \wedge \ldots \wedge Y_m' \leq X'.$$
   Wenn $X \leq Z \leq 1$, dann ist
   $$Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_n \leq Z,$$
   also ist $Z \in F'$.

   Außerdem gilt
   $$Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_n \wedge Y_1' \wedge \ldots \wedge Y_m' \leq X \wedge X',$$
   also $X \wedge X' \in F'$. Damit ist F' Filter auf B, der E umfaßt, also $F \subseteq F'$.

   Betrachte nun einen Filter G auf B, der E enthält. Es gilt $1 \in G$ und für alle $Y_1, \ldots, Y_n \in E$ gilt $Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_n \in G$. Damit gehören alle $X \in B$, die größer gleich $Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_n$ sind, zu G. Also $F' \subseteq G$.

   Insbesondere $F' \subseteq F$, also $F' = F$.

2. Wenn E nicht die endliche Durchschnittseigenschaft hat, dann $0 \in F$, also $F = B$.

   Wenn E die endliche Durchschnittseigenschaft hat, ist 0 nicht Obermenge eines endlichen Schnitts von Mengen aus E, also $0 \notin F$.

□

Lemma 4.1.5 *Der von $E \subseteq B$ erzeugte Filter F auf einer Booleschen Algebra B ist der kleinste Filter auf B, der E enthält. Er ist genau dann echt, wenn E die endliche Durchschnittseigenschaft hat.*

Der Beweis ist klar.

Definition 4.1.6 *Ein Filter F ist ein* **Primfilter***, wenn F echt ist und für alle $x, y \in B$ gilt*
$$x \vee y \to x \in F \vee y \in F.$$
F ist ein **maximaler Filter***, wenn F echt ist und es keinen echten Filter auf B gibt, der F als echte Teilmenge hat.*

Lemma 4.1.7 *Für jeden Filter F auf einer Booleschen Algebra B sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *F ist maximal.*
2. *F ist ein Ultrafilter.*
3. *F ist prim.*

Beweis:
Für jeden Filter F auf B impliziert jede der drei Eigenschaften Echtheit.

Sei F maximal; wir zeigen, daß F ein Ultrafilter ist. Sei $x \in B$. Da F echt ist, können nicht x und $\neg x$ beide in F sein. Angenommen, $x \notin F$. Da F maximal ist, enthält der Filter, der von $F \cup \{x\}$ erzeugt wird, die 0, also gibt es mit 4.1.5 ein $a \in F$, so daß $a \wedge x = 0$. Damit $a \leq \neg x$ und $\neg x \in F$.

Jeder Ultrafilter ist prim: Angenommen, $x \notin F$ und $y \notin F$. Wir müssen zeigen, daß $x \vee y \notin F$. Dies folgt daraus, daß $\neg x \in F$, $\neg y \in F$ und damit $\neg x \wedge \neg y = \neg(x \vee y) \in F$.

Sei F prim. Angenommen, $x \notin F$. Zu zeigen ist, daß $F \cup \{x\}$ den nicht echten Filter erzeugt. Da $1 = x \vee \neg x$ in F enthalten ist, aber x nicht, gilt $\neg x \in F$. Also enthält der Filter, der von $F \cup \{x\}$ erzeugt wird, $x \wedge \neg x = 0$.
□

Satz 4.1.8 *(Ultrafiltertheorem von Tarski)*[1] *Setzt man AC voraus, so ist eine Teilmenge einer Booleschen Algebra B genau dann in einem Ultrafilter enthalten, wenn sie die endliche Durchschnittseigenschaft hat.*

Beweis:
Sei $E \subseteq B$ in einem Ultrafilter D enthalten. D hat die endliche Durchschnittseigenschaft, also insbesondere auch E.

Man nehme umgekehrt an, daß $E \subseteq B$ die endliche Durchschnittseigenschaft hat. Der von E erzeugte Filter F ist mit 4.1.5 ein echter Filter. Die Menge P aller echten Filter von B, die F enthalten, ist nicht leer und durch Inklusion partiell geordnet. Außerdem hat jede nichtleere Kette C in P durch $\bigcup C$ eine obere Schranke in P.

$\bigcup C$ ist Filter: $1 \in \bigcup C$, da 1 in jedem Filter aus C enthalten ist.

Wenn $a, b \in \bigcup C$, dann gibt es $C_1, C_2 \in C$ mit $C_1 \ni a$ und $C_2 \ni b$. Ohne Einschränkung sei $C_1 \subseteq C_2$, also $a \wedge b \in C_2 \subseteq \bigcup C$.

Sei $a \in \bigcup C$ und $a \leq b$. Dann gibt es ein $C' \in C$, so daß $a \in C'$. Damit ist auch $b \in C' \subseteq \bigcup C$.

Angenommen, $\bigcup C$ ist kein echter Filter, das heißt, $0 \in \bigcup C$. Also gibt es C_1 aus C mit $0 \in C_1$. Dann ist aber schon C_1 kein echter Filter.

[1] In [Ko 89] wird dieser Satz als 'Boolesches Primidealtheorem' aufgeführt.

Durch Zorns Lemma wissen wir, daß es ein maximales Element D von P gibt. Dann ist D ein maximaler Filter und enthält E; mit 4.1.7 ist D ein Ultrafilter. $\square$

Korollar 4.1.9 *Ein Element a einer Booleschen Algebra B ist genau dann in einem Ultrafilter enthalten, wenn $a > 0$.*

Beweis:
Die Menge $\{a\}$ hat genau dann die endliche Durchschnittseigenschaft, wenn $a > 0$. $\square$

Lemma 4.1.10 *Sei F ein Filter über einer Menge I und $f : I \to J$ eine Funktion. Dann ist $E := \{Y \subseteq J | f^{-1}{}''Y \in D\}$ ein Filter über J.*

Falls F ein Ultrafilter ist, so ist auch E ein Ultrafilter.

Beweis:
E ist ein Filter:

- $f^{-1}{}''J = I \in D$, also ist $J \in E$.
- Seien $X, Y \in E$. Dann ist $f^{-1}{}''(X \cap Y) = f^{-1}{}''X \cap f^{-1}{}''Y \in D$.
- Sei $X \in E, X \subseteq Y$. Dann ist $f^{-1}{}''X \subseteq f^{-1}{}''Y$ und da D ein Filter ist, $f^{-1}{}''Y \in D$.

E ist ein Ultrafilter: Sei $X \subseteq J$.
Falls $f^{-1}{}''X \in D$, dann gilt $I \setminus f^{-1}{}''X = f^{-1}{}''(J \setminus X) \notin D$.
Falls $f^{-1}{}''X \notin D$, dann gilt $I \setminus f^{-1}{}''X = f^{-1}{}''(J \setminus X) \in D$. $\square$

Definition 4.1.11 *F ist ein* **prinzipaler Filter***, falls es ein $p \in B$ gibt mit $F = \{q \in B | p \leq q\}$.*

Äquivalent zu dieser Bedingung ist, daß gilt $\bigwedge F \in F$.

Prinzipale Ultrafilter werden immer von Einermengen erzeugt.

Alle interessanten Filter sind nicht prinzipal. Ein Beispiel für einen nicht prinzipalen Filter ist der **Fréchetfilter**: Sei I eine Menge unendlicher Kardinalität, dann ist der von $\{X \subseteq I | \mathrm{card}(I \setminus X) < \omega\}$ erzeugte Filter der Fréchetfilter über I.

Folgende Definition ist nur für Filter auf Potenzmengenalgebren sinnvoll:

Definition 4.1.12 *Ein Filter F über einer Menge I heißt* **uniform***, wenn alle Elemente des Filters die gleiche Kardinalität haben.*

Wenn F ein uniformer Filter über einer Menge I ist, so haben alle Elemente von F Kardinalität $\operatorname{card}(I)$ (da $I \in F$).

Ein Beispiel für einen uniformen, prinzipalen Filter über ω ist der von der Menge $\{\{2n|n \in \omega\}\}$ erzeugte Filter. Hat ein Filter jedoch die Ultrafiltereigenschaft, so kann er nicht gleichzeitig uniform und prinzipal sein:

Satz 4.1.13 *Jeder uniforme Ultrafilter über einer unendlichen Menge ist kein prinzipaler Filter.*

Beweis:
Sei D ein uniformer Ultrafilter über einer unendlichen Menge I. Dann gilt für jedes $e \in D$ $\operatorname{card}(e) = \operatorname{card}(I)$.

Z.z.: $\bigcap D \notin D$.
Für jedes $i \in I$ liegt die Menge $e_i := I \setminus \{i\}$ in D, da D Ultrafilter ist. Also $\bigcap_{i \in I} e_i = \emptyset \notin D$. □

Die Umkehrung gilt nur für Filter über abzählbar unendlichen Mengen.

Satz 4.1.14 *Sei D ein nichtprinzipaler Ultrafilter über I mit $\operatorname{card}(I) = \omega$. Dann ist D auch uniform.*

Beweis:
Wenn D nichtprinzipal ist, kann D keine endlichen Mengen enthalten. Also haben alle Elemente von D Kardinalität $\geq \omega$. Da $\operatorname{card}(I) = \omega$, ist D uniform.
□

4.2 Vollständige Filter

Dieser Abschnitt führt vollständige Filter und ihren Zusammenhang zu meßbaren Kardinalzahlen ein. Darüberhinaus wird gezeigt, daß sich Vollständigkeit auf Funktionsbilder überträgt (4.2.4) und daß es eine maximale Vollständigkeit gibt, solange der Filter nicht prinzipal ist (4.2.7).

Definition 4.2.1 *Sei δ eine Kardinalzahl. Ein Filter F auf einer Booleschen Algebra B heißt* **$<\delta$-vollständig**, *wenn gilt*

$$\forall A \subseteq F \left(\operatorname{card}(A) < \delta \rightarrow \left(\bigwedge A \textit{ existiert und } \bigwedge A \in F\right)\right).$$

F heißt **vollständig**, *falls F für alle $\delta \in \mathrm{Card}$ $<\delta$-vollständig ist.*
F heißt **$<\delta$-unvollständig**, *wenn F nicht $<\delta$-vollständig ist.*

Definition 4.2.2 *Ein Filter F auf einer Booleschen Algebra B heißt* **abzählbar unvollständig**, *wenn er $<\omega_1$-unvollständig ist.*

Jeder Filter ist ω-vollständig (Bedingung 3 in der Definition des Filters).

Für $\lambda < \delta$ ist jeder $< \delta$-vollständige Filter auch $< \lambda$-vollständig. Umgekehrt ist für $\delta < \mu$ jeder $< \delta$-unvollständige Filter auch $< \mu$-unvollständig.

Wenn ein Filter F vollständig ist, so ist $\bigwedge F \in F$, also ist F prinzipal. Für Filter über I ist ein prinzipaler Filter auch vollständig; für Filter auf einer Booleschen Algebra B nur dann, wenn B auch vollständig ist.

Es gibt auch $<\alpha$-vollständige Ultrafilter, die keine prinzipalen Filter sind, nur sind diese wesentlich schwieriger zu finden.

Lemma 4.2.3 *Sei D Ultrafilter über einer Menge I. Dann ist D genau dann $<\alpha$-vollständig, wenn für jede Partition von I in weniger als α Teile einer der Teile zu D gehört.*

Beweis:
„$\Rightarrow$“: Angenommen, D ist $<\alpha$-vollständig. Sei nun $I = \bigcup_{\eta<\beta} I_\eta$ eine Partition von I in β viele Teile, mit $\beta < \alpha$. Dann ist

$$\bigcap_{\eta<\beta} (I \setminus X_\eta) = \emptyset \notin D.$$

Also gibt es $\eta < \beta$, so daß $I \setminus X_\eta \notin D$, also gilt $X_\eta \in D$.

„$\Leftarrow$“: Angenommen, von jeder Partition in I in weniger als α Teile liegt ein Teil in D.

Sei E eine Teilmenge von D von Mächtigkeit $\beta < \alpha$. Sei $E = \{e_\eta | \eta < \beta\}$ eine Aufzählung von E.

Definiere eine Funktion $f : I \to \beta + 1$ wie folgt:

$$f(i) = \begin{cases} \beta & \text{für } i \in \bigcap E, \\ \text{das kleinste } \eta < \beta, \text{ so daß } i \notin e_\eta & \text{für } i \in I \setminus \bigcap E \end{cases}$$

Mit der Annahme gibt es ein $\eta < \beta + 1$, so daß $f^{-1}(\eta) \in D$. Für jedes $\eta < \beta$ folgt aber aus $f(i) = \eta$, daß $i \notin e_\eta$, also $f^{-1}(\eta) \cap e_\eta = \emptyset$. Da $e_\eta \in D$ gilt, folgt $f^{-1}(\eta) \notin D$. Also muß $f^{-1}(\beta)$ in D sein.

$f^{-1}(\beta) = \bigcap E$, also gilt $\bigcap E \in D$. Damit ist D $<\alpha$-vollständig. □

Es folgt ein Resultat darüber, daß sich die Vollständigkeit auf Bilder überträgt.

Lemma 4.2.4 *Sei D $<\alpha$-vollständiger Ultrafilter über I und $f : I \to J$ eine Funktion. Dann ist $E = \{Y \subseteq J | f^{-1}{}''Y \in D\}$ ein $<\alpha$-vollständiger Ultrafilter über J.*

Beweis:
Mit Lemma 4.1.10 ist E ein Ultrafilter.

Es bleibt die $<\alpha$-Vollständigkeit von E zu zeigen. Sei $Z \subseteq E$ und $\mathrm{card}(Z) = \delta < \alpha$. Sei $(z_i)_{i<\delta}$ eine Aufzählung von Z. Dann

$$f^{-1}{}'' \bigcap_{i<\delta} z_i = \bigcap_{i<\delta} f^{-1}{}'' z_i \in D,$$

also $\bigcap Z \in E$. □

Es gibt ein maximales α, so daß ein Filter F über I vollständig und nicht prinzipal sein kann, nämlich die Kardinalität von I.

Satz 4.2.5 *Sei F ein Filter über I, $\mathrm{card}(I) = \alpha$. Wenn $F < \alpha^+$- vollständig ist, so ist F ein prinzipaler Filter.*

Beweis:
Sei E die Menge aller in F liegenden Komplemente von Einermengen

$$E = \{I \setminus \{i\} | I \setminus \{i\} \in F\}.$$

Da I Mächtigkeit α hat, ist $\mathrm{card}(E) \leq \alpha < \alpha^+$. F ist $<\alpha^+$-vollständig und $E \subseteq F$, also gilt $\bigcap E \in F$.

Andererseits ist jedes $X \in F$ eine Obermenge von $\bigcap E$: Denn wenn $i \notin X$, dann ist $X \subseteq I \setminus \{i\}$, also folgt $I \setminus \{i\} \in F$, $I \setminus \{i\} \in E$ und $i \notin \bigcap E$. Damit ist F der prinzipale Filter, der von $\bigcap E$ erzeugt wird. □

Definition 4.2.6 *Eine Kardinalzahl δ ist* **meßbar***, wenn es einen nicht prinzipalen, $<\delta$-vollständigen Ultrafilter auf δ gibt.*

Zum Beispiel ist ω meßbar, da sich der Fréchetfilters auf ω nach Satz 4.1.8 zu einem Ultrafilter erweitern läßt.

Andererseits ist jedes $n < \omega$ nicht meßbar, da auf endlichen Mengen alle Ultrafilter auch prinzipale Filter sind.

Die Bezeichnung „meßbar" ergibt sich durch folgende Überlegungen:
Wenn D ein Ultrafilter über einer Menge I ist, dann ist die Abbildung

$$\mu : \mathfrak{P}(I) \to \{0, 1\}$$

definiert durch

$$\mu(x) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in D \\ 0, & \text{wenn } x \notin D \end{cases}$$

ein zweiwertiges Maß auf I, das nichttrivial[2] ist, wenn D nicht prinzipal[3] ist, und das β-additiv[4] ist, wenn D $<\beta$-vollständig ist.

Eine Kardinalzahl α ist also genau dann meßbar, wenn es ein nichttriviales zweiwertiges Maß auf α gibt, das β-additiv ist für alle $\beta < \alpha$.

Oft wird in der Definition von Meßbarkeit ω ausgeschlossen, da für die Existenz eines nicht-prinzipalen Ultrafilters auf ω nur das Auswahlaxiom benötigt wird, während die Existenz von größeren meßbaren Kardinalzahlen nur mit stärkeren Zusatzannahmen bewiesen werden kann. Scotts Theorem besagt beispielsweise, daß ω genau dann die einzige meßbare Kardinalzahl ist, wenn das Axiom der Konstruktibilität gilt.[5]

Satz 4.2.7 *Sei D ein nicht prinzipaler Ultrafilter über einer Menge I. Dann existiert eine größte Kardinalzahl α, so daß D $<\alpha$-vollständig ist.*

Darüber hinaus ist α meßbar.

Beweis:
Da D kein prinzipaler Filter ist, gibt es eine kleinste Kardinalzahl β, so daß D nicht $<\beta$-vollständig ist. β kann keine Limeskardinalzahl sein, denn wenn D $<\gamma^+$- vollständig für alle $\gamma < \beta$ ist, dann ist D abgeschlossen unter allen Schnitten von weniger als β Mengen und damit $<\beta$-vollständig.

Also ist β Nachfolgerkardinalzahl, $\beta = \alpha^+$, und α ist die größte Kardinalzahl, so daß D $<\alpha$-vollständig ist.

Es bleibt zu zeigen, daß α meßbar ist.

D ist nicht $<\alpha^+$-vollständig, also gibt es mit Lemma 4.2.3 eine Partition $I = \bigcup_{\eta<\alpha} X_\eta$ von I in α Teile, so daß keine der Mengen X_η zu D gehört.

Sei $f : I \twoheadrightarrow \alpha$ gegeben durch $f(i) = \eta$ gdw. $i \in X_\eta$. Mit Lemma 4.2.4 ist die Menge

$$E = \{Y \subseteq \alpha | f^{-1}(Y) \in D\}$$

ein $<\alpha$-vollständiger Ultrafilter über α. E ist kein prinzipaler Filter, denn sonst wäre $\{\eta\} \in E$ für ein $\eta < \alpha$, womit gölte $X_\eta = f^{-1}(\{\eta\}) \in D$. Damit ist α meßbar. $\square$

[2] D.h. für jedes $J \subseteq I$ mit $\mathrm{card}(J) < \mathrm{card}(I)$ gilt $\mu(J) = 0$.

[3] Ansonsten wäre D von einer Einermenge $\{a\}$ erzeugt und $\mu(x) = 1$ gdw. $a \in x$.

[4] D.h. für $\eta < \beta$ und disjunkte $x_i, i < \eta$, gilt $\mu(\bigcup_{i<\eta} x_i) = \sum_{i<\eta} \mu(x_i)$. Dabei kann für höchstens ein x_i gelten, daß $\mu(x_i) = 1$, da die x_i disjunkt sind und D ein Ultrafilter ist. β-Additivität ist nicht zu verwechseln mit der Additivität einer Funktion.

[5] vgl. [CKe 77], Satz 4.2.18.

4.3 Reguläre Filter

Reguläre Filter spielen eine große Rolle bei der Kardinalitätsbetrachtung von Ultrapotenzen und Booleschen Potenzen. Sie liefern sehr große Ultrapotenzen, sind aber für den Nachweis von Ultrapotenzen singulärer Größe nicht geeignet.

Regularität überträgt sich auf Rudin-Keisler-größere Filter (4.3.6). In Satz 4.3.8 wird die Existenz von regulären Filtern nachgewiesen. Satz 4.3.9 rechtfertigt die Sprechweise regulär für $(\omega, \mathrm{card}(I))$-regulär.

Definition 4.3.1 *Sei F Filter auf einer Booleschen Algebra B. Seien λ, τ Kardinalzahlen. F heißt (λ, τ)-**regulär** gdw. eine Folge $(X_\alpha | \alpha < \tau)$ existiert mit $X_\alpha \in F$ und*

$$\bigwedge_{\alpha \in B'} X_\alpha = 0$$

für alle $B' \subseteq \tau$ mit $\mathrm{card}(B') \geq \lambda$.

*F heißt δ-**regulär**, wenn F (ω, δ)-regulär ist.*

Falls $B = \mathfrak{P}(I)$ für eine Menge I, so wird ein $(\omega, \mathrm{card}(I))$-regulärer Filter **regulär** *genannt.*

Wenn ein Filter δ-regulär ist, dann ist er auch λ-regulär für alle $\omega \leq \lambda < \delta$: Wähle aus $(X_\alpha | \alpha < \delta)$ eine beliebige Teilmenge, z.B. $(X_\alpha | \alpha < \lambda)$ als Zeuge für die λ-Regularität.

Sei F λ-regulär für ein $\lambda \geq \omega$. Dann gilt $\bigwedge F = 0 \notin F$. Also ist F nicht prinzipal.

Satz 4.3.2 *Sei F Filter auf einer Booleschen Algebra und δ-regulär. Dann ist F $<\!\delta^+$-unvollständig.*

Beweis:
Sei $(X_\alpha | \alpha < \delta)$ eine Folge in F, so daß $\bigwedge_{\alpha \in B'} X_\alpha = 0$ für alle $B' \subseteq \delta$ mit $\mathrm{card}(B') \geq \omega$. Dann ist $\{X_\alpha | \alpha \in B'\}$ Zeuge für die $<\!\delta^+$-Unvollständigkeit von F. □

Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht immer: sei F ein Filter auf einer vollständigen Booleschen Algebra B, F $<\!\delta^+$-unvollständig. Dann gibt es ein $E \subseteq F$ mit

$$\mathrm{card}(E) < \delta \text{ und } \bigwedge E \text{ existiert und } \bigwedge E \notin F.$$

Sei $\lambda = \mathrm{card}(E)$. Falls nun F ein Ultrafilter ist, kann man E zu einem E' erweitern, so daß $\bigwedge E' = 0$, nämlich $E' := E \cup (1 - \bigwedge E)$, aber damit ist noch nichts über Schnitte von Teilmengen von E' gesagt.

Die Regularitätsbedingung läßt sich allerdings in folgendem einfachen Fall erfüllen:

Falls nun $\lambda = \omega$ und F Ultrafilter, dann sei $(e'_n)_{n\in\omega}$ eine Aufzählung von E'. Setze

$$\begin{aligned} e''_0 &:= e'_0 \\ e''_n &:= \bigwedge_{m<n} e''_m \wedge e'_n. \end{aligned}$$

Dann ist $E'' := \{e''_n | n \in \omega\} \subseteq F$ und $\mathrm{card}(E'') = \omega$, und für $B' \subseteq \omega$ mit $\mathrm{card}(B') = \omega$ gilt $\bigwedge_{n\in B'} e''_n = 0$.

Also ist F ω-regulär.

Mit der folgenden äquivalenten Formulierung von Regularität kann man mit Filtern auf Potenzmengenalgebren komfortabler arbeiten.

Satz 4.3.3 *Ein Filter F über einer Menge I ist genau dann δ-regulär, wenn es ein $E \subseteq F$ gibt, so daß $\mathrm{card}(E) = \delta$ und jedes $i \in I$ in nur endlich vielen $e \in E$ liegt.*

Beweis:

Sei F δ-regulär. Dann existiert eine Folge $(X_\alpha | \alpha < \delta)$ mit $X_\alpha \in F$ und $\bigcap_{\alpha\in B'} X_\alpha = \emptyset$ für alle $B' \subseteq \delta$ mit $\mathrm{card}(B') \geq \omega$, also insbesondere für jedes abzählbare B'. Dann kann jedes $i \in I$ in nur endlich vielen X_α liegen.

Sei umgekehrt F so, daß es ein $E \subseteq F$ gibt, so daß $\mathrm{card}(E) = \delta$ und jedes $i \in I$ in nur endlich vielen $e \in E$ liegt. Sei $(E_\alpha | \alpha < \delta)$ eine Aufzählung von E. Sei $B' \subseteq \delta$ mit $\mathrm{card}(B') \geq \omega$. Dann gilt $\bigcap_{\alpha\in B'} E_\alpha = \emptyset$. Also ist F δ-regulär. $\square$

Eine weitere äquivalente Bedingung für α-Regularität auf Potenzmengenalgebren folgt:

Satz 4.3.4 *Ein Filter F über I ist genau dann α-regulär, wenn es eine Funktion $f : I \to \mathcal{S}_\omega(\alpha)$ gibt, so daß für jedes $\beta \in \alpha$*

$$\{i \in I | \beta \in f(i)\} \in F.$$

Beweis:

„$\Rightarrow$“: Sei F α-regulär und die α-Regularität werde von $(e_\delta)_{\delta<\alpha}$ bezeugt. Definiere $f : I \to \mathcal{S}_\omega(\alpha)$ durch $f(i) = \{\delta < \alpha | i \in e_\delta\}$.

Sei $\beta \in \alpha$. Dann

$$\{i \in I | \beta \in f(i)\} = \{i \in I | i \in e_\beta\} = e_\beta \in F.$$

„$\Leftarrow$“: Sei $E = \{\{i \in I | \beta \in f(i)\} | \beta \in \alpha\}$. Dann ist $\mathrm{card}(E) = \alpha$ und für $i \in I$ ist $\{\beta \in \alpha | \beta \in f(i)\}$ endlich, das heißt, i ist nur in endlich vielen $e \in E$. $\square$

Die nächste Definition liefert eine partielle Ordnung auf der Menge der Filter.

Definition 4.3.5 *Sei F ein Filter auf $\mathfrak{P}(I)$, G ein Filter auf $\mathfrak{P}(J)$. Dann ist $G \leq_{\mathrm{RK}} F$ in der* **Rudin-Keisler-Ordnung**, *wenn es eine surjektive Funktion $f : I \to J$ gibt, so daß $G = \{x \subseteq J | f^{-1}(x) \in F\}$.*

Es wäre schön, wenn man ein zu Lemma 4.2.4 analoges Resultat auch für reguläre Filter hätte; leider überträgt sich die Regularität nur bei injektiven Funktionen auf ihre Bilder. Ein Beispiel für eine Funktion, die keine Regularität bewahrt, ist $f : I \to J$, so daß es ein $j \in J$ gibt, so daß für alle $i \in I$ gilt $f(i) = j$.

Satz 4.3.6 *Sei α eine Kardinalzahl. Sei F' ein (λ, τ)-regulärer Filter über α mit $F' \leq_{\mathrm{RK}} F$, F Filter über $\delta \geq \alpha$. Dann ist auch F (λ, τ)-regulär.*

Beweis:
Sei $F' \leq_{\mathrm{RK}} F$, das heißt, es gibt eine surjektive Funktion $f : \delta \to \alpha$, so daß $F' = \{M \subseteq \alpha | f^{-1}\text{"} M \in F\}$. Sei $(X'_\eta | \eta < \tau)$ ein Zeuge für die (λ, τ)-Regularität von F'. Definiere für $\eta < \tau$

$$X_\eta := f^{-1}\text{"} X'_\eta.$$

Dann gilt $X_\eta \in F$ und für $B' \subseteq \tau$ mit $\mathrm{card}(B') \geq \lambda$ gilt

$$\bigcap_{\eta \in B'} X_\eta = \bigcap_{\eta \in B'} f^{-1}\text{"} X'_\eta = \bigcap_{\eta \in B'} \{\xi < \delta | f(\xi) \in X'_\eta\}.$$

Für jedes $\xi < \delta$ gibt es ein $\eta \in B'$, so daß $f(\xi) \notin X'_\eta$, da $\bigcap_{\eta \in B'} X'_\eta = \emptyset$. Also folgt

$$\bigcap_{\eta \in B'} X'_\eta = \emptyset.$$

Damit ist F (λ, τ)-regulär. □

Korollar 4.3.7 *Sei D_I ein α-regulärer Ultrafilter über einer Menge I und $f : I \to J$ eine injektive Funktion. Dann ist $D_J := \{Y \subseteq J | f^{-1}\text{"} Y \in D_I\}$ ein α-regulärer Filter auf J.*

Beweis:
Sei $E \subseteq D_I$ Zeuge für die α-Regularität von D_I. Definiere $G := \{Y \subseteq J | f^{-1}\text{"} Y \in E\}$. Dann liegt jedes $j \in J$ nur in endlich vielen $Y \in G$: Angenommen, es gibt ein $j \in J$ mit $\mathrm{card}(\{Y | j \in Y\}) \geq \omega$. Sei $i := f^{-1}(j)$ (das i ist eindeutig, weil f injektiv ist). Dann gilt auch

$$\mathrm{card}(\{X \subseteq I | f^{-1}\text{"} Y = X \wedge X \in E\}) \geq \omega.$$

Aber es gilt $i \in X$ für $X = f^{-1}"Y \ni j$. Das steht im Widerspruch zur α-Regularität von D_I. Damit ist $G \subseteq D_J$ ein Zeuge für die α-Regularität von D_J. $\square$

Der nächste Satz sichert (unter Benutzung des Auswahlaxioms, da man das Ultrafiltertheorem 4.1.8 braucht) die Existenz von α-regulären Ultrafiltern auf Mengen der Mächtigkeit α.

Satz 4.3.8 *Für jede Menge I unendlicher Mächtigkeit α gibt es einen α-regulären Ultrafilter D über I.*

Beweis:
Es genügt, einen solchen Ultrafilter auf einer beliebigen Menge J der Mächtigkeit α zu finden. Sei nämlich D_J dieser Ultrafilter. Sei $(i_\delta)_{\delta<\alpha}$ eine Abzählung von I und $(j_\delta)_{\delta<\alpha}$ eine Abzählung von J; dann ist durch $D_I := \{K \subseteq I | \exists L \in D_J i_\delta \in K \leftrightarrow j_\delta \in L\}$ ein α-regulärer Ultrafilter auf I gegeben.

Wähle nun $J = \mathcal{S}_\omega(\alpha)$. Für $\beta < \alpha$ definiere $\hat{\beta} := \{j \in J | \beta \in j\}$ und $E := \{\hat{\beta} | \beta \in \alpha\}$. Es ist $\text{card}(E) = \alpha$ und für jedes $j \in J$ ist $\text{card}(j) < \omega$, also $\text{card}(\{\beta | \beta \in j\}) < \omega$, das heißt $\text{card}(\{\hat{\beta} | j \in \hat{\beta}\}) < \omega$. Damit ist ein Filter, der E enthält, α-regulär.

E hat die endliche Durchschnittseigenschaft: Seien $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2 \in E$. Dann ist $\{\beta_1, \beta_2\} \in \hat{\beta}_1 \cap \hat{\beta}_2$, also ist der Schnitt nicht leer.

Mit dem Ultrafiltertheorem 4.1.8 läßt sich E zu einem Ultrafilter erweitern. $\square$

Dies ist auch die maximale Regularität, die sich erreichen läßt; schon α^+-Regularität führt auf einen Widerspruch.

Satz 4.3.9 *Sei I eine Menge der unendlichen Mächtigkeit α. Dann gibt es keinen α^+-regulären Filter über I.*

Beweis:
Angenommen, es gäbe doch einen solchen Filter F.

Dann gibt es ein $E \subseteq F, \text{card}(E) = \alpha^+$, so daß für jedes $i \in I$ die Menge $E_i = \{e \in E | i \in e\}$ endlich ist. Es gilt $\bigcup_{i\in I} E_i = E$, aber $\text{card}(\bigcup_{i\in I} E_i) = \text{card}(I) < \alpha^+ = \text{card}(E)$. Widerspruch. $\square$

4.4 Absteigend unvollständige und zerlegbare Filter

Hauptziel dieses Abschnittes ist es, die Äquivalenz von Satz 4.4.3 und Korollar 4.4.8 zu zeigen. Ferner wird Satz 4.4.5 ermöglichen, von zerlegbaren zu uniformen Ultrafiltern überzugehen; ein Hilfsmittel, das sich insbesondere in Kapitel 7.2 als nützlich erweist.

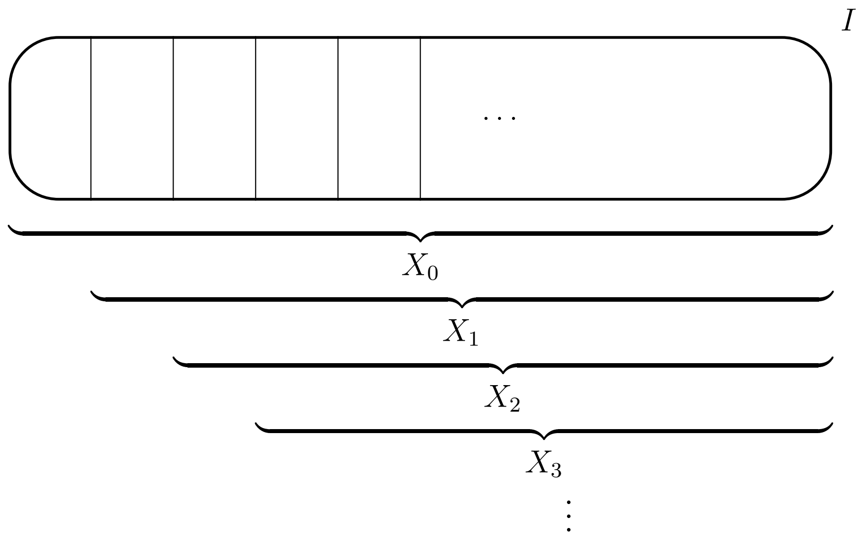

Abbildung 4.2: Absteigende Unvollständigkeit von F

Definition 4.4.1 *Sei F ein Filter über einer Menge I. F heißt* **δ-absteigend unvollständig**, *wenn es eine Familie $(X_\xi)_{\xi<\delta}$ in F gibt, so daß für alle ξ, η, mit $\xi < \eta < \delta$ gilt:*

$$X_\xi \supseteq X_\eta \text{ und } \bigcap_{\xi<\delta} X_\xi = \emptyset.$$

Absteigende Unvollständigkeit vererbt sich weder auf kleinere noch auf größere Kardinalzahlen.

Wenn ein Filter F δ-absteigend unvollständig ist, so sieht man leicht, daß F auch $<\delta^+$-unvollständig ist.

Bei der Umkehrung dieses Resultates hat man das Problem, daß die Menge $E \subseteq F$, die die $<\delta^+$-Unvollständigkeit bezeugt, keine absteigende Kette von Mengen zu sein braucht.

Im Falle $\delta = \omega$ gilt die Umkehrung, da ich nur endliche Schnitte brauche, um die Mengen aus E zu einer absteigenden Kette zu machen.

Also ist ω-absteigend unvollständig äquivalent zu abzählbar unvollständig. Da ein Filter außerdem genau dann ω-regulär ist, wenn er abzählbar unvollständig ist, gilt folgendes Resultat:

Lemma 4.4.2 *Ein Filter F über einer Menge I ist ω-regulär genau dann, wenn es eine abzählbare absteigende Kette*

$$I = I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$$

von Elementen $I_n \in F$ gibt, so daß $\bigcap_{n\in\omega} I_n = \emptyset$.

Satz 4.4.3 *(Kunen und Prikry [KuPr 71]) Sei δ regulär und D ein δ^+-absteigend unvollständiger Ultrafilter auf $\mathfrak{P}(I)$, dann ist D auch δ-absteigend unvollständig.*

Für den Beweis s. Kunen und Prikry [KuPr 71].

Definition 4.4.4 *Sei I eine Menge, F ein Filter auf $\mathfrak{P}(I)$. F ist δ-***zerlegbar** *auf I, wenn es eine Partition $\{I_\eta | \eta < \delta\}$ von I gibt, so daß für alle $M \subseteq \delta, \mathrm{card}(M) < \delta$, gilt: $\bigcup_{\eta\in M} I_\eta \notin F$. Sonst ist F δ-***unzerlegbar**.

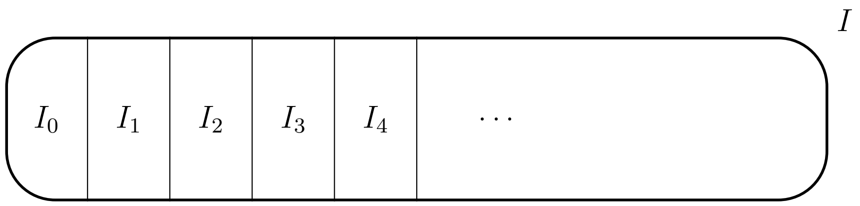

Abbildung 4.3: Zerlegbarkeit von I

Satz 4.4.5 *Seien α und δ Kardinalzahlen. Sei F ein Filter über α. Dann ist F genau dann δ-zerlegbar, wenn es einen uniformen Filter F' über δ gibt mit $F' \leq_{\mathrm{RK}} F$.*

Beweis:
Sei F δ-zerlegbar über α, das heißt es gibt eine Partition $\{\alpha_\eta | \eta < \delta\}$ von α, so daß für alle $M \subseteq \delta$ mit $\mathrm{card}(M) < \delta$ gilt $\bigcup_{\eta\in M} \alpha_\eta \notin F$.

Definiere eine Funktion $f : \alpha \to \delta$ durch

$$f(\beta) := \eta \text{ für } \beta \in \alpha_\eta.$$

Sei $F' := \{x \subseteq \delta | f^{-1}(x) \in F\}$. Angenommen, F' ist nicht uniform. Dann gibt es ein $y \in F'$ mit $\mathrm{card}(y) < \delta$. Aber $f^{-1}(y) = \bigcup_{\eta\in y} \alpha_\eta \notin F$, da F δ-zerlegbar ist.

Sei nun umgekehrt F' uniform auf δ, mit $F' \leq_{\mathrm{RK}} F$. Das heißt, es gibt eine surjektive Funktion $f : \alpha \to \delta$ mit $F' = \{x \subseteq \delta | f^{-1}{}''x \in F\}$.

Definiere eine Partition $\{\alpha_\eta|\eta < \delta\}$ durch

$$\alpha_\eta := f^{-1}\text{"}\{\eta\} \text{ für } \eta < \delta.$$

Sei nun $M \subseteq \delta$ mit $\mathrm{card}(M) < \delta$, dann gilt

$$\bigcup_{\eta \in M} \alpha_\eta = \bigcup_{\eta \in M} f^{-1}(M) \notin F,$$

da wegen der Uniformität von F' gilt $M \notin F'$. □

Satz 4.4.6 *Sei D ein δ-absteigend unvollständiger Ultrafilter. Dann ist D* $\mathrm{cf}(\delta)$*-zerlegbar.*

Beweis:
Sei D δ-absteigend unvollständig, das heißt, es gibt eine Familie $(X_\xi)_{\xi<\delta}$ wie oben beschrieben.

Die Familie $(X'_\xi)_{\xi<\delta}$ sei definiert durch

$$\begin{array}{lll} X'_0 & := & I, \\ X'_{n+1} & := & X_n \text{ für } n < \omega, \\ X'_\eta & := & X_\eta \text{ für } \omega \leq \eta. \end{array}$$

Definiere eine Partition $\{I'_\eta|\eta < \delta\}$ durch $I'_\eta := X'_\eta \setminus X'_{\eta+1}$.

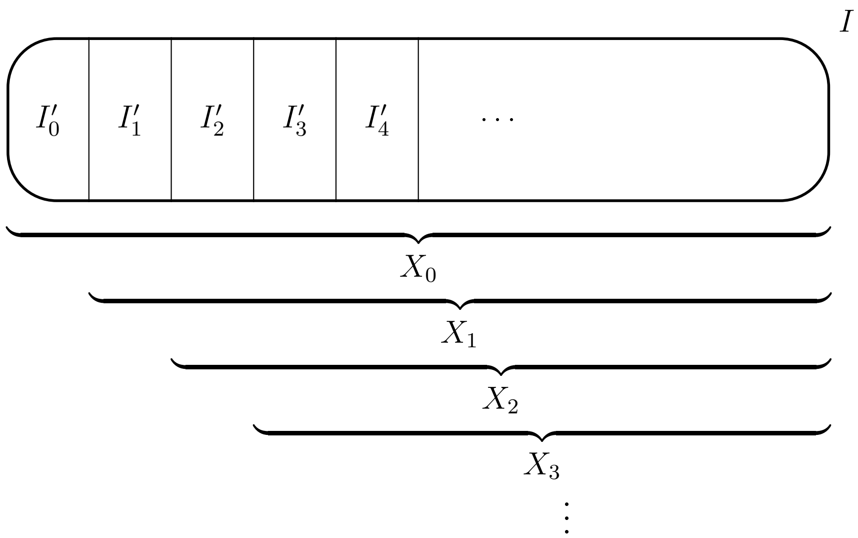

Abbildung 4.4: Definition von $\{I'_\eta|\eta < \delta\}$

Sei $(f(\nu))_{\nu<\mathrm{cf}(\delta)}$ eine konfinale Folge in δ. Definiere nun eine Partition $\{I_\nu|\nu < \mathrm{cf}(\delta)\}$ durch

$$\begin{aligned} I_{\nu+1} &:= \bigcup_{f(\nu)<\eta\leq f(\nu+1)} I'_\eta \\ I_\nu &:= I'_{f(\nu)} \text{ für } \nu \text{ Limes.} \end{aligned}$$

Es gilt für alle $\eta < \delta$

$$I'_\eta \notin D$$

und

$$I_{\nu+1} = \bigcup_{\nu<\eta\leq\nu+1} I'_\eta \subseteq \bigcup_{\eta\leq\nu+1} I'_\eta = I \setminus X_{\nu+2} \notin D.$$

Also erfüllt die Partition das Gewünschte:

- Für alle $\nu < \mathrm{cf}(\delta)$ gilt $I_\nu \notin D$.
- Sei $M \subseteq \mathrm{cf}(\delta)$, $\mathrm{card}(M) < \mathrm{cf}(\delta)$. Sei μ Supremum der Elemente von M. Dann ist $\mu < \mathrm{cf}(\delta)$, da $\mathrm{cf}(\delta)$ regulär ist, und

$$\bigcup_{\eta\in M} I_\eta \subseteq \bigcup_{\eta\leq\mu} I'_\eta = I \setminus X_{\mu+1} \notin D.$$

□

Satz 4.4.7 *Sei D ein δ-zerlegbarer Ultrafilter über einer Menge I. Dann ist D auch δ-absteigend unvollständig.*

Beweis:
Sei D δ-zerlegbar. Sei $\{I_\eta|\eta < \delta\}$ die Partition von I, die die Zerlegbarkeit bezeugt. Definiere für $\eta < \delta$

$$X_\eta := I \setminus \bigcup_{\xi<\eta} I_\xi.$$

Damit ist $X_\eta \in D$. Dann gilt für $\xi < \eta < \delta$, daß $X_\eta \subseteq X_\xi$ und $\bigcap_{\xi<\delta} X_\xi = I \setminus \bigcup_{\xi<\delta} I_\xi = 0$. □

Hiermit erhalten wir das Resultat, das in [Kb 80] als „Satz von Kunen und Prikry“ zitiert wird:

Korollar 4.4.8 *Sei D Ultrafilter auf $\mathfrak{P}(I)$. Sei δ regulär und D δ^+-zerlegbar über I. Dann ist D δ-zerlegbar über I.*

4.5 Gute Ultrafilter

Der Zusammenhang von Gutheit mit anderen Filtereigenschaften (außer der abzählbaren Unvollständigkeit) ist nicht so einfach ersichtlich. Allerdings ist jeder abzählbar unvollständige Ultrafilter auch ω_1-gut (Satz 4.5.5).

Der Nachweis der Existenz eines guten Ultrafilters benötigt Konstruktionen mit Ultrapotenzen oder Booleschen Potenzen, so daß ich ihn erst in den entsprechenden Kapiteln (5.4 und 6.4) führen werde.

Definition 4.5.1 *Sei F ein Filter auf einer Booleschen Algebra B. Eine Funktion $f : \mathcal{S}_\omega(\beta) \to F$ heißt* **monoton**, *wenn für $u, v \in \mathcal{S}_\omega(\beta)$, mit $u \subseteq v$, gilt $f(v) \leq f(u)$.*

f ist **additiv**, *falls $f(u \cup v) = f(u) \wedge f(v)$.*

Eine Funktion $g : \mathcal{S}_\omega(\beta) \to B$ **verfeinert** *f, wenn für alle $x \in S_\omega(\beta)$ gilt $g(x) \leq f(x)$.*

In manchen Büchern wird „additiv“ auch „multiplikativ“ oder „antiadditiv“ genannt (s. z.B. Shelah [Sh 90]).

Definition 4.5.2 *Ein Ultrafilter D heißt* **gut für** λ, *wenn D abzählbar unvollständig ist und jede monotone Funktion $f : \mathcal{S}_\omega(\lambda) \to D$ eine additive Verfeinerung $g : \mathcal{S}_\omega(\lambda) \to D$ hat.*

Definition 4.5.3 *Ein Ultrafilter D heißt* δ**-gut**, *wenn D abzählbar unvollständig und gut für jedes $\lambda < \delta$ ist.*

Lemma 4.5.4 *Sei D ein abzählbar unvollständiger Ultrafilter und α eine Kardinalzahl. Dann ist D genau dann α^+-gut, wenn es zu jeder monotonen Funktion $f : \mathcal{S}_\omega(\alpha) \to D$ eine additive Verfeinerung $g : \mathcal{S}_\omega(\alpha) \to D$ gibt.*

Beweis:
Die Implikation „$\Rightarrow$“ gilt nach Definition. Für die Rückrichtung sei $\beta \leq \alpha$ und sei $f : \mathcal{S}_\omega(\beta) \to D$ eine monotone Funktion. Definiere eine Funktion $f' : \mathcal{S}_\omega(\alpha) \to D$ durch

$$f'(u) := f(u \cap \beta).$$

f' ist monoton. Nach Voraussetzung gibt es eine additive Funktion $g' : \mathcal{S}_\omega(\alpha) \to D$ mit $g' \leq f'$. Sei g die Einschränkung von g' auf $\mathcal{S}_\omega(\beta)$. Dann gilt $g : \mathcal{S}_\omega(\beta) \to D$, g ist additiv und $g \leq f$. Damit ist D α^+-gut. $\square$

Satz 4.5.5 *Jeder abzählbar unvollständige Ultrafilter ist ω_1-gut.*[6]

[6] Wenn man die abzählbare Unvollständigkeit in der Definition der Gutheit wegläßt (wie es zum Beispiel Chang und Keisler in [CKe 77] tun), so kann man sie auch als Voraussetzung im Satz weglassen.

Beweis:
Sei D ein abzählbar unvollständiger Ultrafilter. Zu zeigen ist, daß D gut ist für ω. Sei also $f : \mathcal{S}_\omega(\omega) \to D$ eine monotone Funktion. Definiere eine Funktion $g : \mathcal{S}_\omega(\omega) \to D$ durch

$$g(a) := f(\max a + 1).$$

Es gilt $a \subseteq (\max a + 1)$, also $f(a) \geq f(\max a + 1) = g(a)$. Ferner gilt für $a \subseteq b$, daß $g(a) \geq g(b)$, also

$$\begin{aligned} f(\max(a \cup b) + 1) &= f(\max a + 1) \wedge f(\max b + 1) \\ &= g(a) \wedge g(b). \end{aligned}$$

Damit ist g additiv. $\square$

Kapitel 5

Ultraprodukte und Ultrapotenzen

Neben der Definition von Ultraprodukten und Ultrapotenzen werden in Abschnitt 5.1 ein Expansionstheorem 5.1.3, das Fundamentaltheorem von Łoš 5.1.4 und ein Kompaktheitstheorem 5.1.6 bewiesen.

Abschnitt 5.2 beschäftigt sich mit den Kardinalitäten, die Ultrapotenzen haben können. Für mein Vorhaben ist besonders Satz 5.2.6 wichtig, der besagt, daß eine Ultrapotenz mit einem maximal regulären Filter nicht unerreichbare Größe haben kann.

In Abschnitt 5.3 wird der Nutzen von vollständigen Filtern deutlich: Man kann eine stärkere Version des Fundamentaltheorems zeigen, das für eine überabzählbare Sprache formuliert wird.

Die Existenz eines guten Ultrafilters wird mit Hilfe von Ultrapotenzen in Abschnitt 5.4 nachgewiesen.

Anwendungen für gute Ultrafilter werden in Abschnitt 5.5 kurz vorgestellt.

In Abschnitt 5.6 fasse ich die vorherigen Ergebnisse über Größen von Ultrapotenzen nochmals zusammen und gebe einen Ausblick auf die Literatur.

5.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

Die Einführung, die ich hier gebe, richtet sich im wesentlichen nach [CKe 77].

Sei I eine Menge mit $I \neq \emptyset$, D Ultrafilter über I und $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von nichtleeren Mengen. Sei $C = \prod_{i \in I} A_i$ das Cartesische Produkt über diese Mengen. C ist die Menge aller Funktionen mit Wertebereich I, so daß für alle $i \in I$ gilt $f(i) \in A_i$.

Zwei Funktionen f und g aus $\prod_{i \in I} A_i$ sind D-**äquivalent**, $f =_D g$, wenn

$$\{i \in I | f(i) = g(i)\} \in D.$$

$f_D = \{g \in \prod_{i\in I} A_i | f =_D g\}$ ist die Äquivalenzklasse von f bezüglich D.

Definition 5.1.1 *Das* **Ultraprodukt** *von $(A_i)_{i\in I}$ modulo D ist die Menge aller Äquivalenzklassen von $=_D$. Es wird als $\prod A_i/D$ geschrieben, also*

$$\prod A_i/D = \{f_D | f \in \prod_{i\in I} A_i\}.$$

Dabei heißt I die **Indexmenge** *von $\prod A_i/D$.*

Falls für alle $i \in I$ gilt $A_i = A$, so heißt $\prod A/D$ **Ultrapotenz** *und wird auch A^I/D geschrieben.*

Falls D nur ein Filter ist, so nennt man $\prod A_i/D$ bzw. $\prod A/D$ auch **reduziertes Produkt** *bzw.* **reduzierte Potenz**.

Sei $\mathfrak{L}$ eine Sprache. Sei I eine nichtleere Menge, D Ultrafilter über I und für jedes $i \in I$ sei $\mathfrak{A}_i$ eine $\mathfrak{L}$-Struktur.

In $\mathfrak{A}_i$ seien Relationssymbole R von $\mathfrak{L}$ durch R_i interpretiert, Funktionssymbole F von $\mathfrak{L}$ durch F_i und Konstantensymbole c von $\mathfrak{L}$ durch c_i.

Das Ultraprodukt $\prod \mathfrak{A}_i/D$ ist die $\mathfrak{L}$-Struktur, die folgendermaßen beschrieben wird:

1. Der Träger von $\prod \mathfrak{A}_i/D$ ist $\prod A_i/D$.

2. Sei $\dot{R}$ ein n-stelliges Relationssymbol von $\mathfrak{L}$. Die Interpretation von $\dot{R}$ in $\prod \mathfrak{A}_i/D$ ist die Relation R, so daß

$$R(f_D^1 \dots f_D^n) \text{ gdw. } \{i \in I | R_i(f^1(i) \dots f^n(i))\} \in D.$$

3. Sei $\dot{F}$ n-stelliges Funktionssymbol von $\mathfrak{L}$. Dann wird $\dot{F}$ in $\prod \mathfrak{A}_i/D$ durch die Funktion F interpretiert durch

$$F(f_D^1 \dots f_D^n) = \langle F_i(f^1(i) \dots f^n(i)) | i \in I \rangle_D.$$

4. Sei $\dot{c}$ ein Konstantensymbol von $\mathfrak{L}$. Dann wird $\dot{c}$ von dem Element $c \in \prod \mathfrak{A}_i/D$ interpretiert, wobei

$$c = \langle c_i | i \in I \rangle_D.$$

Um zu zeigen, daß diese Definition konsistent ist, muß man noch prüfen, daß F und R nur von den Äquivalenzklassen abhängen.

Lemma 5.1.2 *Seien $I, D, \mathfrak{A}_i$ wie oben, $f^1, \dots, f^n, g^1, \dots, g^n \in \prod A_i$. Angenommen, $f^1 =_D g^1, \dots, f^n =_D g^n$. Dann gilt*

1. $\{i \in I | R_i(f^1(i) \dots f^n(i))\} \in D$ *gdw.* $\{i \in I | R_i(g^1(i) \dots g^n(i))\} \in D$ *und*

2. $\langle F_i(f^1(i) \dots f^n(i)) | i \in I\rangle =_D \langle F_i(g^1(i) \dots g^n(i)) | i \in I\rangle$.

Beweis:

1. Für Mengen X und Y gilt $X \cap Y \in D$ gdw. $X \in D$ und $Y \in D$, also

$$\begin{array}{ll} & \{i \in I | R_i(f^1(i) \dots f^n(i))\} \in D \\ & \text{und } \{i \in I | f^1(i) = g^1(i) \wedge \dots \wedge f^n(i) = g^n(i)\} \in D \\ \Leftrightarrow & \{i \in I | R_i(f^1(i) \dots f^n(i)) \wedge f^1(i) = g^1(i) \wedge \dots \wedge f^n(i) = g^n(i)\} \in D \\ \Leftrightarrow & \{i \in I | R_i(g^1(i) \dots g^n(i)) \wedge f^1(i) = g^1(i) \wedge \dots \wedge f^n(i) = g^n(i)\} \in D \\ \Leftrightarrow & \{i \in I | R_i(g^1(i) \dots g^n(i))\} \in D \\ & \text{und } \{i \in I | f^1(i) = g^1(i) \wedge \dots \wedge f^n(i) = g^n(i)\} \in D \end{array}$$

2. ergibt sich auch direkt aus den Definitionen:

$$\begin{array}{rcl} \langle F_i(f^1(i) \dots f^n(i)) | i \in I\rangle_D & = & F(f^1_D \dots f^n_D) \\ & = & \langle F_i(g^1(i) \dots g^n(i) | i \in I\rangle_D. \end{array}$$

□

Satz 5.1.3 *(Expansionstheorem)*
Sei $\mathfrak{L}'$ eine Expansion von $\mathfrak{L}$. Sei I eine nichtleere Menge und für jedes $i \in I$ sei $\mathfrak{A}_i$ ein Modell für $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{B}_i$ eine Erweiterung von $\mathfrak{A}_i$ auf $\mathfrak{L}'$. Sei F ein Filter über I.

Dann ist das reduzierte Produkt $\prod \mathfrak{B}_i/F$ eine Expansion des reduzierten Produktes $\prod \mathfrak{A}_i/F$ auf $\mathfrak{L}'$.

Beweis:
Für jedes $i \in I$ haben die Modelle $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{B}_i$ die gleiche Grundmenge, $A_i = B_i$. Also haben die reduzierten Produkte die gleichen Grundmengen $\prod A_i/F = \prod B_i/F$. Da $\mathfrak{B}_i$ eine Erweiterung von $\mathfrak{A}_i$ ist, hat jedes Symbol von $\mathfrak{L}$ die gleiche Interpretation in $\mathfrak{B}_i$ wie in $\mathfrak{A}_i$. Bei der Definition des reduzierten Produktes hängt jede Interpretation eines Symboles von $\mathfrak{L}$ in $\prod \mathfrak{A}_i/F$ nur von den Interpretationen in den Modellen $\mathfrak{A}_i$, von den Grundmengen und vom Filter F ab.

Es folgt, daß jedes Symbol von $\mathfrak{L}$ in $\prod \mathfrak{B}_i/F$ die gleiche Interpretation wie in $\prod \mathfrak{A}_i/F$ hat; also ist $\prod \mathfrak{B}_i/F$ eine Erweiterung von $\prod \mathfrak{A}_i/F$. □

Satz 5.1.4 *(Fundamentaltheorem von Łoš) Sei $\mathfrak{A}$ das Ultraprodukt $\prod \mathfrak{A}_i/D$ und sei I die zugehörige Indexmenge. Dann gilt*

1. *Für jeden Term $t(x_1, \ldots, x_n)$ von $\mathfrak{L}$ und Elemente $f_D^1, \ldots, f_D^n \in A$ gilt*

$$t_{\mathfrak{A}}[f_D^1 \ldots f_D^n] = \langle t_{\mathfrak{A}_i}[f^1(i) \ldots f^n(i)] | i \in I \rangle_D.$$

   Hierbei ist $t_{\mathfrak{A}}$ die Interpretation des Terms t in der Struktur $\mathfrak{A}$-

2. *Sei $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ eine Formel von $\mathfrak{L}$ und seien $f_D^1, \ldots, f_D^n \in A$. Dann gilt*

$$\mathfrak{A} \models \varphi[f_D^1 \ldots f_D^n] \text{ gdw. } \{i \in I | \mathfrak{A}_i \models \varphi[f^1(i) \ldots f^n(i)]\} \in D.$$

3. *Für jeden Satz φ aus $\mathfrak{L}$ gilt*

$$\mathfrak{A} \models \varphi \text{ gdw. } \{i \in I | \mathfrak{A}_i \models \varphi\} \in D.$$

Beweis:
3. folgt direkt aus 1. und 2. Der Beweis von 1. und 2. wird über Induktion nach Term- bzw. Formelaufbau geführt.

1. Sei $t(x_1, \ldots, x_n)$ ein Term von $\mathfrak{L}$. Mit der Definition von Ultraprodukten sieht man, daß 1. gilt, wenn $t(x_1, \ldots, x_n)$ von der Form $F(x_1 \ldots x_n)$ oder ein Konstantensymbol oder eine Variable ist.

   Angenommen,

$$t(x_1, \ldots, x_n) = F(t_1(x_1, \ldots, x_n) \ldots t_m(x_1, \ldots, x_n)),$$

   wobei $F_{\mathfrak{L}}$ ein Funktionssymbol von $\mathfrak{L}$ ist und die Terme $t_1, \ldots, t_m$ alle 1. erfüllen. Dann gilt mit der Definition der Interpretation von Termen

$$t_{\mathfrak{A}}[f_D^1 \ldots f_D^n] = F(t_{1\mathfrak{A}}[f_D^1 \ldots f_D^n] \ldots t_{m\mathfrak{A}}[f_D^1 \ldots f_D^n]),$$

   wobei F die Interpretation von $\dot{F}$ in $\mathfrak{A}$ sei. Mit 1. für $t_1, \ldots, t_m$ gilt für $k \in \{1, \ldots, m\}$

$$t_{k\mathfrak{A}}[f_D^1 \ldots f_D^n] = g_D^k,$$

   wobei $g^k = \langle t_{k\mathfrak{A}_i}[f^1(i) \ldots f^n(i)] | i \in I \rangle$. Mit Punkt 3. bei der Definition von Ultraprodukten gilt

$$F(g_D^1 \ldots g_D^m) = \langle F_1(g^1(i) \ldots g^m(i)) | i \in I \rangle_D.$$

   Mit der Definition der Interpretation von Termen ergibt sich

$$t_{\mathfrak{A}_i}[f^1(i) \ldots f^n(i)] = F_i(g^1(i) \ldots g^m(i)).$$

   Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned} t_{\mathfrak{A}}[f_D^1 \ldots f_D^n] &= F(g_D^1 \ldots g_D^n) \\ &= \langle t_{\mathfrak{A}_i}[f^1(i) \ldots f^n(i)] | i \in I \rangle_D. \end{aligned}$$

   Also erfüllt $t(x_1 \ldots x_n)$ Aussage 1.

2. • φ ist atomar.

(a) $\varphi \equiv r_1 = r_2$, wobei r_1 und r_2 Terme von $\mathfrak{L}$ sind. Mit 1. folgt:

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{A} \models \varphi[f_D^1 \dots f_D^n] \\
\Leftrightarrow\ & r_1^{\mathfrak{A}}[f_D^1 \dots f_D^n] = r_2^{\mathfrak{A}}[f_D^1 \dots f_D^n] \\
\Leftrightarrow\ & \langle r_1^{\mathfrak{A}_i}[f^1(i) \dots f^n(i)] | i \in I \rangle_D = \langle r_2^{\mathfrak{A}_i}[f^1(i) \dots f^n(i)] | i \in I \rangle_D \\
\Leftrightarrow\ & \langle r_1^{\mathfrak{A}_i}[f^1(i) \dots f^n(i)] | i \in I \rangle =_D \langle r_2^{\mathfrak{A}_i}[f^1(i) \dots f^n(i)] | i \in I \rangle \\
\Leftrightarrow\ & \{ i \in I | r_1^{\mathfrak{A}_i}[f^1(i) \dots f^n(i)] = r_2^{\mathfrak{A}_i}[f^1(i) \dots f^n(i)] \} \in D \\
\Leftrightarrow\ & \{ i \in I | \mathfrak{A}_i \models \varphi[f^1(i) \dots f^n(i)] \} \in D.
\end{aligned}$$

(b) $\varphi \equiv R[r_0, \dots, r_{n-1}]$, wobei $r_0, \dots, r_{n-1}$ Terme von $\mathfrak{L}$ sind. Es gilt

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{A} \models R[r_0(f_D^0 \dots f_D^m), \dots, r_{n-1}(f_D^0 \dots f_D^m)] \\
\Leftrightarrow\ & \{ i \in I | R^{\mathfrak{A}_i}(r_0(f^0(i) \dots f^m(i)) \dots r_{n-1}(f^0(i) \dots f^m(i))) \} \in D \\
\Leftrightarrow\ & \{ i \in I | \mathfrak{A}_i \models R_i[r_0(f^0(i) \dots f^m(i)) \dots r_{n-1}(f^0(i) \dots f^m(i))] \} \in D.
\end{aligned}$$

• $\varphi \equiv \neg\psi$ und 2. gilt für ψ. Es gilt

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{A} \models \varphi[f_D^1 \dots f_D^n] \\
\Leftrightarrow\ & \text{nicht: } \mathfrak{A} \models \psi[f_D^1 \dots f_D^n] \\
\Leftrightarrow\ & \{ i \in I | \mathfrak{A}_i \models \psi[f^1(i) \dots f^n(i)] \} \notin D
\end{aligned}$$

Da D ein Ultrafilter ist, ist die letzte Zeile äquivalent zu

$$\begin{aligned}
& \{ i \in I | \neg\mathfrak{A}_i \models \psi[f^1(i) \dots f^n(i)] \} \in D \\
\Leftrightarrow\ & \{ i \in I | \mathfrak{A}_i \varphi[f^1(i) \dots f^n(i)] \} \in D.
\end{aligned}$$

• $\varphi \equiv (\psi \land \chi)$ und 2. gilt für ψ und χ.
Da D als Filter gegen Schnitte und Obermengenbildung abgeschlossen ist, gilt für je zwei Teilmengen x, y von I

$$(x \in D \land y \in D) \Leftrightarrow x \cap y \in D.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{A} \models \varphi[f_D^1 \dots f_D^n] \\
\Leftrightarrow\ & \mathfrak{A} \models \psi[f_D^1 \dots f_D^n] \text{ und } \mathfrak{A} \models \chi[f_D^1 \dots f_D^n] \\
\Leftrightarrow\ & \{ i \in I | \mathfrak{A}_i \models \psi[f^1(i) \dots f^n(i)] \} \in D \\
& \text{ und } \{ i \in I | \mathfrak{A}_i \models \chi[f^1(i) \dots f^n(i)] \} \in D \\
\Leftrightarrow\ & \{ i \in I | \mathfrak{A}_i \models \psi[f^1(i) \dots f^n(i)] \} \\
& \cap \{ i \in I | \mathfrak{A}_i \models \chi[f^1(i) \dots f^n(i)] \} \in D \\
\Leftrightarrow\ & \{ i \in I | \mathfrak{A}_i \models \psi[f^1(i) \dots f^n(i)] \land \mathfrak{A}_i \models \chi[f^1(i) \dots f^n(i)] \} \in D \\
\Leftrightarrow\ & \{ i \in I | \mathfrak{A}_i \models \varphi[f^1(i) \dots f^n(i)] \} \in D.
\end{aligned}$$

- $\varphi \equiv \forall x \psi$ und 2. gilt für ψ.
  Behauptung: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
  (a) Für alle $f_D \in A$ gilt, falls f Repräsentant von f_D ist,
  $$\{i \in I | \mathfrak{A}_i \models \psi[f(i) f^1(i) \ldots f^n(i)]\} \in D.$$
  (b) $\{i \in I | \forall a \in A_i \ \mathfrak{A}_i \models \psi[a f^1(i) \ldots f^n(i)]\} \in D.$
  Beweis der Behauptung:
  (a)$\Rightarrow$(b): Angenommen, (a) gilt und die Menge aus (b) ist nicht in D. Da D ein Ultrafilter ist, ist dann
  $$Z := \{i \in I | \exists a \in A_i : \ \neg \mathfrak{A}_i \models \psi[a f^1(i) \ldots f^n(i)]\} \in D.$$
  Definiere mit Hilfe des Auswahlaxioms eine Funktion $f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ durch
  $$f(i) := \begin{cases} \text{ein } a \in A_i \text{ mit nicht: } \mathfrak{A}_i \models \psi[a f^1(i) \ldots f^n(i)], & \text{falls } i \in Z, \\ \text{ein beliebiges } a \in A_i & \text{sonst.} \end{cases}$$
  Wegen $Z = \{i \in I | \neg \mathfrak{A}_i \models \psi[f(i) f^1(i) \ldots f^n(i)]\}$ ist
  $$\{i \in I | \neg \mathfrak{A}_i \models \psi[f(i) f^1(i) \ldots f^n(i)]\} \in D.$$
  Nach Voraussetzung liegt aber das Komplement dieser Menge in D. Also muß die Menge aus (b) doch in D sein.
  (b)$\Rightarrow$(a): Sei $f \in \prod_{i \in I} A_i$ beliebig. Wegen
  $$\{i \in I | \mathfrak{A}_i \models \psi[f(i) f^1(i) \ldots f^n(i)]\} \supseteq \tag{5.1}$$
  $$\{i \in I | \forall a \in A_i \ \mathfrak{A}_i \models \psi[a f^1(i) \ldots f^n(i)]\} \tag{5.2}$$
  gilt mit (b) auch (a).
  Damit gilt die Behauptung.
  Nun folgt
  $$\begin{array}{cc} & \mathfrak{A} \models \varphi[f_D^1 \ldots f_D^n] \\ \Leftrightarrow & \forall a \in A \ \mathfrak{A} \models \psi[a f_D^1 \ldots f_D^n] \\ \Leftrightarrow & \forall f_D \in A \ \mathfrak{A} \models \psi[f_D f_D^1 \ldots f_D^n] \\ \Leftrightarrow & \forall f_D \in A \{i \in I | \mathfrak{A}_i \models \psi[f(i) f^1(i) \ldots f^n(i)]\} \in D \\ \Leftrightarrow & \{i \in I | \forall a \in A_i \ \mathfrak{A}_i \models \psi[a f^1(i) \ldots f^n(i)]\} \in D \\ \Leftrightarrow & \{i \in I | \mathfrak{A}_i \models \varphi[f^1(i) \ldots f^n(i)]\} \in D. \end{array}$$

Damit ist die Induktion vollständig. □

Korollar 5.1.5 *Sei $\mathfrak{A}^I/D$ eine Ultrapotenz von $\mathfrak{A}$. Dann $\mathfrak{A}^I/D \equiv \mathfrak{A}$.*

Korollar 5.1.6 *(Kompaktheitssatz) (Frayne, Morel und Scott [FMS 62]) Sei Σ eine Menge von Sätzen, so daß jede endliche Teilmenge von Σ ein Modell hat. Dann hat Σ ein Modell.*

Beweis:
Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß Σ unter endlichen Konjunktionen abgeschlossen ist.

Sei $\Sigma = \{\varphi_i | i \in I\}$. Nach Voraussetzung gibt es Strukturen $\mathfrak{A}_i$, so daß für jedes $i \in I$ $\mathfrak{A}_i$ ein Modell für φ_i ist.

Wir wollen einen Ultrafilter D auf $\mathcal{P}(I)$ konstruieren, so daß $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/D$ ein Modell von Σ ist.

Sei dazu für jedes $j \in I$

$$J_j = \{i \in I | \mathfrak{A}_i \text{ ist Modell von } \varphi_j\}.$$

Da $j \in J_j$, ist $J_j \neq \emptyset$, und $J_j \cap J_k = J_\ell$, wobei ℓ so gewählt sei, daß $\varphi_j \wedge \varphi_k$ der Satz φ_ℓ ist.

Also gibt es einen Ultrafilter D, der alle J_j enthält. Mit Satz 5.1.4 folgt, daß jedes φ_j wahr ist in $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/D$; also ist $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/D$ ein Modell von Σ.
□

Sei $I \neq \emptyset, D$ Ultrafilter über I und A ein Modell. Eine natürliche Einbettung von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}^I/D$ ist die Funktion d, so daß $d(a)$ die Äquivalenzklasse der konstanten Funktionen mit Wert a ist

$$d(a) = \langle a | i \in I\rangle_D.$$

Der Wertebereich von d wird mit $d(A)$ bezeichnet und die Einschränkung von $\mathfrak{A}^I/D$ auf $d(A)$ mit $d(\mathfrak{A})$.

Korollar 5.1.7 *Sei $\mathfrak{A}$ ein Modell und D ein Ultrafilter. Dann ist die natürliche Einbettung von $\mathfrak{A}$ in die Ultrapotenz $\mathfrak{A}^I/D$ eine elementare Einbettung.*

Beweis:
Sei $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ Formel von $\mathfrak{L}$ und $a_1, \ldots, a_n \in A$. Dann gilt mit Satz 5.1.4:

$$\begin{array}{ll} & \mathfrak{A}^I/D \models \varphi[d(a_1)\ldots d(a_n)] \\ \text{gdw.} & \{i \in I | \mathfrak{A} \models \varphi[a_1 \ldots a_n]\} \in D \\ \text{gdw.} & \mathfrak{A} \models \varphi[a_1 \ldots a_n]. \end{array}$$

□

d ist also ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $d(\mathfrak{A})$ und $d(\mathfrak{A})$ ist ein elementares Submodell von $\mathfrak{A}^I/D$.

In Kapitel 5.2.2 beschäftige ich mich auch noch mit der Frage, wann d eine echte Einbettung ist.

5.2 Größe von Ultrapotenzen

Im folgenden werden einige Ergebnisse über mögliche Kardinalitäten von Ultraprodukten und Ultrapotenzen zusammengestellt. Dabei beschränke ich mich (bis auf Satz 5.2.2) auf Ultrapotenzen von unendlichen Strukturen. Nach der allgemeinen Abschätzung in Satz 5.2.1 und einem Satz von Shelah (5.2.2) wende ich mich dem Speziallfall von Ultrapotenzen mit regulären Ultrafiltern zu. Man kann beliebig große Ultrapotenzen finden (Korollar 5.2.5); allerdings nicht in dem Sinne, daß man einen vorgegebenen Wert erreicht. Es ist nur möglich, einen solchen zu überschreiten. Satz 5.2.6 besagt, daß reguläre Ultrafilter für das Vorhaben, eine Ultrapotenz mit unerreichbarer Kardinalität zu finden, nicht geeignet sind.

Im nächsten Abschnitt gebe ich einige Eigenschaften von Ultrapotenzen mit ($<\delta$-)vollständigen Ultrafiltern an. Wenn Filter zu vollständig sind, werden die mit ihnen erzeugten Ultrapotenzen trivial. Satz 5.2.12 gibt eine Eingrenzung von möglichen Kardinalitäten von Ultrapotenzen von ω (s. auch Satz 6.3.6 über Kardinalitäten von Booleschen Potenzen von ω).

Satz 5.2.1 *Sei F ein Filter über I. Dann gilt*

1. *Wenn* $\operatorname{card}(A_i) = \operatorname{card}(B_i)$ *für alle* $i \in I$*, dann gilt auch*
$$\operatorname{card}(\prod A_i/F) = \operatorname{card}(\prod B_i/F).$$
2. *Wenn* $\operatorname{card}(A_i) \leq \operatorname{card}(B_i)$ *für alle* $i \in I$*, dann gilt auch*
$$\operatorname{card}(\prod A_i/F) \leq \operatorname{card}(\prod B_i/F).$$
3. $\operatorname{card}(\prod A_i/F) \leq \operatorname{card}(\prod_{i\in I} A_i)$.
4. $\operatorname{card}(A) \leq \operatorname{card}(A^I/F) \leq \operatorname{card}(A)^{\operatorname{card}(I)}$.

Beweis:

1. Da $\operatorname{card}(A_i) = \operatorname{card}(B_i)$ für alle $i \in I$, gibt es Bijektionen $f_i : A_i \to B_i$. Diese induzieren eine Bijektion $f : \prod A_i/F \to \prod B_i/F$.

2. Da $\mathrm{card}(A_i) \leq \mathrm{card}(B_i)$ für alle $i \in I$, gibt es Injektionen $f_i : A_i \rightarrow B_i$. Diese induzieren eine Injektion $f : \prod A_i/F \rightarrow \prod B_i/F$.

3. Bei der Bildung des Ultraprodukts faßt man Elemente von $\prod A_i$ zu Äquivalenzklassen zusammen. Es kann aber nicht mehr Äquivalenzklassen geben als es Elemente gibt.

4. Für jedes $a \in A$ gibt es eine konstante Funktion $f_a : I \rightarrow \{a\}$. Insbesondere ist jedes $f_a \in A^I$. Für $a \neq b$ gilt $\{i|f_a(i) = f_b(i)\} = \emptyset$, also liegen die Funktionen in disjunkten Äquivalenzklassen bezüglich F, d.h. durch $a \mapsto f_{aF}$ ist eine injektive Abbildung von A nach A^I/F gegeben.

   Die zweite Ungleichung ist ein Spezialfall von 3., da

$$\mathrm{card}(A^I) = \mathrm{card}(A)^{\mathrm{card}(I)}.$$

□

Das folgende Resultat war das erste Ergebnis über die Eigenschaften von Kardinalzahlen, die Größen von Ultrapotenzen sind. Es behandelt nur Ultraprodukte von endlichen Mengen; für Ultrapotenzen über unendlichen Strukturen mit regulären Ultrafiltern gibt es aber ein ähnliches Resultat (5.2.7).

Satz 5.2.2 *(Shelah [Sh 70]) Sei D ein Ultrafilter über einer Menge I und $n_i \in \omega$ für $i \in I$, so daß $\omega \leq \lambda = \mathrm{card}(\prod n_i/D)$. Dann gilt $\lambda^\omega = \lambda$.*

Beweis:
Das wird bewiesen, indem man λ^ω injektiv auf λ abbildet.

Falls D $<\omega_1$-vollständig ist, so gilt $\mathrm{card}(\prod n_i/D) < \omega$ (s. z.B. [BeSl 69], Korollar 3.9). Also ist D $<\omega_1$-unvollständig. Sei

$$\mathfrak{A} := \langle \omega, <, +, [\sqrt[4]{.}], \cdot\frac{1}{2}, ()^2, ()^4 \rangle.^1$$

Bilde die Ultrapotenz $\mathfrak{M} := \mathfrak{A}^I/D$. Mit Satz 5.1.5 ist $\mathfrak{M}$ elementar äquivalent zu $\mathfrak{A}$, so daß die üblichen Rechenregeln auch in $\mathfrak{M}$ gelten.Mit Satz 4.5.5 folgt aus Satz 5.5.1, daß $\mathfrak{M}$ $\aleph_1$-saturiert ist.

Seien nun $m, n \in \omega$. Sei $b := \langle n_i | i \in I \rangle_D$. Definiere

$$\mathrm{card}(b) := \mathrm{card}(\{a | a < b\}).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{card}(b) &= \mathrm{card}(\{a | a < \langle n_i | i \in I \rangle_D\}) \\ &= \mathrm{card}(\prod n_i/D) \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

[1]Dabei sei [.] die Gaußklammerfunktion.

Also genügt es, folgende Behauptung zu zeigen:

$$\text{card}(b)^{\aleph_0} = \text{card}(b). \tag{5.3}$$

Beweis von (5.3):
Definiere eine Folge $(b_n)_{n\in\omega}$ durch:

$$\begin{aligned} b_0 &:= [\sqrt[4]{b}] \\ b_{n+1} &:= [\sqrt[4]{b_n}] \end{aligned}$$

Es gilt

$$b_{n+1}^2 < \frac{b_n}{2} \tag{5.4}$$

und damit für $n_1 < n_2$

$$\sum_{n_1<n<n_2} b_n^2 < b_{n_1},$$

weil $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < 1$, und außerdem

$$\text{card}(b_n) = \text{card}(b) = \lambda,$$

weil $\text{card}([\sqrt[4]{b}]) = \text{card}(b)$ für unendlich großes b.

Sei

$$C := \{(c_n)_{n<\omega} | \forall n < \omega \ c_n < b_n\}$$

Es gilt

$$\text{card}(C) = \text{card}(\{(c_n)_{n<\omega} | \forall n < \omega \ c_n < b_n\}) = \prod_{n<\omega} \text{card}(b_n) = \lambda^{\aleph_0}.$$

Für jedes $\bar{c} := (c_n)_{n<\omega} \in C$ definiere

$$p(\bar{c}) := \left\{ \sum_{n\leq m} c_n b_n < x < \sum_{n\leq m} c_n b_n + b_m | m < \omega \right\}.$$

Mit $m_1 < m_2$ folgt

$$\sum_{n\leq m_1} c_n b_n \leq \sum_{n\leq m_2} c_n b_n < \sum_{n\leq m_2} c_n b_n + b_{m_2} \leq \sum_{n\leq m_1} c_n b_n + b_{m_1}.$$

Die letzte Ungleichung gilt, da

$$b_{m_2} = \sqrt[4^{m_2-m_1}]{b_{m_1}} \leq \frac{b_{m_1}}{2^{m_2-m_1}}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\sum_{m_1<n\leq m_2} c_n b_n + b_{m_2} &\leq \sum_{m_1<n\leq m_2} b_n^2 + b_{m_2} \\
&\leq \sum_{m_1\leq n<m_2} \frac{b_{m_1}}{2^{m_2-n}} + b_{m_2}, \text{ durch iterierte Anwedung von (5.4)} \\
&\leq \sum_{m_1\leq n<m_2} \frac{b_{m_1}}{2^{m_2-n}} + \frac{b_{m_1}}{2^{m_2-m_1}} \\
&\leq b_{m_1}.
\end{aligned}$$

Also ist jede endliche Teilmenge von $p(\bar{c})$ erfüllbar in $\mathfrak{M}$. Da $\mathfrak{M}$ $\aleph_1$-saturiert ist, wird $p(\bar{c})$ in $\mathfrak{M}$ von einem eindeutigen $a(\bar{c})$ realisiert.

Es gilt für alle $m < \omega$

$$a(\bar{c}) < \sum_{n\leq m} c_n b_n + b_m,$$

also insbesondere

$$a(\bar{c}) < \sum_{n\leq 0} c_n b_n + b_0 = c_0 b_0 + b_0 = (c_0+1)b_0 \leq b_0^2 = [\sqrt[4]{b}] < b$$

Die vorletzte Ungleichung gilt, weil $c_0 < b_0$ nach Definition von C.

(5.5) Die Funktion $a : C \to \mathfrak{M}$ ist injektiv.

Beweis von (5.5):
Angenommen, $\bar{c}^1 \neq \bar{c}^2, \bar{c}^1 = (c_n^1)_{n<\omega}, \bar{c}^2 = (c_n^2)_{n<\omega}$. Es gibt $m < \omega$, so daß $c_n^1 = c_n^2$ für $n < m$ und $c_m^1 \neq c_m^2$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $c_m^1 > c_m^2$. Also ist

$$a(\bar{c}^1) \geq \sum_{n\leq m} c_n^1 b_n = \sum_{n<m} c_n^1 b_n + c_m^1 b_m \geq \sum_{n<m} c_n^2 b_n + (c_m^2+1)b_m > a(\bar{c}^2).$$

Die vorletzte Ungleichung gilt, da $\sum_{n\leq m} c_n^1 b_n = \sum_{n\leq m} c_n^2 b_n$ nach Voraussetzung und $c_m^1 \geq c_m^2 + 1$.

Damit $a(\bar{c}^1) \neq a(\bar{c}^2)$, also (5.5).

Also folgt

$$\lambda = \mathrm{card}(b) = \mathrm{card}(\{a|a<b\}) \geq \mathrm{card}(\{a(\bar{c})|\bar{c}\in C\}) = \mathrm{card}(C) = \lambda^{\aleph_0}.$$

Damit gilt (5.3). □

5.2.1 ... mit δ-regulären Ultrafiltern

Der Einfluß von regulären Ultrafiltern auf die Größe der Ultrapotenzen ist relativ gut bekannt. Allerdings zeigt Satz 5.2.4, daß Ultrapotenzen mit regulären Ultrafiltern keine singuläre Kardinalität haben können, insbesondere keine unerreichbare (Satz 5.2.6). Mit regulären Ultrafiltern erhält man jedoch große Ultrapotenzen im Sinne von Korollar 5.2.5.

Zur Erinnerung noch einmal die Definition von regulären Filtern in der äquivalenten Version für Mengen (Definition 4.3.3):

Definition 5.2.3 *Ein Filter F über einer Menge I heißt α-**regulär**, wenn es ein $E \subseteq F$ gibt, so daß* $\mathrm{card}(E) = \alpha$ *und jedes $i \in I$ in nur endlich vielen $e \in E$ liegt.*

Satz 5.2.4 *Sei F ein α-regulärer Filter über I,* $\mathrm{card}(I) = \alpha$. *Falls A unendlich groß ist, dann*

$$\mathrm{card}(A^I/F) = \mathrm{card}(A)^\alpha.$$

Beweis:
$\mathrm{card}(A^I/F) \leq \mathrm{card}(A)^\alpha$ gilt mit 5.2.1 *i*).

Es bleibt zu zeigen:

$$\mathrm{card}(A)^\alpha \leq \mathrm{card}(A^I/F). \tag{5.6}$$

Sei dazu B die Menge der endlichen Sequenzen von Elementen aus A. Da A unendlich groß ist, gilt $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$.

F ist α-regulär, das heißt, es gibt $E \subseteq F, \mathrm{card}(E) = \alpha$ und für alle $i \in I$ ist $\mathrm{card}(\{e \in E | i \in e\}) < \omega$. Also genügt es, eine injektive Funktion $\pi : A^E \to \prod B/F$ zu finden, um (5.6) zu zeigen.

Für jedes $g : E \to A$ definiere ein $g' : I \to B$, so daß $\pi g = g'_F$:

Sei $\leq$ eine Wohlordnung auf E. Zu jedem $i \in I$ seien $e_1(i), \ldots, e_n(i)$ die Elemente von E, in denen i vorkommt; die $e_j(i)$ seien mit $\leq$ geordnet.

Sei $g \in A^E$. Definiere $g' : I \to B$ durch

$$g'(i) := (g(e_1(i)), \ldots, g(e_n(i)))$$

und definiere π durch $\pi g := g'_F$. Es bleibt zu zeigen, daß π injektiv ist. Seien also $g, h \in A^E, g \neq h$. Dann gibt es ein $e \in E$, so daß $g(e) \neq h(e)$. Für jedes $i \in e$ existiert dann ein $k(i)$ mit $e = e_{k(i)}(i)$. Somit gilt

$$g'(i) = (\ldots, g(e_{k(i)}(i)), \ldots) \neq (\ldots, h(e_{k(i)}(i)), \ldots) = h'(i)$$

für alle $i \in e$.

Es gilt $e \in F$, also $\{i \in I | g'(i) \neq h'(i)\} \in F$ und damit $\pi g = g'_F \neq h'_F = \pi h$. Also ist π injektiv und (5.6) gilt. □

Korollar 5.2.5 *Sei κ eine Kardinalzahl, $\mathfrak{A}$ eine Struktur unendlicher Größe. Dann gibt es eine Ultrapotenz $\mathfrak{A}^I/D$ von $\mathfrak{A}$, so daß* $\mathrm{card}(\mathfrak{A}^I/D) \geq \kappa$.

Beweis:
Wähle α so, daß $\mathrm{card}(\mathfrak{A})^\alpha \geq \kappa$ und wende Satz 5.2.4 an. □

Damit ist nicht gesagt, daß man die intendierte Größe der Ultrapotenz beliebig wählen kann, sondern daß man zu jeder Kardinalzahl eine mindestens so große Ultrapotenz findet. Im allgemeinen kann man so eine Größe allerdings nicht vorgeben.

Satz 5.2.6 *Sei κ unerreichbar, $\aleph_0 \leq \mathrm{card}(A) \leq \kappa$. Dann gibt es zu keiner Kardinalzahl α einen α-regulären Filter F über α mit* $\mathrm{card}(A^\alpha/F) = \kappa$.

Beweis:
Angenommen, es gäbe so eine Kardinalzahl α, daß $\kappa = \mathrm{card}(A^\alpha/F)$. Dann gilt $\mathrm{card}(A^\alpha/F) = \mathrm{card}(A)^\alpha$ mit Satz 5.2.4.

Fall 1: $\alpha < \kappa$. Dann sind sowohl $\mathrm{card}(A) < \kappa$ als auch $\alpha < \kappa$, im Widerspruch zur Unerreichbarkeit von κ.

Fall 2: $\alpha \geq \kappa$. Mit dem Korollar aus dem Lemma von König 2.2.4 gilt $\mathrm{cf}(\mathrm{card}(A)^\alpha) > \alpha$, also insbesondere $\alpha < \mathrm{card}(A)^\alpha = \kappa$. Widerspruch. □

Für den nächsten Satz ist zu beachten, daß für $\alpha \geq \omega$ ein α-regulärer Filter immer auch ω-regulär ist (s. Abschnitt 4.3).

Satz 5.2.7 *Sei F ein ω-regulärer Filter. Wenn A unendlich groß ist, dann ist* $\mathrm{card}(A^I/F) = \mathrm{card}(A^I/F)^\omega$.

Beweis:
Sei B die Menge der endlichen Sequenzen von Elementen aus A, dann gilt $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$.

Wir suchen eine surjektive Funktion ϑ von einer Teilmenge von B^I/F auf $(A^I/F)^\omega$. Dafür genügt es, eine Funktion $\sigma : (A^I)^\omega \to B^I$ zu finden, so daß

$$\text{(5.7)}\qquad \begin{array}{l}\text{Wenn } g, h \in (A^I)^\omega \text{ und } \sigma g =_F \sigma h,\\ \text{dann gilt } g(n) =_F h(n) \text{ für alle } n \in \omega.\end{array}$$

Denn dann definiere ϑ durch: Wenn $\sigma g = f$, dann $\vartheta(f_F) := (g(0)_F, g(1)_F, \ldots)$. ϑ ist wohldefiniert, da ϑ gerade über seine Bilder definiert wird, und F Äquivalenzklassen bildet; also ist die Eindeutigkeit gewährleistet.

ϑ ist surjektiv: Sei $g_D \in (A^I/F)^\omega$. Wähle einen Repräsentanten $g \in (A^I)^\omega$ für g_F, dann $f := \sigma g$ und $\vartheta(f_F) = g_F$.

Also ist noch σ zu suchen.

Da F ω-regulär ist, gibt es $I = I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$, mit $I_n \in F$, so daß $\bigcap_n I_n = \emptyset$ (Lemma 4.4.2). Dann gibt es für alle $i \in I$ ein eindeutiges $k(i)$, so daß

$$i \in I_{k(i)} \setminus I_{k(i)+1}.$$

Für jede Funktion $g \in (A^I)^\omega$ definiere

$$(\sigma g)(i) := \langle g(1)(i), \ldots, g(k(i))(i) \rangle.$$

σ erfüllt (5.7):

Seien $g, h \in (A^I)^\omega$, so daß $\sigma g =_F \sigma h$, das heißt, $X = \{i \in I | (\sigma g)(i) = (\sigma h)(i)\} \in F$. Für jedes $n \in \omega$ gilt $X \cap I_n \in F$. Wenn $i \in X \cap I_n$, dann $n \leq k(i)$, also $g(n)(i) = h(n)(i)$.

Also $g(n) =_F h(n)$ für alle $n < \omega$. Damit ist (5.7) gezeigt. $\square$

Mit dem Korollar aus dem Lemma von König (2.2.4) folgt, daß mit den Voraussetzungen des Satzes gilt $\mathrm{card}(A^I/F) > \omega$.

5.2.2 ... mit $<\delta$-vollständigen Ultrafiltern

Vollständige Ultrafilter liefern vergleichsweise kleine Ultrapotenzen; die Sätze 5.2.9 bis 5.2.11 geben Bedingungen dafür an, wann die Ultrapotenz minimale Größe (d.h. Größe der zugrundeliegenden Struktur) hat. Satz 5.2.12 liefert Ergebnisse über Größen von Ultrapotenzen von ω.

Es sei noch einmal an Definition 4.2.1 (in der Version für Potenzmengen) erinnert:

Definition 5.2.8 *Ein Filter F über einer Menge I heißt* **$<\delta$-vollständig**, *wenn für alle $A \subseteq F$ gilt*

$$\mathrm{card}(A) < \delta \rightarrow \bigcap A \in F.$$

F heißt **vollständig**, *falls F für alle Kardinalzahlen δ $<\delta$-vollständig ist.*

Satz 5.2.9 *Sei $\mathfrak{A}$ Struktur der Mächtigkeit α und sei D ein Ultrafilter. Dann bildet die natürliche Einbettung $d\,\mathfrak{A}$ genau dann surjektiv auf $\mathfrak{A}^I/D$ ab, wenn D $<\alpha^+$-vollständig ist.*

Beweis:
„$\Leftarrow$“: Angenommen, D ist $<\alpha^+$-vollständig. Sei $f_D \in A^I/D$ mit Repräsentantem f.

Da $\mathrm{card}(A) = \alpha$, wird I durch $I = \bigcup\{f^{-1}(a) | a \in A\}$ in weniger als α^+ viele Teile geteilt.

Mit Lemma 4.2.3 gibt es $a \in A$, so daß $f^{-1}(a) \in D$. Damit gilt $d(A) = A^I/D$.

„⇒“: Angenommen, d bildet $\mathfrak{A}$ surjektiv auf $\mathfrak{A}^I/D$ ab.

Sei $I = \bigcup_{\eta<\beta} X_\eta$ eine Partition von I in $\beta < \alpha^+$ Teile. Da $\beta \leq \alpha = \operatorname{card}(A)$, können wir die Mengen X_η mit Indizes von A umnummerieren, z.B.

$$I = \bigcup_{a \in B} X_a,$$

mit $B \subseteq A$.

Sei $f : I \to A$ gegeben durch $f(i) = a$ gdw. $i \in X_a$. Damit ist $f_D \in A^I/D = d(A)$, so daß $f_D = d(a)$ für $a \in A$.

Das heißt, daß $f^{-1}(a) \in D$. Aber $f^{-1}(a) = X_a$, also $X_a \in D$. Mit Lemma 4.2.3 ist D $<\alpha^+$-vollständig. □

Die interessanten Ultrapotenzen sind die, für die d eine echte Einbettung ist. Da es auch interessant ist, zu wissen, welche Ultrapotenzen uninteressant sind, sei auf die folgenden zwei Ergebnisse hingewiesen.

Korollar 5.2.10 *Wenn A endlich oder D ein prinzipaler Ultrafilter ist, dann bildet d A surjektiv auf A^I/D ab.*

Dies folgt direkt auch Satz 5.2.9.

Korollar 5.2.11 *Wenn* $\operatorname{card}(A)$ *kleiner als die erste überabzählbare meßbare Kardinalzahl ist (oder wenn es eine solche nicht gibt), und wenn D ein $<\omega_1$-vollständiger Ultrafilter ist, dann bildet d das Modell $\mathfrak{A}$ surjektiv auf $\mathfrak{A}^I/D$ ab.*

Beweis:
Wenn es keine überabzählbare meßbare Kardinalzahl gibt, so ist D ein prinzipaler Filter und das Korollar gilt nach Korollar 5.2.10.

Wenn es überabzählbare meßbare Kardinalzahlen α gibt, so ist D α-vollständig für ein solches α und insbesondere γ-vollständig für die kleinste überabzählbare meßbare Kardinalzahl γ. Da $\operatorname{card}(A) < \gamma$, ist D $\operatorname{card}(A)^+$-vollständig. Die Behauptung folgt nun mit Proposition 5.2.9. □

Satz 5.2.12 *Wenn ein Filter F über einer Menge I $<\omega_1$-vollständig ist, so gilt*

$$\operatorname{card}(\omega^I/F) = \omega.$$

Wenn F $<\omega_1$-unvollständig ist, so gilt

$$\operatorname{card}(\omega^I/F) \geq 2^\omega.$$

Insbesondere gilt, wenn $\mathrm{card}(I) = \omega$ *und* F $<\!\omega_1$*-unvollständig, daß*

$$\mathrm{card}(\omega^I/F) = 2^\omega.$$

Beweis:
Die erste Behauptung gilt mit Satz 5.2.9.

Die zweite Behauptung folgt aus Satz 5.2.4, da ein $<\!\omega_1$-unvollständiger Filter auch ω-regulär ist und $\mathrm{card}(I) \geq \omega$ gilt.

Die dritte Behauptung gilt auch mit Satz 5.2.4. □

Korollar 5.2.13 *Wenn für* $i \in I$ *die Kardinalzahlen* α_i *alle unendlich sind und* F $<\!\omega_1$*-unvollständig, gilt*

$$2^\omega \leq \mathrm{card}(\prod \alpha_i/F).$$

Also ist ein Ultraprodukt (außer in trivialen Fällen) immer überabzählbar.

5.3 Große Sprachen und große Kardinalzahlen

Für α-vollständige Ultrafilter gibt es eine stärkere Version des Fundamentaltheorems (5.3.2) und einen erweiterten Kompaktheitssatz (5.3.3). Beide werden für Sprachen beliebiger Größe formuliert, die eine natürliche Verallgemeinerung von abzählbaren Sprachen bilden. Mit Hilfe dieser Sätze kann man zeigen, daß es zu einer meßbaren Kardinalzahl unerreichbar viele kleinere unerreichbare Kardinalzahlen gibt (Satz 5.3.5).

Zuerst brauchen wir noch ein Ergebnis über $\mathbf{\Sigma}^1_1$-Formeln.

Eine $\mathbf{\Sigma}^1_1$**-Formel** über $\mathfrak{L}$ ist eine Formel ψ der folgenden Form:

$$\exists P_1 \ldots P_m F_1 \ldots F_n \varphi, \tag{5.8}$$

wobei P_i bzw. F_j Relations- bzw. Funktionssymbole sind, die in $\mathfrak{L}$ nicht auftauchen, und φ eine Formel der erweiterten Sprache 1. Stufe

$$\mathfrak{L}' := \mathfrak{L} \cup \{\dot{P}_1, \ldots, \dot{P}_m, \dot{F}_1, \ldots, \dot{F}_n\}$$

ist.

Damit ist eine $\mathbf{\Sigma}^1_1$-Formel eine Formel zweiter Stufe, deren Relations- und Funktionsquantoren alle am Anfang stehen und existentiell sind.

Erfüllung für $\mathbf{\Sigma}^1_1$-Formeln wird folgendermaßen definiert:

- Wenn φ ein Satz ist, dann gilt ψ in einem Modell $\mathfrak{A}$ für $\mathfrak{L}$ genau dann, wenn es eine Erweiterung

  $$\mathfrak{A}' = \langle \mathfrak{A}, P_1, \ldots, P_m, F_1, \ldots, F_n \rangle$$

  von $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{L}'$ gibt, so daß φ in $\mathfrak{A}'$ gilt.

- Wenn φ freie Variablen $x_0, \ldots, n_{n-1}$ hat, dann gilt $\mathfrak{A} \models \psi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$ genau dann, wenn es eine Erweiterung $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{L}'$ gibt, so daß $\mathfrak{A}' \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$.

Lemma 5.3.1 *$\mathbf{\Sigma}^1_1$-Formeln werden unter Ultraprodukten erhalten, das heißt, für eine Ultrapotenz $\mathfrak{B} = \prod \mathfrak{A}_i/D, f^1_d, \ldots, f^n_D \in B$ und eine $\mathbf{\Sigma}^1_1$-Formel $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ gilt: Falls $\{i \in I | \mathfrak{A}_i \models \psi[f^1(i) \ldots f^n(i)]\} \in D$, dann gilt auch $\mathfrak{B} \models \psi[f^1_d \cdots f^n_D]$.*

Beweis:
Sei ψ wie in (5.8) und seien $f^1_D, \ldots, f^n_D \in \prod A_i/D$.

$$X := \{i \in I | \mathfrak{A}_i \models \psi[f^1(i) \ldots f^n(i)]\}.$$

Für jedes $i \in X$ sei $\mathfrak{A}'_i$ eine Erweiterung von $\mathfrak{A}_i$ zu $\mathfrak{L}'$, so daß

$$\mathfrak{A}'_i \models \varphi[f^1(i) \ldots f^n(i)].$$

Da $X \in D$, gilt mit dem Fundamentaltheorem 5.1.4

$$\prod \mathfrak{A}'_i/D \models \varphi[f^1_D \ldots f^n_D].$$

Mit dem Expansionstheorem 5.1.3 ist $\prod \mathfrak{A}'_i/D$ eine Erweiterung von $\prod \mathfrak{A}_i/D$ zu $\mathfrak{L}'$. Also $\prod \mathfrak{A}_i/D \models \psi[f^1_D \ldots f^n_D]$. □

Sei nun $\mathfrak{L}_\alpha$ eine unendliche Sprache mit α vielen Individuenvariablen. Die Formeln von $\mathfrak{L}_\alpha$ ergeben sich dadurch, daß man den Regeln der abzählbaren Sprache $\mathfrak{L}$ zwei Regeln hinzufügt, die unendliche Konjunktion und unendliche Quantoren zulassen:

(5.9) Wenn Φ eine Menge von Formeln von $\mathfrak{L}_\alpha$ ist mit $\mathrm{card}(\Phi) < \alpha$,

$$\text{dann ist } \bigwedge \Phi \text{ eine Formel von } \mathfrak{L}_\alpha.$$

(5.10) Wenn φ eine Formel von $\mathfrak{L}_\alpha$ ist und V eine Menge von

Variablen mit $\mathrm{card}(V) < \alpha$, dann ist $\forall V\varphi$ eine Formel von $\mathfrak{L}_\alpha$.

$\mathfrak{L}_\omega$ ist gerade die normale Logik $\mathfrak{L}$.

Die Modelle für $\mathfrak{L}_\alpha$ sind genau die gleichen wie die Modelle für $\mathfrak{L}$. Wenn α eine reguläre Kardinalzahl ist, dann hat jede Formel von $\mathfrak{L}_\alpha$ weniger als α Symbole.

Der Begriff der Wahrheit einer Formel von $\mathfrak{L}_\alpha$ in einem Modell kann präzise definiert werden, indem man die Definition von Wahrheit für Formeln von $\mathfrak{L}$ erweitert: Eine Formel σ ist genau dann wahr in einem Modell $\mathfrak{A}$, wenn $\mathfrak{A} \models \sigma[x_0 x_1 \ldots]$ für eine Sequenz $x_0, x_1, \ldots$ von A gilt.

Dabei ist die Relation $\mathfrak{A} \models \varphi$ folgendermaßen definiert:

1. Für atomare Formeln wie üblich.

2. Wenn $\varphi \equiv \bigwedge \Phi$, dann gilt $\mathfrak{A} \models \varphi$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \models \psi$ für alle $\psi \in \Phi$.

3. Wenn $\varphi \equiv \neg\psi$, dann gilt $\mathfrak{A} \models \varphi$ genau dann, wenn nicht $\mathfrak{A} \models \psi$.

4. Wenn $\varphi \equiv \forall V\psi$ mit $V = \{x_i | i < \lambda\}$, dann gilt $\mathfrak{A} \models \varphi$ genau dann, wenn für alle $a_i \in A, i < \lambda$, gilt $\mathfrak{A} \models \psi[\ldots \frac{a_i}{x_i} \ldots]$.

Unendliche Disjunktion, $\bigvee \Phi$, und Existenzquantoren, $\exists V\varphi$, sind die Abkürzungen für $\neg \bigwedge \neg\Phi$ und $\neg\forall V \neg\varphi$.

Satz 5.3.2 *Sei $\mathfrak{B} = \prod \mathfrak{A}_i / D$ ein Ultraprodukt mit Indexmenge I und einem α-vollständigen Ultrafilter D. Dann gilt:*

1. *Für eine Formel $\varphi(x_1 x_2 \ldots)$ von $\mathfrak{L}_\alpha$ und $f_D^1, f_D^2, \ldots \in B$ gilt*
$$\mathfrak{B} \models \varphi[f_D^1 f_D^2 \ldots] \text{ gdw. } \{i \in I | \mathfrak{A}_i \models \varphi[f^1(i) f^2(i) \ldots]\} \in D.$$

2. *Für jeden Satz φ von $\mathfrak{L}_\alpha$ gilt:*
$$\mathfrak{B} \models \varphi \text{ gdw. } \{i \in I | \mathfrak{A}_i \models \varphi\} \in D.$$

Beweis:

2. ist ein Spezialfall von 1.

Nach dem Satz von Łoš (5.1.4) gilt, daß 1. für Formeln von $\mathfrak{L}$ und insbesondere für atomare Formeln gilt.

Angenommen, $\psi(x_1 x_2 \ldots)$ ist eine Formel von $\mathfrak{L}_\alpha$ und hat die Eigenschaft 1. und $\varphi(x_1 x_2 \ldots) = \neg\psi(x_1 x_2 \ldots)$. Dann gilt

$$\begin{array}{ll} & \mathfrak{B} \models \varphi[f_D^1 f_D^2 \ldots] \\ \text{gdw.} & \text{nicht } \mathfrak{B} \models \psi[f_D^1 f_D^2 \ldots] \\ \text{gdw.} & \{i \in I | \mathfrak{A}_i \models \psi[f^1(i) f^2(i) \ldots]\} \notin D \\ \text{gdw.} & \{i \in I | \mathfrak{A}_i \models \varphi[f^1(i) f^2(i) \ldots]\} \in D. \end{array}$$

Angenommen, Φ ist eine Menge von Formeln von $\mathfrak{L}_\alpha$, $\mathrm{card}(\Phi) < \alpha$ und 1. gilt für alle $\varphi \in \Phi$. Dann ist für alle $f^1_D, f^2_D, \ldots \in \mathfrak{B}$ folgendes äquivalent:

$$\begin{array}{ll} & \mathfrak{B} \models \bigwedge \Phi[f^1_D f^2_D \ldots] \\ \text{gdw.} & \text{für alle } \varphi \in \Phi\ \mathfrak{B} \models \varphi[f^1_D f^2_D \ldots] \\ \text{gdw.} & \text{für alle } \varphi \in \Phi\ \{i \in I | \mathfrak{A}_i \models \varphi[f^1(i) f^2(i) \ldots]\} \in D. \end{array}$$

Da D α-vollständig ist, ist die letzte Zeile äquivalent zu

$$\{i \in I | \forall \varphi \in \Phi\ \mathfrak{A}_i \models \varphi[f^1(i) f^2(i) \ldots]\} \in D,$$

und das ist äquivalent dazu, daß

$$\{i \in I | \mathfrak{A}_i \models \bigwedge \Phi[f^1(i) f^2(i) \ldots]\} \in D.$$

Angenommen, eine Formel $\psi(x_1 x_2 \ldots y_1 y_2 \ldots)$ von $\mathfrak{L}_\alpha$ hat die Eigenschaft 1., $\{y_1, y_2, \ldots\}$ ist eine Menge von weniger als α Variablen und $\varphi = \exists y_1 y_2 \ldots \psi$. Dann ergibt sich

$$\begin{array}{ll} & \mathfrak{B} \models \varphi[f^1_D f^2_D \ldots] \\ \text{gdw.} & \text{es } g^1_D, g^2_D \ldots \in B \text{ gibt, so daß } \mathfrak{B} \models \psi[f^1_D f^2_D \ldots g^1_D g^2_D \ldots] \\ \text{gdw.} & \text{es } g^1_D, g^2_D \ldots \in B \text{ gibt,} \\ & \text{so daß } \{i \in I | \mathfrak{A}_i \models \psi[f^1(i) f^2(i) \ldots g^1(i) g^2(i) \ldots]\} \in D \\ \text{gdw.} & \{i \in I | \mathfrak{A}_i \models \varphi[f^1(i) f^2(i) \ldots]\} \in D. \end{array}$$

Damit gilt 1. für alle Formeln von $\mathfrak{L}_\alpha$, weil $\forall$ wie üblich durch $\exists$ und $\neg$ ausgedrückt werden kann. □

Satz 5.3.3 *(Schwacher Kompaktheitssatz) Sei α eine meßbare Kardinalzahl. Wenn Σ eine Menge von Sätzen von $\mathfrak{L}_\alpha$ ist, so daß $\mathrm{card}(\Sigma) = \alpha$ ist und jede Teilmenge Σ_0 von Σ mit $\mathrm{card}(\Sigma_0) < \alpha$ ein Modell hat, dann hat Σ ein Modell.*

Beweis:
Da α meßbar ist, gibt es einen α-vollständigen, nicht prinzipalen Ultrafilter D auf α. Da D keine Einpunktmengen enthält und α-vollständig ist, enthält D auch keine Mengen von Mächtigkeit $< \alpha$. Also gilt für jedes $\gamma < \alpha$

$$\{\beta | \gamma < \beta < \alpha\} \in D.$$

Sei $\Sigma = \{\sigma_\beta | \beta < \alpha\}$ eine Aufzählung von Σ. Für jedes $\beta < \alpha$ gibt es ein Modell $\mathfrak{A}_\beta$ der Menge $\{\sigma_\gamma | \gamma < \beta\}$. Sei $\mathfrak{B}$ das Ultraprodukt $\prod \mathfrak{A}_\beta / D$. Dann gilt für jedes $\sigma_\gamma \in \Sigma$

$$\{\beta < \alpha | \mathfrak{A}_\beta \models \sigma_\gamma\} \supset \{\beta | \gamma < \beta < \alpha\} \in D.$$

Mit Satz 5.3.2 ist $\mathfrak{B}$ ein Modell von Σ. □

Lemma 5.3.4 *Sei α eine überabzählbare meßbare Kardinalzahl und sei D ein nicht prinzipaler, α-vollständiger Ultrafilter über α. Bilde die Ultrapotenz $\mathfrak{B} = \langle \alpha, < \rangle^\alpha / D$. Dann gilt*

1. *$\mathfrak{B}$ ist eine wohlgeordnete Struktur vom Ordnungstyp $> \alpha$ und*
2. *für jedes $\gamma < \alpha$ ist $d(\gamma)$ das γte Element von $\mathfrak{B}$.*[2]

Beweis:

1. (erster Teil) $\mathfrak{B}$ ist wohlgeordnet nach 5.3.2. Da d eine isomorphe Einbettung ist, hat $\mathfrak{B}$ also mindestens Ordnungstyp α.
2. Für jedes $\gamma < \alpha$ sei $\bar{\gamma}$ das γte Element von $\mathfrak{B}$.

   Sei nun $\gamma < \alpha$ fest gewählt. Nach Induktionsannahme gilt 2. für jedes $\delta < \gamma$.

   Füge für jedes $\delta < \alpha$ eine Konstante c_δ zu $\mathfrak{L}_\alpha$ hinzu. Dann wird c_δ in dem Modell $\langle \alpha, <, \delta \rangle_{\delta < \alpha}$ durch δ und in $(\mathfrak{B}, d(\delta))_{\delta<\alpha}$ durch $d(\delta)$ interpretiert.

   In dem Modell $\langle \alpha, <, \delta \rangle_{\delta < \alpha}$ gilt der $\mathfrak{L}_\alpha$-Satz

   $$\forall x (x < c_\gamma \leftrightarrow \bigvee \{ x \equiv c_\delta | \delta < \gamma \}). \tag{5.11}$$

   Mit Satz 5.3.2 gilt (5.11) auch in $(\mathfrak{B}, d(\delta))_{\delta<\alpha}$. Damit ist $d(\gamma)$ das γte Element von $\mathfrak{B}$, da die Menge der Elemente $< d(\delta)$ gerade $\{\bar{\delta} | \delta < \gamma\}$ ist. 2. folgt nun per Induktion.

1. (zweiter Teil) D ist kein prinzipaler Ultrafilter, also ist D nicht α^+-vollständig und damit ist d mit Satz 5.2.9 eine echte Einbettung.

   Mit 2. ist $d(\alpha)$ ein Anfangsstück von $\mathfrak{B}$. Also ist $d(\alpha)$ ein echtes Anfangsstück.

□

Satz 5.3.5 *Sei α eine überabzählbare meßbare Kardinalzahl. Dann gilt*

1. *α ist unerreichbar und*
2. *α ist die αte unerreichbare Kardinalzahl.*

[2] $d : \alpha \to \mathfrak{B}$ ist die natürliche Einbettung, s. auch Abschnitt 5.1.

Beweis:
Sei D ein Zeuge für die Meßbarkeit von α.

Betrachte das Modell $\mathfrak{A} = \langle \alpha, <, b \rangle_{b<\alpha}$ und bilde die Ultrapotenz $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^\alpha/D$. Sei β der Ordnungstyp von $\mathfrak{B}$ und für $\gamma < \beta$ sei $\bar{\gamma}$ das γte Element von $\mathfrak{B}$. Nach Lemma 5.3.4 ist $\alpha < \beta$ und $\bar{\gamma} = d(\gamma)$ für alle $\gamma < \alpha$; also wird jede Konstante c_γ, $\gamma < \alpha$, in $\mathfrak{A}$ von γ und in $\mathfrak{B}$ von $d(\gamma) = \bar{\gamma}$ interpretiert.

1. Als erstes zeigen wir
   (5.12) α ist regulär.

   Beweis von (5.12):
   Angenommen, α ist singulär. Dann gibt es ein $\gamma < \alpha$ mit einer injektiven Funktion $F : \gamma \to \alpha$, so daß $\mathrm{ran}(F)$ konfinal in $\langle \alpha, < \rangle$ ist.

   Definiere $F(\delta) = 0$ für $\gamma \leq \delta < \alpha$ und bilde das Modell $(\mathfrak{A}, F)$ und die Ultrapotenz $(\mathfrak{B}, G) := (\mathfrak{A}, F)^\alpha/D$.

   Für jedes $\delta < \alpha$ haben wir
   $$G(\bar{\delta}) = G(d(\delta)) = d(F(\delta)) = \overline{F(\delta)} < \bar{\alpha}.$$

   Also gilt in $(\mathfrak{B}, G)$ der Satz

   (5.13) $\exists x \forall y (y < c_\gamma \to F(y) < x)$

   mit $\bar{\alpha}$ für x. F bildet γ konfinal in α ab, also gilt auch

   (5.14) $\forall x \exists y (y < c_\gamma \wedge x < F(y))$

   in $(\mathfrak{A}, F)$, also auch in $(\mathfrak{B}, G)$. Durch diesen Widerspruch ist (5.12) bewiesen.

   Nun ist zu zeigen

   (5.15) α ist eine starke Limeszahl.

   Beweis von (5.15):
   Angenommen α ist keine starke Limeszahl. Dann gibt es $\gamma < \alpha$ mit $\alpha \leq 2^\gamma$. Also gibt es eine injektive Funktion $F : \alpha \to \mathfrak{P}(\gamma)$.

   Sei $R \subseteq \alpha \times \gamma$ die Relation, die F repräsentiert, das heißt, $R(\eta, \delta)$ genau dann, wenn $\delta \in F(\eta)$. Bilde die Ultrapotenz $(\mathfrak{B}, S) := (\mathfrak{A}, R)^\alpha/D$.

   Sei $\bar{F}$ auf β definiert durch $\bar{F}(\eta) := \{\delta < \beta | S(\bar{\eta}, \bar{\delta})\}$. Zunächst zeigen wir folgende Behauptung:

   (5.16) $\bar{F}$ ist eine injektive Funktion von β in $\mathfrak{P}(\gamma)$.

   Beweis von (5.16):
   Die beiden folgenden Sätze gelten in $(\mathfrak{A}, R)$ und damit in $(\mathfrak{B}, S)$:

(a)
$$\forall xy(R(xy) \to y < c_\gamma)$$

(b)
$$\forall xy(x \not\equiv y \to \exists z \neg(R(xz) \leftrightarrow R(yz))).$$

Folgende Argumentation beweist, daß (a) und (b) in $(\mathfrak{A}, R)$ gelten:

$R(\eta, \delta)$ gilt genau dann, wenn $\delta \in F(\eta)$; also $\delta < \gamma$.

Für $\eta \neq \zeta$ gilt $F(\eta) \neq F(\zeta)$, also gibt es genau dann ein λ, so daß $\neg(\lambda \in F(\eta) \leftrightarrow \lambda \in F(\zeta))$ gilt, wenn es ein λ gibt, so daß gilt $\neg(R(\eta\lambda) \leftrightarrow R(\zeta\lambda))$.

Die Einbettung d bildet $(\mathfrak{A}, R)$ isomorph in $(\mathfrak{B}, S)$ ab, also gilt für alle $\eta < \alpha$ folgendes:

$$\begin{array}{rcl}
\bar{F}(\eta) & = & \{\delta < \beta | S(\bar{\eta}, \bar{\delta})\} \\
& = & \{\delta < \gamma | S(\bar{\eta}, \bar{\delta})\}, \text{ da wie oben gezeigt gilt } \operatorname{ran}(\bar{F}) \subseteq \mathfrak{P}(\gamma); \\
& = & \{\delta < \gamma | (\mathfrak{A}, R)^\alpha / D \models S[d(\eta), d(\delta)]\}, \text{ da für } \eta < \alpha \\
& & \text{und } \delta < \gamma < \alpha \text{ gilt } \bar{\eta} = d(\eta) \text{ und } \bar{\delta} = d(\delta); \\
& = & \{\delta < \gamma | (\mathfrak{A}, R) \models R[\eta, \delta]\} \\
& = & \{\delta < \gamma | \delta \in F(\eta)\} \\
& = & F(\eta) \cap \gamma \\
& = & F(\eta), \text{ da } F(\eta) \subseteq \gamma.
\end{array}$$

Damit ist (5.16) gezeigt.

Die Menge $X = \bar{F}(\alpha)$ gehört nicht zu $\operatorname{ran}(F)$ (da $\bar{F}$ injektiv ist und unterhalb von α mit F gleichen Werteverlauf hat), während $X \in \mathfrak{P}(\gamma)$.

Damit ist der Satz φ

$$\exists x \forall y (R(xy) \leftrightarrow \bigvee \{y \equiv c_\delta | \delta \in X\})$$

wahr in $(\mathfrak{B}, S)$, aber falsch in $(\mathfrak{A}, R)$ mit $\bar{\alpha}$ für x

$$\begin{array}{rcl}
(\mathfrak{A}, R) \models \varphi & \Leftrightarrow & \exists x \forall y (y \in F(x) \leftrightarrow \bigvee \{y = \delta | \delta \in \bar{F}(\alpha)\}) \\
& \Leftrightarrow & \exists x (F(x) = \bar{F}(\alpha)) \\
& \Leftrightarrow & \perp
\end{array}$$

Also ist α eine starke Limeszahl und 1. gilt.

2. Dieser Teil des Beweises benutzt, daß $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$-Formeln unter Ultraprodukten erhalten werden (s. Korollar 5.3.1).

Sei X die Klasse aller unerreichbaren Kardinalzahlen, Y die Klasse aller Ordinalzahlen, die nicht regulär sind und Z die Klasse aller Ordinalzahlen, die keine starken Limeszahlen sind.

Damit gilt für alle Ordinalzahlen γ: $\gamma \in X \leftrightarrow \gamma \notin Y \cup Z$.

Zu zeigen ist also, daß $X \cap \alpha$ konfinal in α liegt. Da α regulär ist, bedeutet das, daß $\mathrm{card}(X \cap \alpha) = \alpha$, woraus 2. folgt.

Da $\alpha \subseteq X \cup Y \cup Z$ ist, genügt es, daß für jedes $\gamma < \alpha$

(5.17) ein δ existiert, so daß $\gamma \leq \delta < \alpha$ und $\delta \notin Y \cup Z$.

Angenommen, (5.17) gilt nicht für ein $\gamma < \alpha$. Dann gilt für alle $\delta < \alpha$ folgendes:

(5.18) $\delta < \gamma$ oder $\delta \in Y$ oder $\delta \in Z$.

Die Formel

$$\psi_Y(u) := \exists F \exists x (x < u \wedge F : x \to u \wedge \forall y < u \; \exists z < x (y < F(z))$$

ist eine $\mathbf{\Sigma}_1^1$-Formel und für jedes Modell $\langle \alpha', < \rangle$ wobei α' eine Ordinalzahl ist, und für jedes $\delta < \alpha'$ gilt

(5.19) $\delta \in Y$ gdw. $\langle \alpha', < \rangle \models \psi_Y[\delta]$.

$\psi_Y(u)$ ist die Formalisierung von

'Es gibt $y < u$ und eine Funktion $F : y \to u$,
so daß $\mathrm{ran}(F)$ konfinal in u liegt.'

Ebenso ist die Formel

$$\begin{aligned} \psi_Z(u) \; := \; & \exists R \exists v < u (\forall x, y (R(xy) \to (x < u \wedge y < v))) \\ & \wedge \forall i, j < u (\neg (i = j) \to \exists k < v (R(ik) \leftrightarrow \neg R(jk))) \end{aligned}$$

eine $\mathbf{\Sigma}_1^1$-Formel, und für jedes Modell $\langle \alpha', < \rangle$ mit α' Ordinalzahl und für jedes $\delta < \alpha'$ gilt

(5.20) $\delta \in Z$ gdw. $\langle \alpha', < \rangle \models \psi_Z(\delta)$.

$\psi_Z(u)$ ist die Formalisierung von

'Es gibt $y < u$ und eine Relation $R \subseteq x \times y$,
so daß R eine injektive Funktion von u in $\mathfrak{P}(\gamma)$ repräsentiert.'

Mit (5.18)-(5.20) folgt

$$x < c_\gamma \vee \psi_Y(x) \vee \psi_Z(x) \tag{5.21}$$

wird in $\langle \alpha, < \rangle$ von allen $x \in \alpha$ erfüllt.

Indem man die Quantoren zweiter Ordnung nach vorne rückt, sieht man, daß (5.21) äquivalent zu einer $\mathbf{\Sigma}^1_1$-Formel ist. (Das $\exists F$ bzw. $\exists R$ aus $\psi_Y(x)$ bzw. $\psi_Z(x)$ läßt sich vor die gesamte Formel ziehen.)

Also ist für jedes $f_D \in B$ die Formel (5.21) in $\langle B, < \rangle$ von f_D erfüllt (Korollar 5.3.1). Da $\langle B, < \rangle$ zu $\langle \beta, < \rangle$ isomorph ist (β ist der Ordnungstyp von $\mathfrak{B}$), wird die Formel (5.21) in $\langle \beta, < \rangle$ von allen $x \in \beta$ erfüllt.

Setze $x = \alpha$, dann ergibt sich

$$\alpha < \gamma \text{ oder } \langle \beta, < \rangle \models \psi_Y[\alpha] \text{ oder } \langle \beta, < \rangle \models \psi_Z[\alpha].$$

Mit (5.19) und (5.20) und $\beta = \alpha'$ sehen wir, daß

$$\alpha < \gamma \text{ oder } \alpha \in Y \text{ oder } \alpha \in Z.$$

Widerspruch zur Annahme, daß $\gamma < \alpha$ und α unerreichbar. Also gilt (5.17).

□

5.4 Existenz eines guten Ultrafilters

Für Kunens Konstruktion eines guten Ultrafilters (Satz 5.4.5) sind unabhängige Funktionen zentral. Im folgenden geht es daher hauptsächlich darum, wie man diese Funktionen finden kann.

Definition 5.4.1 *Wenn $\delta \subseteq I^I$ und F ein Filter über I ist, so heißt δ* **unabhängig (mod F)** *gdw. für alle $i_1, \ldots, i_n \in I$ und alle paarweise verschiedenen $f_1, \ldots, f_n \in \delta$ gilt*

$$I \setminus \{j | f_1(j) = i_1 \wedge \ldots \wedge f_n(j) = i_n\} \notin F.$$

Wenn δ unabhängig (mod $\{I\}$) ist und $\emptyset \subset J \subset I$ und $\mathrm{card}(I \setminus J) \geq \omega$, dann ist $\{f^{-1}(J) | f \in \delta\}$ eine unabhängige Familie von Mengen (zur Definition von Unabhängigkeit von Mengen s. 2.3.1):

Seien $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_m \in \delta$ paarweise verschieden. Werden $j_1, \ldots, j_n \in J, i_1, \ldots, i_m \in I \setminus J$ gewählt, so ergibt sich

$$\begin{array}{rcl} f_1^{-1}(J) \cap \ldots \cap f_n^{-1}(J) \cap (I \setminus g_1^{-1}(J)) \cap \ldots \cap (I \setminus g_m^{-1}(J)) & \supseteq & \\ \{j \in I | f_1(j) = j_1 \wedge \ldots \wedge f_n(j) = j_n \wedge g_1(j) = i_1 \wedge \ldots \wedge g_m(j) = i_m\} & \neq & \emptyset. \end{array}$$

Satz 5.4.2 *(Engelking und Karłowicz [EKar 65]) Für jede Menge I der Mächtigkeit $\kappa \geq \aleph_0$ gibt es ein $\delta \subseteq I^I$, so daß* $\mathrm{card}(\delta) = 2^\kappa$ *und δ unabhängig (mod $\{I\}$) sind.*

Beweis:
Sei $\mathcal{A}$ die Familie aller Sequenzen $(i_1, \dots, i_n, s_1, \dots, s_n)$ mit $n \in \omega, i_1, \dots, i_n \in I$ und $s_1, \dots, s_n \in \mathcal{S}_\omega(I)$.

Da $\mathrm{card}(I) = \kappa \geq \aleph_0$, gibt es eine Bijektion $h : I \to \mathcal{A}$.

Sei $\mathcal{R}$ eine Familie der Mächtigkeit 2^κ von unabhängigen Teilmengen von I (s. Satz 2.3.5) und $i_0 \in I$ beliebig. Für jedes $R \in \mathcal{R}$ definieren wir eine Funktion $f_R : I \to I$ durch: Sei $i \in I$ und $h(i) = (i_1, \dots, i_n, s_1, \dots, s_n)$. Setze

$$f_R(i) := \begin{cases} i_k & \text{es gibt ein } k \leq n, \text{ so daß } h(i) \ni s_k \subseteq R \\ & \text{und } s_j \not\subseteq R \text{ für } j \neq k, \\ i_0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $\delta = \{f_R | R \in \mathcal{R}\}$.

Da die Funktionen f_R und $f_{R'}$ für $R \neq R'$ verschieden sind, folgt $\mathrm{card}(\delta) = \mathrm{card}(\mathcal{R}) = 2^\kappa$.

Es bleibt also noch die Unabhängigkeit von δ zu zeigen.

Seien dazu $f_{R_1}, \dots, f_{R_n} \in \delta$ verschieden und $i_1, \dots, i_n \in I$. Die Mengen in $\mathcal{R}$ sind unabhängig, also gibt es Elemente $i_{jk} \in I$, so daß

$$i_{jk} \in R_j \cap (I \setminus R_k) \text{ für } j, k \in \{1, \dots, n\} \text{ und } j \neq k.$$

Setze $F_j = \{i_{j1}, \dots, i_{jj-1}, i_{jj+1}, \dots, i_{jn}\}$. Dann ergibt sich $F_j \subseteq R_j$ und $F_k \not\subseteq R_j$ für $j \neq k$. Sei $i := h^{-1}((i_1, \dots, i_n, F_1, \dots, F_n))$. Dann $I \setminus \{j | f_{R_1}(j) = i_1 \wedge \dots \wedge f_{R_n}(j) = i_n\} \subseteq I \setminus \{i\} \neq I$. □

Lemma 5.4.3 *Sei F ein Filter über einer Menge I, $\delta \subseteq I^I$. Wenn δ unabhängig (mod F) ist und $A \subseteq I$, dann gibt es $\delta' \subseteq \delta$ und $F' \supseteq F$, so daß δ' unabhängig (mod F'), $\delta \setminus \delta'$ endlich und entweder A oder $I \setminus A$ in F' ist.*

Beweis:

1. Fall: δ ist unabhängig (mod $((F \cup \{A\}))$). Dann erfüllen $\delta' = \delta$ und $F' = ((F \cup \{A\}))$ das Gewünschte.

2. Fall: Es gibt paarweise verschiedene $f_1, \dots, f_n \in \delta$ und $i_1, \dots, i_n \in I$, so daß

$$I \setminus \{j | f_1(j) = i_1 \wedge \dots \wedge f_n(j) = i_n\} \in ((F \cup \{A\})).$$

   Sei $\delta' = \delta \setminus \{f_1, \dots, f_n\}$ und $F' = ((F \cup \{\{j | f_1(j) = i_1 \wedge \dots \wedge f_n(j) = i_n\}\}))$. Damit ist $\delta' \subseteq \delta$, $\delta \setminus \delta'$ ist endlich und $F \subseteq F'$.

- $\emptyset \notin F'$: Wird angenommen, daß $\emptyset \in F'$, so gilt $\{j|f_1(j) = i_1 \wedge \ldots \wedge f_n(j) = i_n\} \neq \emptyset$, da δ unabhängig (mod F) ist. Ebenso $\emptyset \notin F$, da F ein Filter ist. Also muß es ein $a \in F$ geben, so daß
$$a \cap \{j|f_1(j) = i_1 \wedge \ldots \wedge f_n(j) = i_n\} = \emptyset.$$
Somit kann $\{j|f_1(j) = i_1 \wedge \ldots \wedge f_n(j) = i_n\}$ nicht in F liegen, da der Schnitt von Elementen des Filters nicht leer ist. Aber es gilt auch
$$I \setminus \{j|f_1(j) = i_1 \wedge \ldots \wedge f_n(j) = i_n\} \notin F,$$
also $a \not\subseteq \{j|f_1(j) = i_1 \wedge \ldots \wedge f_n(j) = i_n\}$ und $a \not\subseteq I \setminus \{j|f_1(j) = i_1 \wedge \ldots \wedge f_n(j) = i_n\}$. Damit folgt
$$a \cap \{j|f_1(j) = i_1 \wedge \ldots \wedge f_n(j) = i_n\} \neq \emptyset.$$
Widerspruch zur Annahme.
- δ' unabhängig (mod F'): Seien $g_1, \ldots, g_m \in \delta'$ verschieden, $k_1, \ldots, k_m \in I$. Aus der Annahme
$$I \setminus \{j|g_1(j) = k_1 \wedge \ldots \wedge g_m(j) = k_m\} \in F'$$
folgt
$$\{j|f_1(j) = i_1 \wedge \ldots \wedge f_n(j) = i_n\} \subseteq I \setminus \{j|g_1(j) = k_1 \wedge \ldots \wedge g_m(j) = k_m\}.$$
Also
$$\{j|f_1(j) = i_1 \wedge \ldots \wedge f_n(j) = i_n\} \cap \{j|g_1(j) = k_1 \wedge \ldots \wedge g_m(j) = k_m\} = \emptyset,$$
aber das ist ein Widerspruch zur Unabhängigkeit von δ (mod F).
- $I \setminus A \in F'$:
$$I \setminus \{j|f_1(j) = i_1 \wedge \ldots \wedge f_n(j) = i_n\} \in ((F \cup \{A\}))$$
und
$$I \setminus \{j|f_1(j) = i_1 \wedge \ldots \wedge f_n(j) = i_n\} \notin F,$$
also gibt es ein $b \in F$, so daß
$$b \cap A \subseteq I \setminus \{j|f_1(j) = i_1 \wedge \ldots \wedge f_n(j) = i_n\},$$
das heißt, $I \setminus (b \cap A) \supseteq \{j|f_1(j) = i_1 \wedge \ldots \wedge f_n(j) = i_n\}$. Damit gilt $I \setminus (b \cap A) \in F'$, also auch $I \setminus b \cup I \setminus A \in F'$. Durch Schnitt mit b erhält man $(I \setminus A) \cup b \in F'$ und damit auch
$$(I \setminus A) \cap b \subseteq I \setminus A \in F'.$$

Damit gilt das Lemma auch im zweiten Fall. □

Lemma 5.4.4 *Sei F ein Filter auf einer unendlichen Menge I, $\delta \subseteq I^I$. Wenn δ unabhängig (mod F) ist und $p : \mathcal{S}_\omega(I) \to F$ monoton, dann gibt es $\delta' \subseteq \delta, F' \supseteq F$ und eine additive Funktion $q : \mathcal{S}_\omega(I) \to F'$, so daß δ' unabhängig (mod F') ist, $\delta \setminus \delta'$ endlich und $q \leq p$.*

Beweis:
Wähle $g \in \delta$ fest.
Sei $\delta' = \delta \setminus \{g\}$. Für jedes $t \in \mathcal{S}_\omega(I)$ sei

$$q_t(s) = \begin{cases} p(t) & s \subseteq t, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $(t_i)_{i\in I}$ eine Aufzählung von $\mathcal{S}_\omega(I)$. Sei

$$q(s) := \bigcup \{q_{t_i}(s) \cap g^{-1}(\{i\}) | i \in I\}$$

und

$$F' := ((F \cup \operatorname{ran}(q))).$$

Dann ist $\delta \setminus \delta'$ endlich.

- $\emptyset \notin F'$: Angenommen, $\emptyset \in F'$.

  $\emptyset \notin F$, also gibt es ein $s_i \in \mathcal{S}_\omega(I)$ und ein $a \in F$, so daß $a \cap q(s_i) = \emptyset$. Nach Definition von q ist

  $$a \cap q(s_i) \supseteq a \cap p(s_i) \cap g^{-1}(\{i\}).$$

  Da $p(s_i) \in F$ gilt $b := p(s_i) \cap a \in F$. $g^{-1}(\{i\})$ kann nicht in F sein, da sonst $b \cap g^{-1}(\{i\}) \in F \not\ni \emptyset$. Also gilt $g^{-1}(\{i\}) \notin F$. Da δ unabhängig (mod F), gilt $I \setminus g^{-1}(\{i\}) \notin F$, damit ist $b \not\subseteq g^{-1}(\{i\})$ und $b \not\subseteq I \setminus g^{-1}(\{i\})$, das heißt, $b \cap g^{-1}(\{i\}) \neq \emptyset$. Widerspruch zur Annahme.

- q ist additiv: Seien $s, s' \in \mathcal{S}_\omega(I)$.

  Es gilt $q : \mathcal{S}_\omega(I) \to F'$ nach Definition von F'.

  Für jedes $t_i \in \mathcal{S}_\omega(I)$ gilt:

  $$\begin{aligned} q_{t_i}(s) \cap q_{t_i}(s') &= \begin{cases} p(t_i) & s \subseteq t_i \text{ und } s' \subseteq t_i, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= q_{t_i}(s \cup s'), \end{aligned}$$

also

$$\begin{array}{rl} & q(s) \cap q(s') \\ = & \bigcup\{q_{t_i}(s) \cap g^{-1}(\{i\}) | i \in I\} \cap \bigcup\{q_{t_i}(s') \cap g^{-1}(\{i\}) | i \in I\} \\ = & \bigcup\{q_{t_i}(s) \cap q_{t_i}(s') \cap g^{-1}(\{i\}) | i \in I\} \\ = & \bigcup\{q_{t_i}(s \cup s') \cap g^{-1}(\{i\}) | i \in I\}. \end{array}$$

- δ unabhängig (mod F'):

  Angenommen δ ist nicht unabhängig (mod F'). Dann gibt es verschiedene $f_1, \ldots, f_n \in \delta'$ und $i_1, \ldots, i_n \in I$, so daß

$$I \setminus \{j | f_1(j) = i_1 \wedge \ldots \wedge f_n(j) = i_n\} \in F'.$$

  Aber $I \setminus \{j | f_1(j) = i_1 \wedge \ldots \wedge f_n(j) = i_n\} \notin F$, also gibt es ein $a \in F$ und ein $s_i \in \mathfrak{P}(I)$, so daß

$$a \cap q(s_i) \subseteq I \setminus \{j | f_1(j) = i_1 \wedge \ldots \wedge f_n(j) = i_n\}.$$

  Nach Definition von q gilt

$$a \cap p(s_i) \cap g^{-1}(\{i\}) \subseteq a \cap q(s_i),$$

  also mit $b := a \cap p(s_i) \in F$

$$b \cap g^{-1}(\{i\}) \cap \{j | f_1(j) = i_1 \wedge \ldots \wedge f_n(j) = i_n\} = \emptyset.$$

  Mit $g^{-1}(\{i\}) = \{j | g(j) = i\}$ wird obige Gleichung zu

$$b \cap \{j | f_1(j) = i_1 \wedge \ldots \wedge f_n(j) = i_n \wedge g(j) = i\} = \emptyset.$$

  Der zweite Term kann nicht Element von F sein, da sonst der Schnitt nicht leer wäre. Also gilt sowohl

$$\{j | f_1(j) = i_1 \wedge \ldots \wedge f_n(j) = i_n \wedge g(j) = i\} \notin F,$$

  als auch

$$I \setminus \{j | f_1(j) = i_1 \wedge \ldots \wedge f_n(j) = i_n\} \notin F.$$

  Damit ist b von keiner der beiden Mengen eine Teilmenge, also

$$b \cap \{j | f_1(j) = i_1 \wedge \ldots \wedge f_n(j) = i_n \wedge g(j) = i\} \neq \emptyset,$$

  im Widerspruch zur Annahme.

- $q \leq p$: Sei $s \in \mathcal{S}_\omega(I)$. Zu zeigen: $q(s) \subseteq p(s)$. $p(s) \supseteq q_{t_i}(s)$ für alle $t_i \in \mathcal{S}_\omega(I)$. Also
$$q(s) \subseteq q_s(s) \subseteq p(s),$$
da p monoton ist.

□

Satz 5.4.5 *(Kunen [Ku 72]) Für jede Menge I mit $\mathrm{card}(I) = \kappa \geq \aleph_0$ gibt es einen κ^+-guten Ultrafilter über I.*

Beweis:
Wir zeigen, daß es einen Ultrafilter über I gibt, der gut für κ ist.

Sei $((s_i, r_i))_{i \in I}$ eine Aufzählung von $\{(s,r) | s \in \mathcal{S}_\omega(I) \wedge r \in I^{\mathfrak{P}(s)}\}$. Sei $\delta_0 = \{f_A | A \subseteq I\}$, wobei f_A definiert sei durch $f_A(i) = r_i(A \cap s_i)$. Sei $(A_\eta)_{\eta < 2^\kappa}$ eine Aufzählung von $\mathfrak{P}(I)$. Sei $(p_\eta)_{\eta < 2^\kappa}$ eine Aufzählung aller monotonen Funktionen $\mathcal{S}_\omega(I) \to \mathfrak{P}(I)$, so daß jedes monotone $p : \mathcal{S}_\omega(I) \to \mathfrak{P}(I)$ 2^κ-mal aufgezählt wird.

Behauptung:

(5.22) δ_0 ist unabhängig mod $\{I\}$.

Beweis von (5.22):
Seien $f_1, \ldots, f_n \in \delta_0$ paarweise verschieden und $i_1, \ldots, i_n \in I$. Wähle paarweise verschiedene $A_1, \ldots, A_n$, so daß $f_1 = f_{A_1}, \ldots, f_n = f_{A_n}$.

Wähle eine Menge $s \in \mathcal{S}_\omega(I)$, die aus jeder Menge A_k mindestens ein Element enthält, so daß $A_k \cap s \neq A_\ell \cap s$ für $k \neq l$. Es gibt eine Funktion $r : \mathfrak{P}(s) \to I$, so daß
$$r(A_k \cap s) = i_k \text{ für } 1 \leq k \leq n.$$
Also gilt
$$\{j | f_{A_1}(j) = i_1 \wedge \ldots \wedge f_{A_n}(j) = i_n\} \neq \emptyset$$
und damit
$$I \setminus \{j | f_{A_1}(j) = i_1 \wedge \ldots \wedge f_{A_n}(j) = i_n\} \neq I.$$
Damit gilt (5.22).

Definiere eine Funktion $f : I \to I$ durch
$$f(j) := r_j(s_j).$$

Nun zeigen wir

(5.23) $\delta_0 \cup \{f\}$ ist unabhängig mod $\{I\}$.

Beweis von (5.23):
Seien $f_{A_1}, \ldots, f_{A_n} \in \delta_0$ paarweise verschieden und $i_0, \ldots, i_n \in I$. Wähle $s \in \mathcal{S}_\omega(I)$ so, daß für $1 \leq k \leq n$ gilt $\emptyset \neq s \cap A_k \neq s$ und $A_k \cap s \neq A_\ell \cap s$ für $k \neq \ell$. Dann gibt es eine Funktion $r : \mathfrak{P}(s) \to I$, so daß

$$r(A_k \cap s) = i_k \text{ und } r(s) = i_0.$$

Also ist

$$I \setminus \{j | f(j) = i_0 \wedge f_{A_1}(j) = i_1 \wedge \ldots \wedge f_{A_n}(j) = i_n\} \neq I.$$

Damit gilt (5.23).

Um den Satz zu zeigen, konstruieren wir unten $F_\eta(\eta < 2^\kappa)$ und $\delta_\eta(\eta < 2^\kappa)$, die folgendes erfüllen:

1. Für jedes $\eta < 2^\kappa$ ist F_η Filter über I, $\delta_\eta \subseteq I^I$ und δ_η unabhängig (mod F_η).
2. Für $\xi < \eta < 2^\kappa$ gilt $F_\xi \subseteq F_\eta$ und $\delta_\xi \supseteq \delta_\eta$.
3. Für jedes $\eta < 2^\kappa$ gilt $\text{card}(\delta_\eta) = 2^\kappa$.
4. Wenn η eine Limesordinalzahl ist, dann gilt $F_\eta = \bigcup\{F_\xi | \xi < \eta\}$ und $\delta_\eta = \bigcap\{\delta_\xi | \xi < \eta\}$.
5. Für jedes $\eta < 2^\kappa$ ist $\delta_\eta \setminus \delta_{\eta+1}$ endlich.
6. F_0 wird von Mengen $B_n(n < \omega)$ erzeugt, so daß $\bigcap_{n<\omega} B_n = \emptyset$.
7. Für $\eta < 2^\kappa$ ist entweder A_η oder $I \setminus A_\eta$ in $F_{\eta+1}$.
8. Für jedes $\eta < 2^\kappa$ gilt: Wenn $p_\eta : \mathcal{S}_\omega(I) \to F_\eta$, dann gibt es eine additive Funktion $q : \mathcal{S}_\omega(I) \to F_{\eta+1}$, so daß $q \leq p_\eta$.

Angenommen, die Folgen seien konstruiert.

Sei $D = \bigcup_{\eta<2^\kappa} F_\eta$ und $\delta = \bigcap_{\eta<2^\kappa} \delta_\eta$.

Mit 7. wird D zum Ultrafilter.

Wenn $p : \mathcal{S}_\omega(I) \to D$ monoton ist, dann gibt es (da $\text{cf}(2^\kappa) > \kappa$ (s. Korollar 2.2.4)) ein $\xi < 2^\kappa$, so daß $p : \mathcal{S}_\omega(I) \to F_\xi$. Wendet man 8. auf ein $\eta > \xi$ an, so daß $p_\eta = p$, ergibt sich, daß es eine additive Funktion $q : \mathcal{S}_\omega(I) \to F_{\eta+1} \subseteq D$ gibt, so daß $q \leq p$.

Mit 6. erreicht man, daß D abzählbar unvollständig ist. Damit ist D κ^+-gut.

Zur Konstruktion der δ_η, F_η:
Um 6. zu erhalten, sei $B_n := \{i \in I | n < f(i) < \omega\}$ und $F_0 := ((\{B_n | n < \omega\}))$.

δ_0 ist unabhängig (mod F_0): Seien $f_1, \ldots, f_n \in \delta_0$ paarweise verschieden und $i_1, \ldots, i_n \in I$. Dann gilt mit (5.23) für alle $i \in I$

$$\{j|f(j) = i \wedge f_1(j) = i_1 \wedge \ldots \wedge f_n(j) = i_n\} \neq \emptyset,$$

also bilden diese Mengen ein Erzeugendensystem von F_0 und damit

$$\{j|f_1(j) = i_1 \wedge \ldots \wedge f_n(j) = i_n\} \notin F_0.$$

Für 5., 7. und 8. wenden wir an jedem Schritt η zuerst Lemma 5.4.3 an und erhalten F' und δ'; und dann wenden wir Lemma 5.4.4 auf F' und δ' an und erhalten $F_{\eta+1}$ und $\delta_{\eta+1}$.

Bedingung 4. kann man als Definition für den Limesschritt nehmen: Sei η eine Limesordinalzahl und sei $F_\eta := \bigcup\{F_\xi|\xi < \eta\}$ und $\delta_\eta := \bigcap\{\delta_\xi|\xi < \eta\}$. Dann gilt

- $\mathrm{card}(\delta_\eta) = 2^\kappa$, da $\delta_\eta = \bigcap\{\delta_\xi|\xi < \eta\} = \delta_0 \setminus \bigcap_{\xi<\eta}(\delta_\xi \setminus \delta_{\xi+1})$. δ_0 hat Mächtigkeit 2^κ und der letzte Term hat nur Mächtigkeit η.

- δ_η ist unabhängig (mod F_η): Seien $f_1, \ldots, f_n \in \delta_\eta$ verschieden und $i_1, \ldots, i_n \in I$. Dann gilt für alle $\xi < \eta$

  $$f_1, \ldots, f_n \in \delta_\xi, \text{ also } I \setminus \{j|f_1(j) = i_1 \wedge \ldots \wedge f_n(j) = i_n\} \notin F_\xi,$$

  damit auch

  $$I \setminus \{j|f_1(j) = i_1 \wedge \ldots \wedge f_n(j) = i_n\} \notin \bigcup_{\xi<\eta} F_\xi = F_\eta.$$

  Dann sind Bedingungen 1. und 2. erfüllt.

  δ_0 erfüllt 3., also auch die restlichen δ_η.

□

5.5 Saturiertheit

In diesem Abschnitt werden exemplarisch zwei Anwendungen von guten Ultrafiltern angegeben.

Satz 5.5.1 *Sei α eine unendliche Kardinalzahl und D ein abzählbar unvollständiger α-guter Ultrafilter über einer Menge I. Angenommen,* $\mathrm{card}(\mathfrak{L}) < \alpha$. *Dann ist für jede Familie $\mathfrak{A}_i, i \in I$, von Modellen für $\mathfrak{L}$, das Ultraprodukt $\prod \mathfrak{A}_i/D$ α-saturiert.*

Beweis:
Sei $\mathfrak{A} := \prod \mathfrak{A}_i/D$. Sei $Y \subseteq \mathfrak{A}$ mit $\mathrm{card}(Y) < \alpha$. Sei $\Gamma(x) \subseteq \mathfrak{L}_Y$ und $Th(\mathfrak{A}, Y) \cup \Gamma(x)$ konsistent.

Zu zeigen ist, daß es ein $x \in \mathfrak{A}$ gibt, so daß $(\mathfrak{A}, Y) \models \Gamma[x]$.

Jedes $y \in Y$ läßt sich schreiben als $y = \langle (y_i)_{i \in I} \rangle_D$. Gehe von $\mathfrak{A}_i$ zu $\mathfrak{A}'_i := (\mathfrak{A}_i, (y_i)_{y \in Y})$ über. Dann gilt für das zu y gehörende Konstantensymbol $\dot{y}$

$$\dot{y}^{\prod \mathfrak{A}'_i/D} = \langle (y_i)_{i \in I} \rangle_D = y = \dot{y}^{(\prod \mathfrak{A}_i/D, (z)_{z \in Y})},$$

also

$$\prod \mathfrak{A}'_i/D = (\prod \mathfrak{A}_i/D, (z)_{z \in Y}).$$

Als nächstes zeigen wir für eine Sprache $\mathfrak{K}$:

(5.24) Falls $\mathrm{card}(\mathfrak{K}) < \alpha$ und $(\mathfrak{B}_i)_{i \in I}$ eine Familie von

$\mathfrak{K}$-Strukturen ist, dann gilt für jede Menge $\Sigma(x)$ von Formeln von $\mathfrak{K}$:
Wenn jede endliche Teilmenge von $\Sigma(x)$ in $\prod \mathfrak{B}_i/D$ erfüllbar ist,
dann ist auch $\Sigma(x)$ erfüllbar in $\prod \mathfrak{B}_i/D$.

Angenommen, jede endliche Teilmenge von $\Sigma(x)$ ist in $\prod \mathfrak{B}_i/D$ erfüllbar. Da D abzählbar unvollständig ist, können wir eine absteigende Kette

$$I = I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$$

wählen, so daß $I_n \in D$ und $\bigcap_{n \in \omega} I_n = \emptyset$. Es gilt $\mathrm{card}(\Sigma) < \alpha$, da $\mathrm{card}(\mathfrak{K}) < \alpha$.

Definiere eine Funktion $f : \mathcal{S}_\omega(\Sigma) \to D$ wie folgt: Für $\sigma \in \mathcal{S}_\omega(\Sigma)$ sei

$$f(\sigma) := I_{\mathrm{card}(\sigma)} \cap \{i \in I | \mathfrak{B}_i \models \exists x \bigcap \sigma\}, \tag{5.25}$$

mit der Konvention, daß $f(\emptyset) = I$. Jedes $\sigma \in \mathcal{S}_\omega(\Sigma)$ ist endlich und damit nach Annahme erfüllbar in $\prod \mathfrak{B}_i/D$; also $\prod \mathfrak{B}_i/D \models \exists x \bigwedge \sigma$. Mit dem Fundamentaltheorem 5.1.4 gilt $f(\sigma) \in D$. Für $\sigma \subseteq \tau \in \mathcal{S}_\omega(\Sigma)$ gilt

$$I_{\mathrm{card}(\tau)} \subseteq I_{\mathrm{card}(\sigma)} \text{ und } \vdash \exists x \bigwedge \tau \to \exists x \bigwedge \sigma,$$

also gilt $f(\tau) \subseteq f(\sigma)$ und f ist monoton.

Da D α-gut ist, gibt es eine additive Funktion $g : \mathcal{S}_\omega(\Sigma) \to D$, so daß $g \leq f$. Für jedes $i \in I$ sei

$$\sigma(i) := \bigcup \{\vartheta \in \Sigma | i \in g(\{\vartheta\})\}. \tag{5.26}$$

Wenn $\mathrm{card}(\sigma(i)) \geq n$, dann ist $i \in I_n$: Wenn nämlich $\sigma(i)$ mindestens n verschiedene Elemente $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ hat, so gilt für $s \leq n$

$$i \in g(\{\vartheta_s\}),$$

also gilt mit der Additivität von g

$$\begin{array}{rcl} i \in g(\{\vartheta_1\}) \wedge \ldots \wedge g(\{\vartheta_n\}) & = & g(\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n\}) \\ & \subseteq & f(\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n\}) \\ & \subseteq & I_n. \end{array}$$

Da $\bigcap_{n\in\omega} I_n = \emptyset$, ist $\sigma(i)$ für jedes $i \in I$ endlich.

Wähle nun eine Funktion h_D, die $\Sigma(x)$ in $\prod \mathfrak{B}_i/D$ erfüllt: Für jedes $i \in I$ gilt nach (5.25), (5.26) und Additivität

$$i \in \bigcap\{g(\{\vartheta\})|\vartheta \in \sigma(i)\} = g(\sigma(i)) \subseteq f(\sigma(i))$$

und damit $i \in f(\sigma(i))$. Mit (5.25) können wir ein Element $h(i) \in A$ wählen, so daß

$$\mathfrak{B}_i \models \bigwedge \sigma(i)[h(i)]. \tag{5.27}$$

Wenn nun $\vartheta \in \Sigma$ und $i \in g(\{\vartheta\})$, so gilt $\vartheta \in \sigma(i)$ und mit (5.27) gilt $\mathfrak{B}_i \models \vartheta[h(i)]$.

Ferner $g(\{\vartheta\}) \in D$, also gilt mit dem Fundamentaltheorem 5.1.4

$$\prod \mathfrak{B}_i/D \models \vartheta[h_D] \text{ für alle } \sigma \in \Sigma.$$

Dies zeigt, daß h_D Σ in $\prod \mathfrak{B}_i/D$ erfüllt. Damit gilt (5.24).

Setze nun $\mathfrak{B}_i := \mathfrak{A}'_i, \Sigma(x) := \Gamma(x)$. Nach Voraussetzung ist $Th(\mathfrak{A}, Y) \cup \Gamma(x)$ konsistent, also gibt es $\mathfrak{B}, Z \subseteq B$, so daß

$$(\mathfrak{B}, Z, x) \models Th(\mathfrak{A}, Y) \cup \Gamma(x).$$

Sei nun $\Gamma'(x) \subseteq \Gamma(x)$ endlich. Definiere $\varphi(x) := \bigwedge \Gamma'(x)$. Also gilt auch

$$(\mathfrak{B}, Z, x) \models Th(\mathfrak{A}, Y) \cup \{\varphi(x)\}.$$

Damit ist $Th(\mathfrak{A}, Y) \cup \{\exists x\varphi(x)\}$ konsistent. $Th(\mathfrak{A}, Y)$ ist vollständig, also

$$Th(\mathfrak{A}, Y) \models \exists x\varphi(x) \text{ oder } Th(\mathfrak{A}, Y) \models \neg\exists x\varphi(x).$$

Mit dem vorigen folgt

$$Th(\mathfrak{A}, Y) \models \exists x\varphi(x),$$

also

$$(\mathfrak{A}, Y) \models \exists x\varphi(x)$$

und damit

$$(\mathfrak{A}, Y) \models \Gamma'(x).$$

Also ist $\Sigma(x)(= \Gamma(x))$ in $(\mathfrak{A}, Y)$ endlich erfüllbar. Mit (5.24) ist also auch $\Gamma(x)$ in $\prod \mathfrak{A}'_i/D = (\mathfrak{A}, Y)$ erfüllbar. □

Satz 5.5.2 *Sei α eine Kardinalzahl. Nehme an, daß $2^\alpha = \alpha^+$. Sei* $\operatorname{card}(\mathfrak{L}) \leq \alpha$ *und seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Modelle für $\mathfrak{L}$ mit* $\operatorname{card}(A) \leq \alpha^+$ *und* $\operatorname{card}(B) \leq \alpha^+$*. Sei D ein α^+-guter abzählbar unvollständiger Ultrafilter über einer Menge I,* $\operatorname{card}(I) = \alpha$*. Dann ist das folgende äquivalent:*

1. $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$
2. $\prod \mathfrak{A}/D \cong \prod \mathfrak{B}/D$.

Beweis:
1. $\to$ 2.: Angenommen, 1. Mit Satz 5.5.1 sind die Ultrapotenzen $\prod \mathfrak{A}/D$ und $\prod \mathfrak{B}/D$ beide α^+-saturiert. Ferner haben sie beide höchstens Kardinalität $(\alpha^+)^\alpha = 2^\alpha = \alpha^+$. Mit den Äquivalenzen $\prod \mathfrak{A}/D \equiv \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \equiv \prod \mathfrak{B}/D$ und dem Isomorphiesatz 2.2.5 für saturierte Modelle haben wir den Isomorphismus $\prod \mathfrak{A}/D \cong \prod \mathfrak{B}/D$.

2. $\to$ 1.: Offensichtlich. □

5.6 Diskussionsstand

Die Frage, wie groß Ultrapotenzen und Boolesche Potenzen sein können, ist bisher nicht umfassend geklärt. Chang und Keisler stellen in [CKe 77] den Spezialfall zur Diskussion, ob es Ultrapotenzen von ω gibt, die

1. singuläre Kardinalität haben;
2. unerreichbare Kardinalität haben.

Für Boolesche Potenzen sind diese Fragen inzwischen geklärt. Mansfield [Ma 71] konstruiert eine Boolesche Potenz, die unerreichbare Kardinalität hat (s. Korollar 6.4.5). Lange löst das Problem allgemeiner; genau die Kardinalzahlen μ mit $\mu^\omega = \mu$ sind Kardinalitäten von Booleschen Potenzen von ω (s. Satz 6.3.6). Ferner zeigt Lange [La 78], daß für alle Booleschen Potenzen mit ω-regulärem Ultrafilter D auf einer vollständigen Booleschen Algebra B gilt, daß $\operatorname{card}(M^{(B)}/D)^\omega = \operatorname{card}(M^{(B)}/D)$.

Lange Zeit wurde für Ultrapotenzen kein analoges Resultat zu dem von Mansfield gefunden, bis Jin und Shelah [JiSh 99] unter Voraussetzung der Existenz von superkompakten Kardinalzahlen eine Ultrapotenz von ω fanden, die unerreichbare Größe hat. Vorarbeit für dieses Resultat wurde geleistet, indem man unter Annahme von großen Kardinalzahlen uniforme, nichtreguläre Ultrafilter konstruierte (da für einen regulären Ultrafilter D auf ω gilt $\operatorname{card}(\omega^\kappa/D) = 2^\kappa$ (Satz 5.2.4 für $\omega \leq \kappa$)). Jin und Shelah zeigen in ihrem Artikel auch, daß man eine Ultrapotenz finden kann, deren Kardinalität eine starke Limeskardinalzahl ist. Damit beantworten sie beide Fragen aus [CKe 77] positiv.

Kapitel 6

Boolesche Potenzen

Dieses Kapitel ist analog zum vorherigen aufgebaut. Ebenso wie dort wird zunächst die zu betrachtende Struktur eingeführt und ein Fundamentaltheorem bewiesen. Um den Zusammenhang zwischen Ultrapotenzen und Booleschen Potenzen deutlich zu machen, wird in Abschnitt 6.2 gezeigt, daß sich jede Ultrapotenz als Boolesche Potenz darstellen läßt.

Größenbetrachtungen sind bei Booleschen Potenzen fruchtbarer als bei Ultrapotenzen; während für letztere nur gewisse einschränkende Faktoren zu möglichen Größen angegeben werden können, hat Lange die möglichen Kardinalitäten von Booleschen Potenzen von ω vollständig angegeben (Satz 6.3.6). Für Boolesche Potenzen von größeren Strukturen kann man ähnliche Sätze zeigen wie für Ultrapotenzen.

In Abschnitt 6.4 wird Mansfields Konstruktion einer unerreichbar großen Booleschen Potenz dargestellt.

Abschnitt 6.5 stellt zwei Saturiertheitsergebnisse von Mansfields Beispiel vor.

6.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

In der Darstellung der Booleschen Potenzen richte ich mich im wesentlichen nach Mansfield ([Ma 71]).

Sei B eine vollständige Boolesche Algebra. Ein B-wertiges Modell erster Ordnung besteht aus einer Menge M zusammen mit Funktionen von endlichen Potenzen von M in die Boolesche Algebra B.

Für den speziellen Fall, daß gilt $B = \{0, 1\}$, sind diese Funktionen gerade die Relationen des Modelles.

Im allgemeineren Fall sind die Funktionen die B-wertigen Relationen auf M.

Die Definition der Wahrheit läßt sich auf B-wertige Modelle ausweiten: Sei $\mathfrak{M}$ eine Struktur. Die Bewertungsfunktion $\|.\| : \mathfrak{M} \to B$ weist jedem Satz $\varphi(m_1, \ldots, m_n)$ einen Wert in B zu und wird wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
&\|R(m_1, \ldots, m_n)\|^B := R^{\mathfrak{M}}(m_1, \ldots, m_n),\\
&\|\varphi \vee \psi\|^B := \|\varphi\|^B \vee \|\psi\|^B,\\
&\|\neg\varphi\|^B := \neg\|\varphi\|^B,\\
&\|\exists x\varphi(x)\|^B := \textstyle\bigvee_{m\in M} \|\varphi(m)\|^B.
\end{aligned}$$

Wenn die betrachtete Struktur und Boolesche Algebra eindeutig sind, werde ich das ^{B} im folgenden weglassen.

Sei $\mathfrak{M}$ eine zweiwertige Struktur. Wir konstruieren eine B-wertige elementare Erweiterung $\mathfrak{M}^{(B)}$. Die Grundmenge von $\mathfrak{M}^{(B)}$ ist die Menge $M^{(B)}$ aller Funktionen von M nach B, die B partitionieren, d.h.

$$\begin{aligned}
M^{(B)} := \quad \{f : M \to B| \quad & \bigvee_{m\in M} f(m) = 1\\
& \wedge \forall m, n \in M(m \neq n \to f(m) \wedge f(n) = 0\}.
\end{aligned}$$

Eine n-stellige Relation auf M erweitern wir zu einer B-wertigen auf $M^{(B)}$ durch

$$\begin{aligned}
\|R(f_1, \ldots, f_n)\| &= \bigvee\{f_1(m_1) \wedge \ldots \wedge f_n(m_n)|\langle m_i\rangle \in M^n \wedge R(m_1, \ldots, m_n)\}\\
&= \bigvee_{m\in M:\mathfrak{M}\models R(m_1,\ldots,m_n)} f_1(m_1) \wedge \ldots \wedge f_n(m_n).
\end{aligned}$$

Hierbei wird die Gleichheit genauso wie die anderen Relationen behandelt:

$$\begin{aligned}
\|f = g\| &= \bigvee_{m,n\in M:\mathfrak{M}\models m=n} f(m) \wedge g(n)\\
&= \bigvee_{m\in M} f(m) \wedge g(m).^1
\end{aligned}$$

Wenn $\|f = g\| = 1$, sind f und g die gleiche Funktion von M in B:

Angenommen, $f \neq g$. Dann existiert ein $m \in M$ mit $f(m) \neq g(m)$, also $f(m) \wedge g(m) < f(m)$ und damit $\bigvee_m f(m) \wedge g(m) < \bigvee_m f(m) = 1$.

[1] Um lange Subskripte zu vermeiden, werde ich im folgenden statt $m_1, \ldots, m_n \in M : \mathfrak{M} \models \varphi(m_1, \ldots, m_n)$ nur $\varphi(m_1, \ldots, m_n)$ schreiben.

Satz 6.1.1 *Für jede Formel φ aus $\mathfrak{L}$ gilt*

$$\|\varphi(u_1,\ldots,u_n)\|^B = \bigvee_{\varphi(m_1,\ldots,m_n)} u_1(m_1)\wedge\ldots\wedge u_n(m_n).$$

Beweis:

- φ atomar: siehe Definition.

- $\varphi = \psi \vee \chi$:

$$\begin{aligned}
\|\varphi(u_1,\ldots,u_n)\| &= \|\psi(u_1,\ldots,u_n)\| \vee \|\chi(u_1,\ldots,u_n)\| \\
&= (\bigvee_{\psi(m_1,\ldots,m_n)} u_1(m_1)\wedge\ldots\wedge u_n(m_n)) \qquad (6.1)\\
&\quad \vee(\bigvee_{\chi(m_1,\ldots,m_n)} u_1(m_1)\wedge\ldots\wedge u_n(m_n)) \\
&= \bigvee_{\psi\vee\chi(m_1,\ldots,m_n)} u_1(m_1)\wedge\ldots\wedge u_n(m_n) \qquad (6.2)
\end{aligned}$$

(6.1)$\geq$(6.2):
Angenommen, a ist obere Schranke von (6.1). Falls $M \models \psi(m_1,\ldots,m_n)\vee \chi(m_1,\ldots,m_n)$, so gilt

$$a \geq u_1(m_1)\wedge\ldots\wedge u_n(m_n).$$

Wenn also $M \models \psi\vee\chi(m_1,\ldots,m_n)$ gilt, so ist

$$a \geq \bigvee_{\psi\vee\chi(m_1,\ldots,m_n)} u_1(m_1)\wedge\ldots\wedge u_n(m_n).$$

(6.2)$\geq$(6.1):
Angenommen, a ist obere Schranke von (6.2). Falls

$$M \models \psi\vee\chi(m_1,\ldots,m_n),$$

so gilt

$$a \geq u_1(m_1)\wedge u_n(m_n),$$

wenn also $M \models \psi(m_1,\ldots,m_n)$, so gilt

$$a \geq \bigvee_{\psi(m_1,\ldots,m_n)} u_1(m_1)\wedge\ldots\wedge u_n(m_n),$$

und wenn $M \models \chi(m_1, \ldots, m_n)$, so gilt

$$a \geq \bigvee_{\chi(m_1,\ldots,m_n)} u_1(m_1) \wedge \ldots \wedge u_n(m_n).$$

- $\varphi \equiv \neg\psi$:

$$\begin{aligned} \|\varphi(u_1, \ldots, u_n)\| &= \neg\|\psi(u_1, \ldots, u_n)\| \\ &= \neg \bigvee_{\psi(m_1,\ldots,m_n)} u_1(m_1) \wedge \ldots \wedge u_n(m_n). \end{aligned}$$

Die Menge aller Werte von B der Form $u_1(m_1) \wedge \ldots \wedge u_n(m_n)$ ist eine Partition von B, also

$$\neg \bigvee_{\psi(m_1,\ldots,m_n)} u_1(m_1) \wedge \ldots \wedge u_n(m_n) = \bigvee_{\neg\psi(m_1,\ldots,m_n)} u_1(m_1) \wedge \ldots \wedge u_n(m_n).$$

- $\varphi \equiv \exists x_1, \ldots, x_k\psi$:

$$\begin{aligned} & \|\varphi(u_1, \ldots, u_n)\| \\ = & \bigvee_{v_1,\ldots,v_k \in M^{(B)}} \|\psi(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_k)\| \\ = & \bigvee_{v_1,\ldots,v_k \in M^{(B)}} \bigvee_{\psi(m_1,\ldots,m_n,q_1,\ldots,q_k)} u_1(m_1) \wedge \ldots \wedge u_n(m_n) \\ & \wedge v_1(q_1) \wedge \ldots \wedge v_k(q_k) \\ = & \bigvee_{\psi(m_1,\ldots,m_n,q_1,\ldots,q_k)} \bigvee_{v_1,\ldots,v_k \in M^{(B)}} u_1(m_1) \wedge \ldots \wedge u_n(m_n) \\ & \wedge v_1(q_1) \wedge \ldots \wedge v_k(q_k) \end{aligned}$$

Für ein festes $m \in M$ definiere $\breve{m} \in M^{(B)}$ als

$$\breve{m}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = m, \\ 0 & \text{für } x \neq m \end{cases}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} \|\varphi(u_1, \ldots, u_n)\| &\geq \bigvee_{\psi(m_1,\ldots,m_n,q_1,\ldots,q_k)} u_1(m_1) \wedge \ldots \wedge u_n(m_n) \\ &\quad \wedge \breve{q}_1(q_1) \wedge \ldots \wedge \breve{q}_k(q_k) \\ &= \bigvee_{\psi(m_1,\ldots,m_n,q_1,\ldots,q_k)} u_1(m_1) \wedge \ldots \wedge u_n(m_n). \end{aligned}$$

Es gilt aber auch

$$\bigvee_{v_1,\ldots,v_k\in M^{(B)}} u_1(m_1)\wedge\ldots\wedge u_n(m_n)\wedge v_1(q_1)\wedge\ldots\wedge v_k(q_k) \leq u_1(m_1)\wedge\ldots\wedge u_n(m_n),$$

und damit

$$\begin{aligned} \|\varphi(u_1,\ldots,u_n)\| &= \bigvee_{\psi(m_1,\ldots,m_n,q_1,\ldots,q_k)} u_1(m_1)\wedge\ldots\wedge u_n(m_n) \\ &= \bigvee_{\exists x_1,\ldots,x_n\psi(m_1,\ldots,m_n,x_1,\ldots,x_n)} u_1(m_1)\wedge\ldots\wedge u_n(m_n). \end{aligned}$$

□

Korollar 6.1.2 *$m \to \check{m}$ ist eine elementare Einbettung von M in $M^{(B)}$.*

Das heißt, ein Satz $\varphi(\check{m}_1,\ldots,\check{m}_n)$ hat zum einen Wert 1 in $M^{(B)}$ genau dann, wenn $\varphi(m_1,\ldots,m_n)$ wahr ist in $\mathfrak{M}$, und zum anderen Wert 0 genau dann, wenn $\varphi(m_1,\ldots,m_n)$ falsch ist in $\mathfrak{M}$:

1. $\|\varphi(\check{m}_1,\ldots,\check{m}_n)\| = 1$ gdw. $\bigvee_{\mathfrak{M}\models\varphi(x_1,\ldots,x_n)} \check{m}_1(x_1)\wedge\ldots\wedge\check{m}_n(x_n) = 1$. Nach Definition von $\check{m}$ gilt das genau dann, wenn $\mathfrak{M}\models\varphi(m_1,\ldots,m_n)$.
2. $\|\varphi(\check{m}_1,\ldots,\check{m}_n)\| = 0$ gdw. $\bigvee_{\mathfrak{M}\models\varphi(x_1,\ldots,x_n)} \check{m}_1(x_1)\wedge\ldots\wedge\check{m}_n(x_n) = 0$ gdw. $\mathfrak{M}\not\models\varphi(m_1,\ldots,m_n)$.

Insbesondere sind die Gleichheitsaxiome gültig. Wenn man die Allquantoren wegläßt und $a\to b = 1$ durch $a\leq b$ ersetzt, erhält man

1. $\|f = f\| = 1$,
2. $\|f = g\| = \|g = f\|$,
3. $\|f = g\|\wedge\|g = h\| \leq \|f = h\|$,
4. $\|f = g\|\wedge\|\varphi(g)\| \leq \|\varphi(f)\|$.

Eine andere einfache Tatsache ist, daß $\|f = \check{m}\| = f(m)$. Dies ist laut Mansfield der Kern der Motivation für $M^{(B)}$.[2]

Für $f\in\mathfrak{M}^{(B)}$ übersetzt sich die Bedingung, daß $f(m) = 1$, zu $\exists m(m\in\mathfrak{M}\wedge f = m)$.

Also beginnt man, um $\mathfrak{M}^{(B)}$ zu erhalten, mit der Menge M und addiert alle abstrakten Objekte x mit $\|x\in\mathfrak{M}\| = 1$. Mit dieser Interpretation sagt

[2] s. [Ma 71] S. 301f.

Satz 6.1.1, daß die Formel $\varphi(f,g)$ äquivalent ist zu $\exists m,n \in \mathfrak{M}(f = m \wedge g = n \wedge \varphi(m,n))$.

Der folgende Satz zeigt, daß wir wirklich alle B-Elemente von $\mathfrak{M}$ zu $\mathfrak{M}^{(B)}$ hinzugefügt haben:

Satz 6.1.3 *Sei $\{b_i\}_{i\in I}$ eine paarweise disjunkte Familie in B und $\{f_i\}_{i\in I}$ irgendeine Familie in $\mathfrak{M}^{(B)}$.*

Dann existiert ein $f \in \mathfrak{M}^{(B)}$ mit $\|f = f_i\| \geq b_i$.

Wenn außerdem $\bigvee_i b_i = 1$ ist, so ist f eindeutig und wir schreiben es als $\sum_i b_i \cdot f_i$.

Beweis:

Wir betrachten den Fall $\bigvee_i b_i = 1$. Falls nämlich $\bigvee_i b_i \neq 1$, definiere eine neue Indexmenge $J = I \cup \{I\}$ und setze $b_I := \neg \bigvee_i b_i$ und wähle f_I beliebig aus $\mathfrak{M}^{(B)}$.

Sei nun $f(m) = \bigvee_i b_i \wedge f_i(m)$.

Behauptung: $f \in \mathfrak{M}^{(B)}$.

Beweis der Behauptung:

Für $m \neq n$ gilt

$$\begin{aligned} f(m) \wedge f(n) &= (\textstyle\bigvee_i b_i \wedge f_i(m)) \wedge (\bigvee_j b_j \wedge f_j(n)) \\ &= \textstyle\bigvee_{i,j} b_i \wedge b_j \wedge f_i(m) \wedge f_j(n). \end{aligned}$$

Wenn $i \neq j$, so ist $b_i \wedge b_j = 0$. Wenn $i = j$, so ist $f_i(m) \wedge f_j(n) = 0$. Also folgt $f(m) \wedge f(n) = 0$.

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \textstyle\bigvee_m f(m) &= \textstyle\bigvee_m \bigvee_i b_i \wedge f_i(m) \\ &= \textstyle\bigvee_i \bigvee_m b_i \wedge f_i(m) \\ &= \textstyle\bigvee_i b_i = 1. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Behauptung: $b_i \wedge \|f = f_i\| = b_i$.

Beweis:

$$\begin{aligned} b_i \wedge \|f = f_i\| &= b_i \wedge \textstyle\bigvee_m f(m) \wedge f_i(m) \\ &= \textstyle\bigvee_m \bigvee_j b_i \wedge b_j \wedge f_i(m) \wedge f_j(m) \\ &= \textstyle\bigvee_m b_i \wedge f_i(m) \\ &= b_i. \end{aligned}$$

Damit gilt die Behauptung.

Für die Eindeutigkeit nehmen wir an, daß für jedes i gilt $\|f = f_i\| \geq b_i$ und $\|g = f_i\| \geq b_i$. Damit erhält man

$$\|f = g\| \geq \|f = f_i\| \wedge \|f_i = g\| \geq b_i,$$

das heißt,

$$\|f = g\| \geq \bigvee_i b_i = 1.$$

Wie oben bemerkt, sind zwei Funktionen gleich, die mit Wert 1 gleich sind. □

Satz 6.1.4 *Für jede Formel $\varphi(x)$ gibt es ein $f \in \mathfrak{M}^{(B)}$ mit*

$$\|\exists x \varphi(x)\| = \|\varphi(f)\|.$$

Beweis:
Mit Hilfe des Auswahlaxioms können wir eine Wohlordnung $\langle g_\alpha \rangle_{\alpha<\lambda}$ von $M^{(B)}$ angeben. Damit ergibt sich

$$\|\exists x \varphi(x)\| = \bigvee_{\alpha<\lambda} \|\varphi(g_\alpha)\|.$$

Sei $b_\alpha = \|\varphi(g_\alpha)\| - \bigvee_{\beta<\alpha} \|\varphi(g_\beta)\|$. Dann gilt für $\alpha \neq \beta$ $b_\alpha \wedge b_\beta = 0$ und $\bigvee_{\alpha<\lambda} b_\alpha = \|\exists x \varphi(x)\|$.

Wähle $f \in M^{(B)}$ mit $\|f = g_\alpha\| \geq b_\alpha$. Damit gilt

$$\|\varphi(f)\| \geq \|f = g_\alpha\| \wedge \|\varphi(g_\alpha)\| \geq b_\alpha$$

und

$$\|\varphi(f)\| \geq \bigvee_{\alpha<\lambda} b_\alpha = \|\exists x \varphi(x)\|.$$

□

Definition 6.1.5 *Für einen Ultrafilter D auf B können wir ein zweiwertiges Modell $\mathfrak{M}^{(B)}/D$ definieren; die* **Boolesche Potenz** *von $\mathfrak{M}$ modulo D. Die B-wertigen Relationen auf $M^{(B)}$ werden durch den Ultrafilter faktorisiert. In Symbolen:*

$$\mathfrak{M}^{(B)}/D \models R(f_1, \ldots, f_n) \textit{ gdw. } \|R(f_1, \ldots, f_n)\| \in D.$$

Zum Beispiel:

$$\mathfrak{M}^{(B)}/D \models f_D \leq g_D \text{ gdw. } \|f \leq g\| \in D.$$

Satz 6.1.6 *$\varphi(f_1, \ldots, f_n)$ ist genau dann wahr in $\mathfrak{M}^{(B)}/D$, wenn*

$$\|\varphi(f_1, \ldots, f_n)\| \in D.$$

Beweis:

- Für atomare φ gilt die Behauptung nach Definition.
- $\varphi \equiv \vartheta \vee \psi$:

$$\begin{aligned} \|\varphi\| \in D \quad & \text{gdw.} \quad \|\vartheta\| \in D \vee \|\psi\| \in D \\ & \text{gdw.} \quad \mathfrak{M}^{(B)}/D \models \vartheta \vee \mathfrak{M}^{(B)}/D \models \psi \\ & \text{gdw.} \quad \mathfrak{M}^{(B)}/D \models \varphi. \end{aligned}$$

- $\varphi \equiv \neg\psi$:

$$\|\varphi\| \in D \text{ gdw. } \neg\|\psi\| \in D$$

  Da D Ultrafilter ist, gilt das genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \|\psi\| \notin D \quad & \text{gdw.} \quad \mathfrak{M}^{(B)}/D \not\models \psi \\ & \text{gdw.} \quad \mathfrak{M}^{(B)}/D \models \varphi. \end{aligned}$$

- $\varphi \equiv \exists x \psi(x)$: Mit Satz 6.1.4 folgt

$$\begin{aligned} \|\varphi\| \in D \quad & \text{gdw.} \quad \exists f(\|\psi(f)\| \in D) \\ & \text{gdw.} \quad \exists f(\mathfrak{M}^{(B)}/D \models \psi(f)) \\ & \text{gdw.} \quad \mathfrak{M}^{(B)}/D \models \exists x \psi(x). \end{aligned}$$

□

Korollar 6.1.7 $\mathfrak{M}^{(B)}/D$ *ist eine elementare Erweiterung von* $\mathfrak{M}$.

6.2 Ultrapotenzen als Boolesche Potenzen

In Kapitel 5 wurden Ultrapotenzen als reduzierte Potenzen modulo eines Ultrafilters definiert. In diesem Abschnitt werden wir zeigen, daß man Ultrapotenzen auch als Spezialfall von Booleschen Potenzen sehen kann; nämlich als diejenigen, für die die Boolesche Algebra eine Potenzmengenalgebra ist.

Sei I eine Menge und M die Grundmenge einer Struktur $\mathfrak{M} = (M; \ldots)$. Zu zeigen ist, daß

$$M^{(\mathfrak{P}(I))}/D \cong M^I/D.$$

Der Filter D ist auf beiden Seiten der gleiche; einmal als Filter über I und einmal als Filter auf $\mathfrak{P}(I)$ gesehen.

Für $f \in M^I$ sei $f^* : M \to \mathfrak{P}(I)$ definiert durch

$$f^*(m) := \{i \in I | f(i) = m\}.$$

Da der Definitionsbereich von f die Menge I ist, ergibt sich $\bigvee_{m \in M} f^*(m) = 1$. f^* ist injektiv, weil f eine Funktion ist. Damit gilt $f^* \in M^{(\mathfrak{P}(I))}$. Sei umgekehrt $g \in M^{(\mathfrak{P}(I))}$. Definiere $\tilde{g} : I \to M$ durch

$$\tilde{g}(i) := a, \text{ wobei } i \in g(a).$$

Sei $i \in I$. Dann gilt $\widetilde{f^*}(i) = m$, für $i \in f^*(m) = \{j \in I | f(j) = m\}$, das heißt, $\widetilde{f^*}(i) = m = f(i)$.

Sei $m \in M$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(\tilde{g})^*(m) &= \{i \in I | \tilde{g}(i) = m\} \\ &= \{i \in I | i \in g(m)\} = g(m).\end{aligned}$$

Somit gibt es eine Bijektion zwischen M^I und $M^{(\mathfrak{P}(I))}$.

Es bleibt zu zeigen, daß für $g_1, \ldots, g_n \in M^{(\mathfrak{P}(I))}$ gilt

$$\{i \in I | \varphi(\tilde{g}_1(i), \ldots, \tilde{g}_n(i))\} = \|\varphi(g_1, \ldots, g_n)\|.$$

$$\begin{aligned}\|\varphi(g_1, \ldots, g_n)\| &= \bigvee_{\varphi(m_1,\ldots,m_n)} g_1(m_1) \wedge \ldots \wedge g_n(m_n) \\ &= \bigvee_{\varphi(m_1,\ldots,m_n)} \{i \in I | i \in g_1(m_1)\} \wedge \ldots \wedge \{i \in I | i \in g_n(m_n)\} \\ &= \bigvee_{\varphi(m_1,\ldots,m_n)} \{i \in I | i \in g_1(m_1) \wedge \ldots \wedge g_n(m_n)\} \\ &= \{i \in I | i \in \bigvee_{\varphi(m_1,\ldots,m_n)} g_1(m_1) \wedge \ldots \wedge g_n(m_n)\} \\ &= \{i \in I | \varphi(\tilde{g}_1(i), \ldots, \tilde{g}_n(i))\}.\end{aligned}$$

6.3 Größe von Booleschen Potenzen

Einige Eigenschaften von Ultrapotenzen lassen sich auf Boolesche Potenzen übertragen; teilweise sind auch die Beweisideen übertragbar. Dieser Abschnitt stellt analoge Ergebnisse zu 4.2 dar; 6.3.1 entspricht 5.2.1 und 6.3.3 entspricht 5.2.7. Darüber hinaus kann man die möglichen Kardinalitäten von Booleschen Potenzen von ω vollständig angeben (Satz 6.3.6).

Lemma 6.3.1 *Sei F ein Filter auf einer Booleschen Algebra B. Dann gilt*

1. *Wenn* $\mathrm{card}(M) = \mathrm{card}(N)$, *dann gilt auch*
$$\mathrm{card}(M^{(B)}/F) = \mathrm{card}(N^{(B)}/F).$$
2. *Wenn* $\mathrm{card}(M) \leq \mathrm{card}(N)$, *dann gilt auch*
$$\mathrm{card}(M^{(B)}/F) \leq \mathrm{card}(N^{(B)}/F).$$
3. $$\mathrm{card}(M) \leq \mathrm{card}(M^{(B)}/F) \leq \mathrm{card}(M^{(B)}) \leq \mathrm{card}(B)^{\mathrm{card}(M)}.$$

Beweis:

1. $\mathrm{card}(M) = \mathrm{card}(N)$, das heißt, es gibt eine bijektive Funktion $\vartheta : M \to N$. Zu einem $g \in M^{(B)}$ definiert
$$\tilde{g}(n) := g(\vartheta^{-1}(n))$$
die Funktion $\tilde{g} \in N^{(B)}$ und
$$\psi(g) := \tilde{g}$$
eine Funktion $\psi : M^{(B)} \to N^{(B)}$.
   - ψ ist injektiv: Seien $g, h \in M^{(B)}$, mit $g \neq h$. Das heißt, es gibt $m \in M$ mit $g(m) \neq h(m)$. Sei $n = \vartheta(m)$. Dann
$$\tilde{g}(n) = g(\vartheta^{-1}(n)) = g(m) \neq h(m) = \tilde{h}(n).$$
   - ψ ist surjektiv: Sei $f \in N^{(B)}$. Dann gilt für $f' \in M^{(B)}$ mit
$$f'(m) = f(\vartheta(m)),$$
daß
$$\tilde{f'}(n) = f'(\vartheta^{-1}(n)) = f(\vartheta(\vartheta^{-1}(n))) = f(n).$$

   Definiere eine Funktion $\varphi : M^{(B)}/F \to N^{(B)}/F$ durch
$$\varphi(g_F) := \tilde{g}_F.$$

- φ ist wohldefiniert und injektiv: Seien $g_F, h_F \in M^{(B)}/F$ mit Repräsentanten $g, h \in M^{(B)}$. Dann gilt

$$\|\psi(g) = \psi(h)\| = \|\tilde{g} = \tilde{h}\|,$$

  also $g =_F h$ genau dann, wenn $\tilde{g} =_F \tilde{h}$.

- φ ist surjektiv: Sei $f_F \in N^{(B)}/F$ mit Repräsentantem $f \in N^{(B)}$. Definiere $f' \in M^{(B)}$ durch

$$f'(m) := f(\vartheta(m)).$$

  Dann gilt

$$\varphi(f'_F) = \tilde{f}_F = f_F.$$

2. Der Beweis verläuft wie der von 1., außer, daß man nur die Injektivität der Funktionen benutzt und nachweist.

3. Zur Erinnerung nochmals die Definition der Funktion $\breve{m}$ aus Satz 6.1.1:

$$\breve{m}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = m \\ 0 & \text{für } x \neq m. \end{cases}$$

Definiere eine Funktion $\varphi :\to M^{(B)}/F$ mittels

$$\varphi(m) := \breve{m}_F.$$

φ ist injektiv: Seien $m, n \in M$. Dann gilt

$$\|\varphi(m) = \varphi(n)\| = \|\breve{m} = \breve{n}\| = \begin{cases} 1 & \text{falls } m = n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit gilt $\operatorname{card}(M) \leq \operatorname{card}(M^{(B)}/F)$.

Für die zweite Ungleichung wähle für jedes $g \in M^{(B)}/F$ einen Repräsentanten $g^* \in M^{(B)}$. Definiere eine Funktion $\varphi : M^{(B)}/F \to M^{(B)}$ durch

$$\varphi(g) := g^*.$$

φ ist injektiv, da $g, h \in M^{(B)}/F$ mit $g \neq h$ insbesondere ungleiche Repräsentanten g^*, h^* haben.

Die dritte Ungleichung gilt, da für $f \in M^{(B)}$ insbesondere gilt $f \in B^M$, und $\operatorname{card}(B^M) = \operatorname{card}(B)^{\operatorname{card}(M)}$.

Damit ist das Lemma gezeigt. □

Das folgende Lemma wird in Satz 6.3.3 und in Mansfields Anwendung von guten Ultrafiltern auf Saturiertheit (Satz 6.5.2) benötigt. Ursprünglich stammt die Konstruktion aus [Ma 71].

Lemma 6.3.2 *Sei A eine unendliche Menge, D ein Ultrafilter auf einer vollständigen Booleschen Algebra B und $g : \mathcal{S}_\omega(A) \to D$ eine additive Funktion, so daß*

$$\bigwedge_{n\in\omega} \bigvee_{\mathrm{card}(u)\geq n} g(u) = 0$$

und $g(\emptyset) = 1$. Dann gibt es eine Funktion $h_g : \mathcal{S}_\omega(A) \to B$, so daß $\mathrm{ran}(h_g)$ eine Partition von B ist und

$$g(v) = \bigvee\{h_g(u)|v \subseteq u\}.$$

Beweis:
Sei $h_g(u) := g(u) - \bigvee\{g(v)|\mathrm{card}(u) < \mathrm{card}(v)\}$. Dann gilt

$$0 < h_g(v) \wedge g(u) \to u \subseteq v. \tag{6.3}$$

Beweis von 6.3: Nehme an, daß $u \not\subseteq v$. Dann folgt $\mathrm{card}(v) < \mathrm{card}(u \cup v)$ und

$$\begin{aligned} h_g(v) \wedge g(u) &\leq (g(v) - g(u \cup v)) \wedge g(u) \\ &\leq (g(v) - g(u) \wedge g(v)) \wedge g(u) = 0. \end{aligned}$$

Damit ist 6.3 gezeigt.

Falls $h_g(u) \wedge h_g(v) > 0$, dann $h_g(v) \wedge g(u) > 0$ und $h_g(u) \wedge g(v) > 0$, Also gilt

$$0 < h_g(v) \wedge h_g(u) \to u = v. \tag{6.4}$$

Ferner gilt

$$\bigvee\{h_g(v)|u \subseteq v\} = g(u). \tag{6.5}$$

Sei dazu $b = g(u) - \bigvee\{h_g(v)|u \subseteq v\}$.

Angenommen, $0 < b$. Wir suchen ein $v \supseteq u$ mit $h_g(v) \wedge b > 0$, um einen Widerspruch zu erhalten.

Sei $c_n = \bigvee\{g(v)|\mathrm{card}(v) = n\}$. $\langle c_n\rangle_{n\in\omega}$ ist monoton fallend: g ist additiv, also $g(v \cup \{j\}) = g(v) \wedge g(\{j\})$, d.h. für jedes Paar $u \subseteq v$ mit $\mathrm{card}(u) = n$ und $\mathrm{card}(v) = n + 1$ gilt $g(u) \geq g(v)$. Damit folgt, daß

$$g(u) \geq g(u) \wedge \bigvee\{g(\{j\})|j \in v \setminus u\} = \bigvee\{g(v)|u \subseteq v, \mathrm{card}(u) + 1\}.$$

Also gilt

$$\bigvee\{g(v)|\mathrm{card}(v)=n\} \geq \bigvee\{g(v)|\mathrm{card}(v)=n+1\}.$$

$$\begin{aligned}\bigwedge_{n\in\omega} c_n &= \bigwedge_{n\in\omega}\bigvee\{g(v)|\mathrm{card}(v)=n\}\\ &= \bigwedge_{n\in\omega}\bigvee_{\mathrm{card}(v)\geq n} g(v)=0.\end{aligned}$$

Es gilt $b \leq c_{\mathrm{card}(u)}$:

$$b = g(u) - \bigvee\{h_g(v)|u\subseteq v\}$$

$$\leq g(u) \leq \bigvee\{g(v)|\mathrm{card}(u)=\mathrm{card}(v)\} = c_{\mathrm{card}(u)}.$$

Also gibt es ein $k\in\omega$, so daß $b-c_k < b-c_{k+1}$ (c_n ist eine monoton fallende Nullfolge, also gibt es k, so daß $c_k > c_{k+1}$, und $b\leq c_{\mathrm{card}(u)}$, damit hat b einen nichtleeren Schnitt mit irgendwelchen c_i), d.h. $(b\wedge c_k)-c_{k+1}>0$.

Da $c_k = \bigvee\{g(v)|\mathrm{card}(v) = k\}$, gibt es ein v mit $\mathrm{card}(v) = k$ und $(b\wedge g(v))-c_{k+1}>0$.

Nach Definition von „-“gilt $(g(v)\wedge b)-c_{k+1} = (g(v)-c_{k+1})\wedge b$.

Behauptung: $g(v)-c_{k+1} = h_g(v)$.

Es ist $h_g(v) = g(v) - \bigvee\{g(w)|\mathrm{card}(v) < \mathrm{card}(w)\}$, also ist zu zeigen, daß $c_{k+1} = \bigvee\{g(w)|\mathrm{card}(w)>k\}$.

Nach Definition gilt $c_{k+1} = \bigvee\{g(w)|\mathrm{card}(w) = k+1\}$. g ist monoton, also ist die obere Schranke von $\bigvee\{g(w)\}$ durch die kleinsten w bestimmt. Damit gilt die Behauptung.

Behauptung: $g(u)\wedge h_g(v) \geq b\wedge h_g(v) > 0$.

„$\geq$“: klar nach Definition von b.

„$>$“: $0 < g(v)\wedge b - c_{k+1} = (g(v)-c_{k+1})\wedge b = h_g(v)\wedge b$.

Daraus folgt mit (6.3) $u\subseteq v$. Widerspruch zur Definition von b, also $b=0$. Damit gilt (6.5).

(6.6) h_g ist eine Partition von B.

Mit (6.4) ist h_g disjunkt und mit (6.5) gilt $\bigvee\{h_g(u)|u\in\mathcal{S}_\omega(A)\}=1$:

$$\begin{aligned}\bigvee\{h_g(u)|u\in\mathcal{S}_\omega(A)\} &= \bigvee\{h_g(u)|\emptyset\subseteq u\}\\ &= g(\emptyset)\\ &= 1.\end{aligned}$$

□

Satz 6.3.3 *(Lange [La 78]) Sei D ein ω-regulärer Ultrafilter auf einer unendlichen, vollständigen Booleschen Algebra B. Dann gilt für alle unendlichen Strukturen $\mathfrak{M}$ mit $\kappa := \mathrm{card}(\mathfrak{M}^{(B)}/D)$, daß $\kappa^\omega = \kappa$.*

Beweis:
Dieser Beweis wird in fünf Schritten geführt. Wie beim Satz von Shelah 5.2.2 bildet man κ^ω injektiv in κ ab.

Schritt 1:
Aus der ω-Regularität von D folgt

(6.7) Es gibt es eine Funktion $g : \mathcal{S}_\omega(\omega) \to D$

und ein disjunktes $h_g : \mathcal{S}_\omega(\omega) \to B,$ so daß für alle $u \in \mathcal{S}_\omega(\omega)$ gilt

$$g(u) = \bigvee_{v \geq u} h_g(v).$$

Beweis von (6.7):
D ist ω-regulär, also gibt es $e_n \in D, n \in \omega$, mit

$$\bigwedge_{n \in \omega} e_n = 0.$$

Definiere $g : \mathcal{S}_\omega(\omega) \to D$ durch

$$g(u) := \bigwedge_{n \leq \max u} e_n.$$

g ist additiv: Seien $u, v \in \mathcal{S}_\omega(\omega)$. Dann gilt

$$g(u) \wedge g(v) = \bigwedge_{n \leq \max u} e_n \wedge \bigwedge_{n \leq \max v} e_n = \bigwedge_{n \leq \max(u \cup v)} e_n = g(u \cup v).$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{k \in \omega} \bigvee_{\mathrm{card}(u) \geq k} g(u) &= \bigwedge_{k \in \omega} \bigvee_{\mathrm{card}(u) \geq k} \bigwedge_{n \leq \max u} e_n \\
&\leq \bigwedge_{k \in \omega \setminus \{0\}} \bigvee_{\mathrm{card}(u) \geq k} e_{k-1} \\
&= \bigwedge_{k \in \omega \setminus \{0\}} e_{k-1} \\
&= \bigwedge_{k \in \omega} e_k \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Mit Lemma 6.3.2 erhalte ich also eine Funktion h_g, die das Gewünschte erfüllt. Damit ist (6.7) gezeigt.

Sei $\mu := \mathrm{card}(\mathfrak{M})$.

Schritt 2:

(6.8) Zu $\sigma : \omega \to \mu^{(B)}$ gibt es eine gemeinsame Verfeinerung P der $\mathrm{ran}(\sigma(n)), n \in \omega$.

Beweis von (6.8):

Definiere P durch

$$P := \{h_g(v) \wedge \bigwedge_{n\in v} q_n | v \in \mathcal{S}_\omega(\omega) \text{ und für } n \in v \text{ gilt } q_n \in \mathrm{ran}(\sigma(n))\} \setminus \{0\}.$$

Für $u, v \in \mathcal{S}_\omega(\omega)$ und $q_n, q'_n \in \mathrm{ran}(\sigma(n))$ für $n \in \omega$ gilt

$$(h_g(v) \wedge \bigwedge_{n\in v} q_n) \wedge (h_g(u) \wedge \bigwedge_{n\in u} q'_n) = 0,$$

falls $u \neq v$ (da h_g disjunkt) oder falls $q_n \neq q'_n$ für ein $n \in u = v$ gilt (da $\mathrm{ran}(\sigma(n))$ eine Partition und somit disjunkt ist). Also ist P eine Antikette und v und $q_n, n \in v$, sind durch $h_g(v) \wedge \bigwedge_{n\in v} q_n \in P$ eindeutig bestimmt.

Ferner gilt

$$\begin{aligned}\bigvee P &= \bigvee\{h_g(v) \wedge \bigwedge_{n\in v} q_n | v \in \mathcal{S}_\omega(\omega) \text{ und für } n \in v \text{ gilt } q_n \in \mathrm{ran}(\sigma(n))\} \\ &= \bigvee_{v\in\mathcal{S}_\omega(\omega)} \{h_g(v) \wedge \bigwedge_{n\in v} q_n | q_n \in \mathrm{ran}(\sigma(n))\}.\end{aligned}$$

Es gilt

$$\bigvee_{v\in\mathcal{S}_\omega(\omega)} \{h_g(v) \wedge \bigwedge_{n\in v} q_n | q_n \in \mathrm{ran}(\sigma(n))\} = \bigvee_{v\in\mathcal{S}_\omega(\omega)} h_g(v) :$$

Sei a kleiner als die linke Seite. Dann gibt es ein $v \in \mathcal{S}_\omega(\omega)$, so daß $a < h_g(v) \wedge \bigwedge_{n\in v} q_n \leq h_g(v)$. Sei a kleiner als die rechte Seite. Dann gibt es ein $v \in \mathcal{S}_\omega(\omega)$, so daß $a < h_g(v)$. Für jedes $n \in \omega$ ist $\mathrm{ran}(\sigma(n))$ eine Partition, also folgt aus $a < 1$, daß $a < \bigvee \mathrm{ran}(\sigma(n))$, das heißt, es gibt ein $p \in \mathrm{ran}(\sigma(n))$, so daß $a < p$. Wähle also für $n \in v$ Elemente $q_n \in \mathrm{ran}(\sigma(n))$ mit $a < q_n$. Dann gilt auch $a < \bigwedge_{n\in v} q_n$, also

$$a < h_g(v) \wedge \bigwedge_{n\in v} q_n.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\bigvee P &= \bigvee_{v\in\mathcal{S}_\omega(\omega)} \{h_g(v) \wedge \bigwedge_{n\in v} q_n | q_n \in \mathrm{ran}(\sigma(n))\} \\
&= \bigvee_{v\in\mathcal{S}_\omega(\omega)} h_g(v) \\
&= g(\emptyset) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Also ist P eine Partition. Damit ist (6.8) gezeigt.

Definiere nun für $n \in \omega$ Funktionen $\zeta_n : P \to \mathrm{ran}(\sigma(n))$ durch

$$\zeta_n(h_g(v) \wedge \bigwedge_{n'\in v} q_{n'}) := \begin{cases} q_n & \text{falls } n \in v, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt für $n \in \omega$

$$\begin{aligned}
\bigvee_{p\in P} (p \wedge \zeta_n(p)) &\geq \bigvee \{h_g(v) \wedge \bigwedge_{n'\in v} q_{n'} | v \in \mathcal{S}_\omega(\omega) \text{ mit } n \in v \\
&\qquad \text{und für } n' \in v\ q_{n'} \in \mathrm{ran}(\sigma(n'))\} \\
&= \bigvee_{n\in v} h_g(v) \\
&= g(\{n\}) \in D.
\end{aligned}$$

Sei dann für $n \in \omega$ und für $\alpha < \mu$ die Funktion $\tilde{\sigma}_n : \mu \to B$ folgendermaßen definiert

$$\tilde{\sigma}_n(\alpha) := \bigvee \{p \in P | \zeta_n(p) = \sigma(n)(\alpha)\}.$$

Schritt 3:

(6.9) $\tilde{\sigma}_n$ ist eine Partitionsfunktion.

Beweis von (6.9):

- Seien $\alpha, \beta < \mu$ mit $\alpha \neq \beta$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_n(\alpha) \wedge \tilde{\sigma}_n(\beta) &= \bigvee \{p \in P | \zeta_n(p) = \sigma(n)(\alpha)\} \\
&\quad \wedge \bigvee \{p \in P | \zeta_n(p) = \sigma(n)(\beta)\} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

  da $\mathrm{ran}(\sigma(n))$ eine Partition ist.

•

$$\begin{aligned}
\bigvee_{\alpha<\mu} \tilde{\sigma}_n(\alpha) &= \bigvee_{\alpha<\mu} \bigvee\{p \in P | \zeta_n(p) = \sigma(n)(\alpha)\} \\
&= \bigvee\{p \in P | \exists \alpha < \mu\ \zeta_n(p) = \sigma(n)(\alpha)\} \\
&= \bigvee\{p \in P\} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Damit ist (6.9) gezeigt.

Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\sigma}_n = \sigma(n)\| &= \bigvee\{p \wedge \sigma(n)(\alpha) | p \in P \wedge \zeta_n(p) = \sigma(n)(\alpha)\} \\
&= \bigvee_{p \in P} (p \wedge \zeta_n(p)) \in D,
\end{aligned}$$

wie oben gezeigt.

Sei nun $N := \bigcup_{u \in \mathcal{S}_\omega(\omega)} \mu^u$. Für $\sigma \in (\mu^{(B)})^\omega$ und $f \in N$ sei

$$\varphi(\sigma)(f) := h_g(\mathrm{dom}(f)) \wedge \bigwedge_{i \in \mathrm{dom}(f)} \tilde{\sigma}_i(f(i)).$$

Schritt 4:

(6.10) $\varphi(\sigma)$ ist eine Partitionsfunktion.

Beweis von (6.10):

- $\varphi(\sigma) : N \to B$ disjunkt: Seien $f_1, f_2 \in N, f_1 \neq f_2$. Dann gilt

$$\varphi(\sigma)(f_1) \wedge \varphi(\sigma)(f_2)$$

$$= h_g(\mathrm{dom} f_1) \wedge h_g(\mathrm{dom} f_2) \wedge \bigwedge_{i \in \mathrm{dom} f_1} \tilde{\sigma}_i(f_1(i)) \wedge \bigwedge_{i \in \mathrm{dom} f_2} \tilde{\sigma}_i(f_2(i)).$$

  1. Fall: $\mathrm{dom} f_1 \neq \mathrm{dom} f_2$. Dann gilt

$$h_g(\mathrm{dom} f_1) \wedge h_g(\mathrm{dom} f_2) = 0,$$

  da h_g disjunkt ist.

2. Fall: $\mathrm{dom} f_1 = \mathrm{dom} f_2 = u$. Dann bilden f_1 und f_2 mindestens ein $i \in u$ auf verschiedene $\alpha, \beta < \mu$ ab, sei i' so ein i. Damit ist

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{i\in u} \tilde\sigma_i(f_1(i)) \wedge \bigwedge_{i\in u} \tilde\sigma_i(f_2(i)) &= \bigwedge_{i\in u}(\tilde\sigma_i(f_1(i)) \wedge \tilde\sigma_i(f_2(i))) \\
&= \tilde\sigma_{i'}(\alpha) \wedge \tilde\sigma_{i'}(\beta) \wedge \\
&\quad \bigwedge_{i\in u\setminus\{i\}} (\tilde\sigma_i(f_1(i)) \wedge \tilde\sigma_i(f_2(i))) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

da $\tilde\sigma_{i'}$ eine Partitionsfunktion ist.

•

$$\begin{aligned}
\bigvee_{f\in N} \varphi(\sigma)(f) &= \bigvee_{f\in N} (h_g(\mathrm{dom} f) \wedge \bigwedge_{i\in \mathrm{dom} f} \tilde\sigma_i(f(i))) \\
&= \bigvee_{u\in\mathcal{S}_\omega(\omega)} \bigvee_{f\in\mu^u} (h_g(u) \wedge \bigwedge \tilde\sigma_i(f(i))) \\
&= \bigvee_{u\in\mathcal{S}_\omega(\omega)} (h_g(u) \wedge \bigvee_{f\in\mu^u} \bigwedge_{i\in u} \tilde\sigma_i(f(i))) \\
&= \bigvee_{u\in\mathcal{S}_\omega(\omega)} (h_g(u) \wedge \bigwedge_{i\in u} \bigvee_{\alpha<\mu} \tilde\sigma_i(\alpha)) \\
&= \bigvee_{u\in\mathcal{S}_\omega(\omega)} (h_g(u) \wedge \bigwedge_{i\in u} 1) \\
&= \bigvee_{u\in\mathcal{S}_\omega(\omega)} h_g(u) \wedge 1 \\
&= g(\emptyset) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Damit ist (6.10) gezeigt.

P ist eine Verfeinerung von $\tilde\sigma_i$, also ist $\mathrm{ran}(h_g) \wedge P = \{a \wedge b | a \in \mathrm{ran}(h_g) \text{ und } b \in P\}$ eine Verfeinerung von $\mathrm{ran}(\varphi(\sigma))$.

Also gilt

$$\varphi : (\mu^{(B)})^\omega \to N^{(B)}.$$

Es bleibt Schritt 5 zu zeigen:

(6.11) φ ist injektiv.

Beweis von (6.11):
Seien $\sigma, \tau \in (\mu^{(B)})^\omega$ und $u \in \mathcal{S}_\omega(\omega)$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
&(6.12)\ h_g(u) \wedge \|\varphi(\sigma) = \varphi(\tau)\| \\
&\qquad = h_g(u) \wedge \bigvee_{f \in \mu^u} \bigwedge_{i \in u} (\tilde{\sigma}_i(f(i)) \wedge \tilde{\tau}_i(f(i))) \\
&\qquad = h_g(u) \wedge \bigwedge_{i \in u} \bigvee_{\alpha \in \mu} (\tilde{\sigma}_i(\alpha) \wedge \tilde{\tau}_i(\alpha)) \\
&(6.13)\qquad = h_g(u) \wedge \bigwedge_{i \in u} \|\tilde{\sigma}_i = \tilde{\tau}_i\|.
\end{aligned}
$$

Wenn man nun in Zeile (6.12) und (6.13) das Supremum über alle u bildet, die i enthalten, so erhält man

$$
\begin{aligned}
\bigvee_{u:i \in u} (h_g(u) \wedge \|\varphi(\sigma) = \varphi(\tau)\|) &= \bigvee_{u:i \in u} (h_g(u) \wedge \bigwedge_{j \in u} \|\tilde{\sigma}_j = \tilde{\tau}_j\|) \\
&\leq \|\tilde{\sigma}_i = \tilde{\tau}_i\|
\end{aligned}
$$

und somit

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{\sigma}_i = \tilde{\tau}_i\| &\geq \bigvee_{u:i \in u} (h_g(u) \wedge \|\varphi(\sigma) = \varphi(\tau)\|) \\
&= g(\{i\}) \wedge \|\varphi(\sigma) = \varphi(\tau)\|.
\end{aligned}
$$

Ist also $\varphi(\sigma) =_D \varphi(\tau)$, so gilt für alle $i \in \omega$

$$\sigma(i) =_D \tilde{\sigma}_i =_D \tilde{\tau}_i =_D \tau(i).$$

Damit gilt (6.11).

Daher induziert φ eine Injektion von $(\mu^{(B)}/D)^\omega$ in $N^{(B)}/D$. Da $\mathrm{card}(N) = \mathrm{card}(\mu^{<\omega}) = \mu$ folgt die Behauptung des Satzes. □

Satz 6.3.3 steckt nur einen Rahmen für die möglichen Kardinalitäten von Booleschen Potennzen ab. Die Kardinalitäten von Booleschen Potenzen von ω kann man hingegen vollständig angeben. Zur Vorbereitung dafür dienen die folgenden beiden Lemmata.

Lemma 6.3.4 *(Lange [La 78]) Sei B_μ die Vervollständigung der freien Booleschen Algebra auf μ Generatoren. Sei $(B_\alpha)_{\alpha<\mu}$ eine aufsteigende Folge von Subalgebren von B_μ. Für $\alpha < \mu$ sei Q_α eine Partition von $B_{\alpha+1}$ und*

$$E_\alpha := \{\neg \bigvee_{p \in P} (p \wedge \zeta(p)) | P \text{ Partition von } B_\alpha \text{ und } \zeta : P \to Q_\alpha\}.$$

Definiere $E := \bigcup_{\alpha<\mu} E_\alpha$.

Falls für jedes $\alpha < \mu$ und jedes $b \in B_\alpha \setminus \{0\}$ die Menge $\{q \in Q_\alpha | q \wedge b > 0\}$ unendlich ist, hat E die endliche Durchschnittseigenschaft.

Beweis:
Aus der Voraussetzung, daß $\{q \in Q_\alpha | q \wedge b > 0\}$ unendlich ist, folgt zunächst, daß für $\alpha < \mu, b' \in B_\alpha \setminus \{0\}$ und $e_1, \ldots, e_n \in E_\alpha$ gilt

$$b' \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq n} e_i > 0. \tag{6.14}$$

Beweis von (6.14):
Wegen $e_i \in E_\alpha$ existieren Partitionen P_i von B_α, $p \in P_i$ und Funktionen $\zeta_i : P_i \to Q_\alpha$, so daß $e_i = \neg \bigvee_{p \in P_i}(p \wedge \zeta(p))$ für $1 \leq i \leq n$. Sei $b' \in B_\alpha \setminus \{0\}$. Dann gibt es für $1 \leq i \leq n$ $p_i \in P_i$ mit $b := b' \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq n} p_i \in B_\alpha \setminus \{0\}$. Nach Voraussetzung gibt es $q \in Q_\alpha \setminus \{\zeta_i(p_i) | 1 \leq i \leq n\}$ mit $q \wedge b > 0$.

Für $1 \leq i \leq n$ gilt

$$p_i \wedge q \wedge \bigvee_{p \in P_i} (p \wedge \zeta(p)) = p_i \wedge q \wedge \zeta_i(p_i) = 0,$$

das heißt,

$$p_i \wedge q \leq \neg \bigvee_{p \in P_i} (p \wedge \zeta_i(p)).$$

Also ist

$$0 < q \wedge b = b' \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq n} (p_i \wedge q) \leq b' \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \neg \bigvee_{p \in P_i} (p \wedge \zeta_i(p)).$$

Damit ist (6.14) gezeigt.

Nun zeigen wir per Induktion, daß für alle $\alpha < \mu$ die Menge $\bigcup_{\beta < \alpha} E_\beta$ die endliche Durchschnittseigenschaft hat:
Sei dies bereits für $\alpha < \gamma$ gezeigt. Seien $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \gamma$ und $e_i \in E_{\beta_i}$ für $1 \leq i \leq n$. Sei $\eta := \max\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$b' := \bigwedge_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \beta_i < \alpha}} e_i \in B_\alpha \setminus \{0\}$$

und daher gilt nach (6.14)

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq n} e_i = b' \wedge \bigwedge_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \beta_i = \alpha}} e_i > 0.$$

Damit hat E die endliche Durchschnittseigenschaft. $\square$

Lemma 6.3.5 *(Lange [La 78]) B_μ, die Vervollständigung der freien Booleschen Algebra auf μ Generatoren, hat einen Ultrafilter D, so daß für alle unendlichen Mengen M gilt*

$$\operatorname{card}(M^{(B_\mu)}/D) \geq \mu.$$

Beweis:
Da μ unendlich ist, gibt es eine Bijektion $\varphi : \mu \times \omega \to \mu$. Sei U eine Menge von unabhängigen Erzeugenden von B_μ und für $\alpha < \mu$ sei

$$B_\alpha := \langle \bigcup_{\beta<\alpha} \bigcup_{n<\omega} U_{\varphi(\beta,n)} \rangle^{\mathrm{cm}}.$$

und

$$\tilde{B}_\alpha := \langle \bigcup_{n<\omega} U_{\varphi(\alpha,n)} \rangle^{\mathrm{cm}}.$$

Für $\alpha < \mu$ sei Q_α eine unendliche Partition von $\tilde{B}_\alpha$. $\tilde{B}_\alpha$ hat als Vervollständigung einer freien Booleschen Algebra die ccc, also ist Q_α abzählbar. Wähle für $\alpha < \mu$ eine Funktion $\sigma_\alpha \in M^{(B_\mu)}$ mit $\operatorname{ran}(\sigma_\alpha) = Q_\alpha$. So eine Funktion gibt es, da $\operatorname{card}(M) \geq \omega = \operatorname{card}(Q_\alpha)$.

Für $\beta < \alpha < \mu$ sei $\zeta : Q_\beta \to Q_\alpha$ definiert durch

$$\zeta(\sigma_\beta(m)) := \sigma_\alpha(m).$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} \|\neg\sigma_\beta = \sigma_\alpha\| &= \neg \bigvee_{m\in M} (\sigma_\beta(m) \wedge \sigma_\alpha(m)) \\ &= \neg \bigvee_{q\in Q_\beta} (q \wedge \zeta(q)) =: e_{\beta,\alpha}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 6.3.4 gibt es einen Ultrafilter D auf B_μ mit $e_{\beta,\alpha} \in D$ für alle $\beta < \alpha < \mu$, denn da B_α und $\tilde{B}_\alpha$ unabhängig sind, ist für $b \in B_\alpha \setminus \{0\}$ die Menge $\{q \in Q_\alpha | q \wedge b > 0\} = Q_\alpha$ unendlich. Also gilt

$$\operatorname{card}(M^{(B_\mu)}/D) \geq \{\sigma_{\alpha D} | \alpha < \mu\} = \mu.$$

□

Satz 6.3.6 *(Lange [La 78]) Die Kardinalitäten der Booleschen Potenzen von ω sind genau ω und die μ mit $\mu^\omega = \mu$.*

Beweis:
Sei zunächst D Ultrafilter auf einer Booleschen Algebra B und sei $\mu := \operatorname{card}(\omega^{(B)}/D)$.

1. Fall: D ist $<\omega_1$-vollständig, d.h. D ist ω-unzerlegbar. Sei $\sigma \in \omega^{(B)}$. ran(σ) ist eine Partition von B, also gibt es ein $M \subseteq \omega$, card$(M) < \omega$, so daß
$$\bigcup_{m \in M} \sigma(m) \in D.$$
Sei M $\subseteq$-minimal mit dieser Eigenschaft. Falls M keine Einermenge ist, so gilt für alle $m \in M$, daß $\sigma(m) \notin D$. Da D ein Ultrafilter ist, gilt damit für alle $m \in M$, daß $I \setminus \sigma(m) \in D$, also ist $\bigcap_{m \in M}(I \setminus \sigma(m)) \in D$, und somit folgt $\bigcup_{m \in M} \sigma(m) \notin D$. Widerspruch.

   Also existiert ein $n_\sigma \in \omega$ mit $\|\sigma = \check{n}_\sigma\| = \sigma(n_\sigma) \in D$. Definiere eine Funktion $\varphi : \omega^{(B)}/D \to \omega$ durch
$$\varphi(\sigma_D) := n_\sigma.$$
φ ist injektiv: Seien $\sigma_D, \rho_D \in \omega^{(B)}$ mit $\sigma_D \neq \rho_D$. Dann gilt $\|\sigma = \rho\| \notin D$, also folgt aus $\|\sigma = \check{n}_\sigma\| \in D$, daß $\|\rho = \check{n}_\sigma\| \notin D$. Damit gilt $n_\sigma \neq n_\rho$.

   Also ist φ injektiv und $\mu = \omega$.

2. Fall: D ist $<\omega_1$-unvollständig. Damit ist D ω-regulär, also $\mu^\omega = \mu$ nach Satz 6.3.3.

Umgekehrt ist card$(\omega^{(2)}/\{1\}) = \omega$ und für μ mit $\mu^\omega = \mu$ gibt es nach Lemma 6.3.5 einen Ultrafilter D von B_μ mit card$(\omega^{(B_\mu)}/D) \geq \mu$; aber auch card$(\omega^{(B_\mu)}/D) \leq$ card$((B_\mu)^\omega) \leq \mu^\omega = \mu$. □

6.4 Mansfields Konstruktion

Mansfield konstruiert in [Ma 71] eine Boolesche Potenz, die unerreichbare Kardinalität hat. Dafür benutzt er nur die Existenz einer unerreichbaren Kardinalzahl als Voraussetzung; im Gegensatz zur Konstruktion von Jin und Shelah für Ultrapotenzen [JiSh 99], die superkompakte Kardinalzahlen benötigt.

Dieses Kapitel orientiert sich an Mansfield [Ma 71], Abschnitt 4. Mansfield zeigt für eine unerreichbare Kardinalzahl κ, daß man für eine κ-disjunktifizierbare Boolesche Algebra einen κ-guten Ultrafilter findet (Satz 6.4.4). Daraus läßt sich folgern, daß es eine Boolesche Potenz der Größe κ gibt (Korollar 6.4.5).

Definition 6.4.1 *Ein Ultrafilter D auf einer Booleschen Algebra B ist* **gut für** λ*, wenn er abzählbar unvollständig ist und jede monotone Funktion von $S_\omega(\lambda)$ in D eine additive Verfeinerung hat, deren Wertebereich eine Teilmenge von D ist.*

Definition 6.4.2 *Ein Ultrafilter D auf einer Booleschen Algebra B ist* **κ-gut**, *wenn D abzählbar unvollständig und gut ist für jedes $\lambda < \kappa$.*

Lemma 6.4.3 *(Mansfield [Ma 71]) Wenn B eine κ-disjunktifizierbare Boolesche Algebra ist und $C \subseteq B$ mit der endlichen Durchschnittseigenschaft und $\mathrm{card}(C) < \kappa$ und $f : S_\omega(\lambda) \to C$ eine monotone Funktion für ein $\lambda < \kappa$, dann kann C zu einer Menge C' erweitert werden, die die endliche Durchschnittseigenschaft hat, den Wertebereich einer additiven Verfeinerung von f enthält und $\mathrm{card}(C') < \kappa$.*

Beweis:
Ohne Einschränkung gelte $1 \in C$. Für $y \in C$ und $x \in S_\omega(\lambda)$ gilt $y \wedge f(x) > 0$, also hat die Funktion $x \mapsto y \wedge f(x)$ eine disjunktive Verfeinerung $h(x, y)$.

Definiere $g : S_\omega(\lambda) \to B$ durch

$$g(x) := \bigvee \{h(z, y) | x \subseteq z \text{ und } y \in C\}.$$

Für $x \subseteq z$ gilt

$$h(z, y) \leq y \wedge f(z) \leq f(z) \leq f(x),$$

also ist g eine Verfeinerung von f.

Behauptung:

(6.15) g ist additiv.

Beweis von (6.15):

$$\begin{aligned} & g(x_1) \wedge g(x_2) \\ = & \bigvee \{h(z_1, y_1) \wedge h(z_2, y_2) | x_1 \subseteq z_1 \text{ und } x_2 \subseteq z_2 \text{ und } y_1 \in C \text{ und } y_2 \in C\}. \end{aligned}$$

Da h disjunkt ist, ist das gleich

$$\begin{aligned} & \bigvee \{h(z, y) | x_1 \subseteq z \text{ und } x_2 \subseteq z \text{ und } y \in C\} \\ = & \bigvee \{h(z, y) | x_1 \cup x_2 \subseteq z \text{ und } y \in C\} \\ = & g(x_1 \cup x_2). \end{aligned}$$

Damit ist (6.15) gezeigt.

Definiere nun C' durch

$$C' := \{y \wedge g(x) | y \in C \text{ und } x \in S_\omega(\lambda)\}.$$

C' erfüllt das Gewünschte:

Wegen $y \wedge g(x) \geq h(x, y) > 0$ für alle $y \in C$ und $x \in S_\omega(\lambda)$, ist $0 \notin C'$.

Für $y_1, y_2 \in C$ und $x_1, x_2 \in S_\omega(\lambda)$ gilt

$$\begin{aligned} y_1 \wedge g(x_1) \wedge y_2 \wedge g(x_2) &= y_1 \wedge y_2 \wedge g(x_1) \wedge g(x_2) \\ &= y_1 \wedge y_2 \wedge g(x_1 \cup x_2) \in C', \end{aligned}$$

da C die endliche Durchschnittseigenschaft hat.

Ferner ist $\mathrm{card}(C') \leq \mathrm{card}(C) \cdot \lambda < \kappa \cdot \lambda = \kappa$. □

Wir suchen nun eine Boolesche Algebra B, die κ-disjunktifizierbar ist. Nach Korollar 3.1.9 ist dies jede κ-vollständige Boolesche Algebra, z. B. B_κ, die Vervollständigung der freien Booleschen Algebra auf κ Generatoren.

B_κ hat ferner die ccc aufgrund der Bemerkung nach Satz 3.3.5 und damit nach Satz 3.4.2 Kardinalität κ.

Satz 6.4.4 *(Mansfield [Ma 71]) Es gibt einen κ-guten, abzählbar unvollständigen Ultrafilter D auf B_κ.*

Beweis:
Für jedes $\lambda < \kappa$ gilt $\mathrm{card}(B_\kappa^{\mathcal{S}_\omega(\lambda)}) = \kappa$, also auch $\mathrm{card}(\bigcup_{\lambda<\kappa} B_\kappa^{\mathcal{S}_\omega(\lambda)}) = \kappa$.

Sei nun $\{f_i | i < \kappa\}$ eine Aufzählung von $\bigcup_{\lambda<\kappa} B_\kappa^{\mathcal{S}_\omega(\lambda)}$.

Sei $E_0 \subseteq B_\kappa$ so, daß $\mathrm{card}(E_0) < \kappa$ und E_0 die endliche Durchschnittseigenschaft hat und es eine Teilmenge $\bar{E} \subseteq E_0$ gibt mit $\mathrm{card}(\bar{E}) = \omega$ und $\bigwedge \bar{E} = 0$.

Konstruiere folgende Kette:
Für den Schritt $i + 1$ nehme an, daß E_i schon konstruiert ist.

Wenn $E_i \cup \mathrm{ran}(f_i)$ nicht die endliche Durchschnittseigenschaft hat, dann setze $E_{i+1} := E_i$.

Ansonsten hat $E_i' := E_i \cup \mathrm{ran}(f_i)$ die endliche Durchschnittseigenschaft. Da $\mathrm{card}(E_i') < \kappa$, kann Satz 6.4.3 darauf angewendet werden und man erhält E_{i+1}, so daß f_i eine Verfeinerung g_i hat mit $\mathrm{ran}(g_i) \subseteq E_{i+1}$.

Falls $\delta < \kappa$ eine Limesordinalzahl ist, definiere $E_\delta' := \bigcup_{i<\delta} E_i$. Es gilt $\mathrm{card}(E_\delta') < \kappa$ und E_δ' hat die endliche Durchschnittseigenschaft.

Wenn $E_\delta' \cup \mathrm{ran}(f_\delta)$ nicht die endliche Durchschnittseigenschaft hat, dann setze $E_\delta := E_\delta'$.

Ansonsten kann ich Satz 6.4.3 auf E_δ' anwenden und erhalte E_δ, so daß f_δ eine Verfeinerung g_δ hat mit $\mathrm{ran}(g_\delta) \subseteq E_\delta$.

Sei $E = \bigcup_{i<\kappa} E_i$. E hat die endliche Durchschnittseigenschaft, also kann ich E mit Satz 4.1.8 zu einem Ultrafilter D erweitern.

D ist abzählbar unvollständig, da $E_0 \subseteq D$. Sei $\lambda < \kappa$ und $f : \mathcal{S}_\omega(\lambda) \to D$. Dann gibt es ein $i < \kappa$, so daß $f = f_i$. Also gibt es eine additive Verfeinerung $g_i : \mathcal{S}_\omega(\lambda) \to B_\kappa$ von f, so daß $\mathrm{ran}(g_i) \subseteq E_{i+1} \subseteq D$. Damit ist D κ-gut. □

Korollar 6.4.5 *(Mansfield [Ma 71]) Wenn* $\mathrm{card}(M) < \kappa$ *und* D *ein* κ*-guter, abzählbar unvollständiger Ultrafilter auf* B_κ *ist, dann ist* $\mathrm{card}(M^{(B_\kappa)}/D) = \kappa$.

Beweis:
Sei $\alpha := \mathrm{card}(M)$. Dann gilt (mit Satz 6.3.1)

$$\mathrm{card}(M^{(B_\kappa)}/D) \leq \mathrm{card}(M^{(B_\kappa)}) \leq \mathrm{card}(M)^{\mathrm{card}(B_\kappa)} = \alpha^\kappa \leq \kappa.$$

Mit 6.5.2 ist $\mathfrak{M}^{(B_\kappa)}/D$ κ-saturiert, also muß $\mathfrak{M}^{(B_\kappa)}/D$ mindestens κ-viele Elemente enthalten. □

Es gibt also Boolesche Potenzen unerreichbarer Kardinalität. Das nächste Resultat ist eine Anwendung von Mansfields Konstruktion auf Saturiertheit, im Vorgriff auf den folgenden Abschnitt.

Korollar 6.4.6 *(Mansfield [Ma 71]) Wenn* $\mathrm{card}(M) < \kappa$ *und* D *ein* κ*-guter Ultrafilter auf* B_κ *ist, dann ist* M *saturiert.*

Beweis:
B_κ ist eine vollständige Boolesche Algebra, der oben konstruierte Ultrafilter D ist κ-gut und abzählbar unvollständig, also kann ich Satz 6.5.2 anwenden.

□

6.5 Saturiertheit

Nach einem allgemeineren Satz über Saturiertheit von Booleschen Potenzen wird in Satz 6.5.2 eine Anwedung für gute Ultrafilter gegeben.

Lemma 6.5.1 *(Mansfield [Ma 71]) Jede Boolesche Potenz* $\mathfrak{M}^{(B)}/D$ *mit einer unendlichen Struktur* $\mathfrak{M}$ *und einem abzählbar unvollständigen Ultrafilter* D *ist* $\aleph_1$*-saturiert.*

Beweis:
Sei $\{\varphi_n(x) | n \in \omega\}$ eine abzählbare, in $\mathfrak{M}^{(B)}/D$ endlich erfüllbare Menge von Formeln einer Variablen. Indem wir gegebenenfalls Konjunktionen benutzen, können wir annehmen, daß φ_n eine logische Folge aus φ_{n+1} ist, also $\|\varphi_{n+1}\| \leq \|\varphi_n\|$. Es ist zu zeigen, daß $\{\varphi_n | n \in \mathbb{N}\}$ in $\mathfrak{M}^{(B)}/D$ erfüllbar ist.

Sei nun $(b_n)_{n\in\omega}$ eine absteigende Folge in D mit $\bigwedge b_n = 0$ und sei $a_n = b_n \wedge \|\exists x \varphi_n(x)\|$. Dann gilt für jedes $n \in \omega$ $a_n \in D$ und $\bigwedge_n a_n = \emptyset$. Sei $c_n := a_n \setminus a_{n+1}$; wähle f_n in $\mathfrak{M}^{(B)}$ mit $\|\varphi_n(f_n)\| = \|\exists x \varphi_n(x)\|$ und wähle ein $f \in \mathfrak{M}^{(B)}$ mit $\|f = f_n\| \geq c_n$ (so ein f existiert nach Satz 6.1.3).

Dann gilt für $k \geq n$

$$\|\varphi_n(f)\| \geq \|f = f_k\| \wedge \|\varphi_n(f_k)\| \geq$$

$$\|f = f_k\| \wedge \|\varphi_k(f_k)\| \geq c_k$$

und damit

$$\|\varphi_n(f)\| \geq \bigvee_{n \leq k} c_k = a_n \in D.$$

□

Satz 6.5.2 *(Mansfield [Ma 71]) Sei $\mathfrak{M}$ eine unendliche Struktur. Wenn ein Ultrafilter D auf einer vollständigen Booleschen Algebra B κ-gut und abzählbar unvollständig ist, dann ist $\mathfrak{M}^{(B)}/D$ κ-saturiert.*

Beweis:
Sei Γ eine Formelmenge einer freien Variable, $\mathrm{card}(\Gamma) < \kappa$. Für $I \subseteq \Gamma$ und $\mathrm{card}(I) < \omega$, definiere $\varphi_I(x) = \bigwedge I(x)$.

Zu zeigen ist: Falls für jedes I $\mathfrak{M}^{(B)}/D \models \exists x \varphi_I(x)$, dann existiert ein f in $\mathfrak{M}^{(B)}/D$, so daß $\mathfrak{M}^{(B)}/D \models \varphi_I(f)$ für jedes I.

Sei dazu $(a_n)_{n \in \omega}$ eine streng monoton fallende Folge in D mit $a_0 = 1$ und $\bigwedge_n a_n = 0$. Definiere

$$\tilde{f}(I) := a_{\mathrm{card}(I)} \wedge \|\exists x \varphi_I(x)\|.$$

$\tilde{f}$ ist monoton: Sei $I \subseteq J$, dann gilt $a_{\mathrm{card}(J)} \leq a_{\mathrm{card}(I)}$, da a_n streng monoton fallend ist, und es gilt $\|\exists x \varphi_J(x)\| \leq \|\exists x \varphi_I(x)\|$, da $\varphi_I(x) = \bigwedge I(x) \leq \bigwedge J(x)$.

Es gilt $\tilde{f} : [\Gamma]^{<\omega} \to D$: Nach Definition gilt $a_{\mathrm{card}(I)} \in D$ und $\mathfrak{M}^{(B)}/D \models \exists x \varphi_I(x)$, also auch $\|\exists x \varphi_I(x)\| \in D$.

Es gilt $\mathrm{card}(\Gamma) < \kappa$ und D ist κ-gut, also hat $\tilde{f}$ eine additive Verfeinerung g.

Definiere $\tilde{g}$ durch

$$\tilde{g}(I) := \begin{cases} g(I) & \text{für } I \neq \emptyset \\ 1 & \text{für } I = \emptyset \end{cases}$$

Als nächstes ist zu zeigen

$$\tilde{g} \text{ ist eine additive Verfeinerung von } \tilde{f}. \tag{6.16}$$

Es ist leicht zu sehen, daß $\tilde{g}$ eine Verfeinerung von $\tilde{f}$ ist, da für $I \neq \emptyset$ gilt $\tilde{g}(I) = g(I) \leq \tilde{f}$.
Für $I = \emptyset$ gilt $\tilde{g}(\emptyset) = 1 = \tilde{f}(\emptyset)$, da $a_{\mathrm{card}(\emptyset)} = 1$ und $\|\exists x \varphi_\emptyset(x)\| = 1$.

Es bleibt zu zeigen, daß $\tilde{g}$ additiv ist: Falls $I = J = \emptyset$, gilt $\tilde{g}(I \cup J) = \tilde{g}(\emptyset \cup \emptyset) = 1 = \tilde{g}(\emptyset) \wedge \tilde{g}(\emptyset)$.
Falls $I \neq J$ und $I = \emptyset$, gilt $\tilde{g}(I \cup J) = \tilde{g}(J) = g(J) = g(J) \wedge 1 = \tilde{g}(J) \wedge \tilde{g}(I)$.
Falls $I \neq \emptyset \neq J$, gilt $\tilde{g}(I \cup J) = g(I \cup J) = g(I) \wedge g(J) = \tilde{g}(I) \wedge \tilde{g}(J)$.

Damit gilt (6.16).

Es gilt

$$\begin{aligned}
\bigvee\{g(I)|\mathrm{card}(I) = n\} &\leq \bigvee\{\tilde{f}(I)|\mathrm{card}(I) = n\} \\
&= \bigvee\{a_{\mathrm{card}(I)} \wedge \|\exists x \varphi_I(x)\||\mathrm{card}(I) = n\} \\
&= \bigvee\{a_n \wedge \|\exists x \varphi_I(x)\||\mathrm{card}(I) = n\} \\
&\leq a_n
\end{aligned}$$

und $\bigwedge_n a_n = 0$, somit folgt

$$\bigwedge_{n \in \omega} \bigvee\{\tilde{g}(I)|\mathrm{card}(I) = n\} = 0.$$

Aus Lemma 6.3.2 ergibt sich, daß es eine Funktion $h_{\tilde{g}} : \mathcal{S}_\omega(\Gamma) \to B$ gibt, so daß $h_{\tilde{g}}$ eine Partitionsfunktion ist und für $I \subseteq \Gamma$ gilt

$$\tilde{g}(I) = \bigvee\{h_{\tilde{g}}(J)|I \subseteq J\}.$$

Wähle für jedes I ein f_I in $\mathfrak{M}^{(B)}/D$ mit $\|\exists x \varphi_I(x)\| = \|\varphi_I(f_I)\|$ (so ein f_I findet man aufgrund der endlichen Erfüllbarkeit). Mit Satz 6.1.3 können wir nun eine Funktion f definieren durch $f = \sum_I h_{\tilde{g}}(I) \cdot f_I$.

Zu zeigen: f erfüllt jedes φ_I.
Für $I \subseteq J$ gilt:

$$\begin{aligned}
\|\varphi_I(f)\| &\geq \|f = f_J\| \wedge \|\varphi_I(f_J)\| \\
&\geq \|f = f_J\| \wedge \|\varphi_J(f_J)\| \\
&\geq h_{\tilde{g}}(J) \wedge \tilde{f}(J) \\
&= h_{\tilde{g}}(J).
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\|\varphi_I(f)\| \geq \bigvee\{h_{\tilde{g}}(J)|I \subseteq J\} = \tilde{g}(I) \in D.$$

□

Kapitel 7

Echte Boolesche Potenzen

Nachdem Mansfield 1971 in [Ma 71] eine Einführung in Boolesche Potenzen gegeben hatte, war lange unklar, ob Boolesche Potenzen nicht nur eine andere Schreibweise für Ultrapotenzen sind. Mansfield selbst vermutete, daß dem nicht so sei, konnte aber kein Beispiel angeben. Dieses wurde 1976 von B. Koppelberg und S. Koppelberg geliefert.

Der folgende Abschnitt ist eine Ausarbeitung ihres Artikels [KbKo 76].

Der zweite Abschnitt beschäftigt sich damit, wie man (allerdings unter Zuhilfenahme stärkerer Voraussetzungen) schönere Gegenbeispiele (d.h. solche, die auf ω bzw. ω_1 beruhen) finden kann; er basiert auf [Kb 80].

7.1 ... auf einer großen Struktur

Lemma 7.1.1 *(B. Koppelberg und S. Koppelberg [KbKo 76]) Sei I eine unendliche Menge. Seien μ, λ unendliche Kardinalzahlen und D ein Ultrafilter auf $\mathfrak{P}(I)$, der δ-unzerlegbar ist für alle δ mit $\mu < \delta < 2^{(\lambda^\mu)^+}$. Dann gibt es ein $\nu \leq \mu$ und einen Ultrafilter G auf $\mathfrak{P}(\nu)$, so daß $\lambda^I/D \cong \lambda^\nu/G$.*

Außerdem ist $G \leq_{\mathrm{RK}} D$, d.h. es gibt eine Funktion g von I auf ν, so daß $G = \{X \subseteq \nu | g^{-1}(X) \in D\}$.

Beweis:
Zunächst zeigen wir

(7.1) Für jede Funktion $f : I \to 2^{(\lambda^\mu)^+}$ gibt es ein $J \subseteq I$, so daß gilt

$$J \in D \text{ und } \operatorname{card}(\operatorname{ran}(f \upharpoonright J)) \leq \mu.$$

Beweis von (7.1):
Sei $f : I \to 2^{(\lambda^\mu)^+}$ eine Funktion. Setze für $\eta \in \operatorname{ran}(f)$:

$$I_\eta := f^{-1}(\{\eta\}).$$

Definiere eine Folge $(M_n)_{n<\omega}$ mit:

- $M_{n+1} \subseteq M_n$,
- $M_n \subseteq 2^{(\lambda^\mu)^+}$,
- $\bigcup_{\eta \in M_n} I_\eta \in D$,
- wenn $\operatorname{card}(M_n) > \mu$, dann $\operatorname{card}(M_{n+1}) < \operatorname{card}(M_n)$, und
- wenn $\operatorname{card}(M_n) \leq \mu$, dann $M_{n+1} = M_n$.

Zur Konstruktion:
Sei $\alpha_n = \operatorname{card}(M_n)$.
Setze $M_0 := \operatorname{ran}(f)$.
Angenommen, M_n ist schon definiert.

1. Falls $\operatorname{card}(M_n) \leq \mu$, setze $M_{n+1} := M_n$.

2. Falls $\operatorname{card}(M_n) > \mu$, betrachte folgende Partition:

$$\{I_\eta | \eta \in M_n\} \cup \{I_{\eta_n}\},$$

wobei $I_{\eta_n} := I \setminus (\bigcup_{\eta \in M_n} I_\eta)$. α_n ist die Mächtigkeit dieser Partition und wegen $\mu < \alpha_n \leq 2^{(\lambda^\mu)^+}$ ist D α_n-unzerlegbar. Also gibt es ein $M'_{n+1} \subseteq M_n \cup \{\eta_n\}$ mit $\operatorname{card}(M'_{n+1}) < \alpha_n$ und $\bigcup_{\eta \in M'_{n+1}} I_\eta \in D$.

(a) Falls $\eta_n \notin M'_{n+1}$, setze $M_{n+1} := M'_{n+1}$.

(b) Falls $\eta_n \in M'_{n+1}$, setze $M_{n+1} := M'_{n+1} \setminus \{\eta_n\}$.
Dazu ist zu zeigen, daß

$$\bigcup_{\eta \in M'_{n+1} \setminus \{\eta_n\}} I_\eta \in D.$$

Benutze, daß aus $a \cup b \in D$ und $b \notin D$ folgt, daß $a \in D$, mit $a := \bigcup_{\eta \in M'_{n+1} \setminus \{\eta_n\}} I_\eta$ und $b := I_{\eta_n}$.

Aus $\operatorname{card}(M_{n+1}) < \operatorname{card}(M_n)$ für $\operatorname{card}(M_n) > \mu$ folgt, daß es ein $n \in \omega$ gibt mit $\operatorname{card}(M_n) \leq \mu$.

Setze $J := \bigcup_{\eta \in M_n} I_\eta \in D$. Damit gilt $f"J = M_n$, also folgt $\operatorname{card}(\operatorname{ran}(f \restriction J)) \leq \mu$.

Damit ist (7.1) bewiesen.

Sei $\kappa := \operatorname{card}(\lambda^I / D)$.

Nun zeigen wir

(7.2) Es gibt eine Folge $(f_\alpha|\alpha < \kappa)$ in λ^I, so daß $\lambda^I/D = \{f_{\alpha D}|\alpha < \kappa\}$,

$$\text{für } \alpha < \beta < \kappa \text{ gilt } f_{\alpha D} \neq f_{\beta D}$$

$$\text{und } \mathrm{card}(\mathrm{ran}(f_\alpha)) \leq \mu \text{ für alle } \alpha < \kappa.$$

Beweis von (7.2):
Da $\kappa = \mathrm{card}(\lambda^I/D)$ ist, läßt sich λ^I/D als $\lambda^I/D = \{g_{D\alpha}|\alpha < \kappa\}$ schreiben.

Sei g_α ein Repräsentant von $g_{D\alpha}$. Sei $J \in D$ mit (7.1) so, daß $\mathrm{ran}(g_\alpha \restriction J) \leq \mu$. Wähle $j \in J$ fest. Definiere f_α durch

$$f_\alpha(i) := \begin{cases} g_\alpha(i) & \text{für } i \in J, \\ g_\alpha(j) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $f_\alpha : I \to \lambda, f_\alpha =_D g_\alpha$ und $\mathrm{card}(\mathrm{ran}(f_\alpha)) \leq \mu$.

$\langle f_\alpha|\alpha < \kappa\rangle$ erfüllt das Gewünschte. Damit ist (7.2) gezeigt.

Behauptung:

(7.3) $$\kappa \leq \lambda^\mu.$$

Beweis von (7.3):
Andernfalls sei für $\alpha < (\lambda^\mu)^+$ $\mathcal{P}_\alpha$ die Partition von I, die durch $f_\alpha : I \to \lambda$ erzeugt wird, und sei $\mathcal{P}$ die größte gemeinsame Verfeinerung der $\mathcal{P}_\alpha, \alpha < (\lambda^\mu)^+$. Da $\mathrm{card}(\mathcal{P}_\alpha) \leq \mu$ für jedes α, gilt

$$\mathrm{card}(\mathcal{P}) \leq \mu^{(\lambda^\mu)^+} = 2^{(\lambda^\mu)^+},$$

also kann ich $\mathcal{P}$ als $\mathcal{P} = \{I_\eta|\eta < 2^{(\lambda^\mu)^+}\}$ schreiben. Mit (7.1) gibt es ein $M \subseteq 2^{(\lambda^\mu)^+}$, so daß $\bigcup_{\eta\in M} I_\eta \in D$ und $\mathrm{card}(M) \leq \mu$. Für $\eta < 2^{(\lambda^\mu)^+}$ und $\alpha < (\lambda^\mu)^+$ ist $f_\alpha \restriction I_\eta$ eine konstante Funktion (da f_α eine Vergröberung von $\mathcal{P}$ erzeugt).

Definiere mit Hilfe von f_α eine Funktion f'_α durch

$$f'_\alpha(i) = \begin{cases} f_\alpha(i) & \text{für } i \in J := \bigcup_{\eta\in M} I_\eta \\ 0 & \text{für } i \in I \setminus J. \end{cases}$$

Da $J \in D$ ist, gilt $f'_\alpha =_D f_\alpha$.

Der Wert von $f'_\alpha \restriction I_\eta$ ist konstant. Es gibt also für jedes f'_α eine Darstellung als Familie $(\alpha_\eta|\eta \in M) \in \lambda^M$. Es gilt $\mathrm{card}(\lambda^M) = \lambda^{\mathrm{card}(M)} \leq \lambda^\mu$. Es folgt

$$\mathrm{card}(\{f_\alpha|\alpha < (\lambda^\mu)^+\}) = \mathrm{card}(\{\langle\alpha_\eta|\eta \in M\rangle\}) \leq \lambda^\mu.$$

Widerspruch. Also gilt (7.3).

Sei für $\alpha < \kappa$ $\mathcal{P}_\alpha$ die Partition von I, die durch $f_\alpha : I \to \lambda$ erzeugt wird, und sei $\mathcal{P}$ die größte gemeinsame Verfeinerung der $\mathcal{P}_\alpha$, $\alpha < \kappa$. Da $\mathrm{card}(\mathcal{P}) \leq \mu^{(\lambda^\mu)^+} = 2^{(\lambda^\mu)^+}$ ist, können wir mit (7.1) ein $\nu \leq \mu$ und eine injektive Folge $(I_\eta | \eta < \nu)$ in $\mathcal{P}$ wählen, so daß $\bigcup_{\eta<\nu} I_\eta \in D$. Sei $g : I \to \nu$ eine Funktion mit

$$g(i) := \begin{cases} \eta & \text{für } i \in I_\eta, \\ 0 & \text{für } i \in I \setminus \bigcup_{\eta<\nu} I_\eta \end{cases}$$

und definiere

$$G := \{X \subseteq \nu | g^{-1}(X) \in D\}.$$

Sei $g_\alpha(\eta) \in \bigcup f_\alpha\text{"} I_\eta$ für $\eta < \nu$.

Behauptung:

(7.4) Durch $\varphi : \lambda^I/D \to \lambda^\nu/G$ mit $\varphi(f_{\alpha D}) = g_{\alpha G}$ für $\alpha < \kappa$ ist ein Isomorphismus gegeben.

Beweis von (7.4):

- φ ist wohldefiniert und injektiv: Seien $f_{\alpha D}, f_{\beta D} \in \lambda^I/D$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & f_{\alpha D} \neq f_{\beta D} \\ \Leftrightarrow\ & \{i \in I | f_\alpha(i) = f_\beta(i)\} \notin D \\ \Leftrightarrow\ & \{i \in I | f_\alpha(i) \neq f_\beta(i)\} \in D \\ \Leftrightarrow\ & g[\{i | f_\alpha(i) \neq f_\beta(i)\}] \in G \\ \Leftrightarrow\ & \{g(i) | f_\alpha(i) \neq f_\beta(i)\} \in G \\ \Leftrightarrow\ & \{\eta | f_\alpha\text{"} I_\eta \neq f_\beta\text{"} I_\eta\} \in G \\ \Leftrightarrow\ & \{\eta | g_\alpha(\eta) \neq g_\beta(\eta)\} \in G \\ \Leftrightarrow\ & g_{\alpha G} \neq g_{\beta G}. \end{aligned}$$

- φ ist surjektiv: Sei $g_{\alpha G} \in \lambda^\nu/G$ mit Repräsentantem $g_\alpha \in \lambda^\nu$. Definiere eine Funktion $f : I \to \lambda$ durch

$$f(i) := \begin{cases} g_\alpha(\eta) & \text{für } i \in I_\eta \text{ für ein } \eta < \nu, \\ 0 & \text{für } i \in I_\eta \setminus \bigcup_{\eta<\nu} I_\eta. \end{cases}$$

  Sei $g_{\beta G} := \varphi(f_D)$ mit Repräsentantem g_β. Es ist zu zeigen, daß $g_\beta =_G g_\alpha$. Sei $\eta < \nu$. Dann gilt

$$g_\beta(\eta) \in \bigcup f\text{"} I_\eta,$$

  wobei f auf I_η konstant ist mit $f(i) = g_\alpha(\eta)$ für $i \in I_\eta$, also folgt

$$\{\eta < \nu | g_\beta(\eta) = g_\alpha(\eta)\} = \nu \in G.$$

Damit gilt (7.4) und das Lemma ist gezeigt. □

Sei für den Rest des Abschnitts $\kappa \in \text{Card}$ so, daß $\kappa^\omega = \kappa$ und $\kappa > 2^\omega$. Sei F_κ die freie Boolesche Algebra auf κ Generatoren.

Sei B_κ die Vervollständigung von F_κ.

B_κ erfüllt die ccc, da F_κ die ccc erfüllt (s. Satz 3.3.5).

Lemma 7.1.2 *(B. Koppelberg und S. Koppelberg [KbKo 76]) Seien A, B und C vollständige Boolesche Algebren, so daß A und B vollständige Subalgebren von C sind, B unendlich ist und A und B unabhängig sind (d.h. für $a \in A$ und $b \in B$ mit $a > 0$ und $b > 0$ gilt $a \wedge b > 0$). Sei D ein Ultrafilter auf A.*

Dann gibt es einen Ultrafilter F auf C, so daß $F \cap A = D$ und es gibt $g \in \omega^{(B)}$, so daß für jedes $f \in \omega^{(A)}$

$$\langle \omega, < \rangle^{(C)}/F \models f_F < g_F.$$

Beweis:
Sei $g \in \omega^{(B)}$, so daß $g(n) > 0$ für alle $n \in \omega$, und sei F Ultrafilter auf C, so daß

$$D \cup \{\|f < g\|^C | f \in \omega^{(A)}\} \subseteq F.$$

Nun ist folgendes zu zeigen:

$$F \text{ existiert,} \tag{7.5}$$

$$F \cap A = D \text{ und} \tag{7.6}$$

$$\text{für alle } f \in \omega^{(A)} \text{ gilt } \langle \omega, < \rangle^{(C)}/F \models f_F < g_F. \tag{7.7}$$

(7.7) gilt nach Konstruktion von g.

Beweis von (7.6):
Es gilt $D \subseteq F \cap A$. Außerdem ergibt ein Ultrafilter auf einer Booleschen Algebra geschnitten mit einer Subalgebra einen Ultrafilter auf der Subalgebra. Da Ultrafilter maximal sind, ist D dieser Filter.

Beweis von (7.5): Zu zeigen ist, daß $D \cup \{\|f < g\|^C | f \in \omega^{(A)}\}$ die endliche Durschnittseigenschaft hat.

Angenommen, obige Menge hat die endliche Durchschnittseigenschaft nicht. Dann gibt es $d \in D$ und $f_1, \ldots, f_n \in \omega^{(A)}$, so daß

$$d \wedge \|f_1 < g\|^C \wedge \ldots \wedge \|f_n < g\|^C = 0.$$

Seien $P_1, \ldots, P_n$ die von $f_1, \ldots, f_n$ induzierten Partitionen auf A. Sei P die gröbste gemeinsame Verfeinerung von $P_1, \ldots, P_n$. Da die P_i die $1 \in A$ in jeweils ω Teile zerlegen, wird dies auch von P geleistet. Sei $f : \omega \to A$ eine Funktion, die P induziert. Dann gilt

$$\|f < g\|^C \leq \|f_1 < g\|^C \wedge \ldots \wedge \|f_n < g\|^C,$$

also

$$d \wedge \|f < g\|^C = 0.$$

Damit gilt

$$d \leq \|g \leq f\|^C = \bigvee_{\substack{m,n\in\omega \\ m\leq n}} g(m) \wedge f(n).$$

Wegen $d > 0$ und $\bigvee_{n\in\omega} f(n) = 1$, gibt es $n_0 \in \omega$ mit $d \wedge f(n_0) > 0$. Damit gilt $d \wedge f(n_0) \wedge g(n_0+1) > 0$, da A und B unabhängig sind. Außerdem ist

$$d \wedge f(n_0) \wedge g(n_0+1) \leq d \leq \bigvee_{\substack{m,n\in\omega \\ m\leq n}} g(m) \wedge f(n)$$

und

$$d \wedge f(n_0) \wedge g(n_0+1) \leq \bigvee_{\substack{m\in\omega \\ m\leq n_0}} g(m) \wedge f(n_0),$$

da $f(n_0) \wedge f(n) = 0$ für $n \neq n_0$.

Sei $m \leq n_0$, dann $m \neq n_0 + 1$ und $g(n_0+1) \wedge g(m) = 0$. Also

$$0 < d \wedge f(n_0) \wedge g(n_0+1)$$

$$= \Big(d \wedge f(n_0) \wedge g(n_0+1)\Big) \wedge \Big(\bigvee_{\substack{m\in\omega \\ m\leq n_0}} g(m) \wedge f(n_0)\Big) = 0.$$

Widerspruch. □

Lemma 7.1.3 *(B. Koppelberg und S. Koppelberg [KbKo 76]) Es gibt einen Ultrafilter D auf B_κ, so daß* $\operatorname{cf}(\langle\omega,<\rangle^{(B_\kappa)}/D) = \operatorname{cf}\kappa$ *und* $\operatorname{card}(\omega^{(B_\kappa)}/D) = \kappa$.

Beweis:

Sei U eine Menge freier Generatoren von F_κ. Damit ist $\operatorname{card}(U) = \kappa$.

Sei $\{U_\alpha | \alpha < \kappa\}$ eine Partition von U, so daß $\operatorname{card}(U_\alpha) \geq \aleph_0$ für jedes $\alpha < \kappa$.

Für $\alpha < \kappa$ setze $B_\alpha := \langle\bigcup_{\xi<\alpha} U_\xi\rangle^{\mathrm{cm}}$ (s. auch Definition 3.2.12) und definiere einen Ultrafilter D_α auf B_α durch Induktion, so daß

- $D_\beta \cap B_\alpha = D_\alpha$ für $\alpha < \beta < \kappa$ und

- es für jedes $\alpha < \kappa$ ein $g_{\alpha+1} \in \omega^{(B_{\alpha+1})}$ gibt mit

$$\langle \omega, < \rangle^{(B_{\alpha+1})}/D_{\alpha+1} \models f_{D_{\alpha+1}} < (g_{\alpha+1})_{D_{\alpha+1}}$$

  für jedes $f \in \omega^{B_\alpha}$.

Zur Konstruktion:
Für $B_0 = \{0, 1\}$, setze $D_0 := \{1\}$.

Angenommen, D_α ist schon definiert.

$D_{\alpha+1}$ und $g_{\alpha+1} \in \omega^{(B_{\alpha+1})}$ erhalte ich durch Anwendung von Lemma 7.1.2 mit $A := B_\alpha, B := \langle U_\alpha \rangle^{\mathrm{cm}}$ und $C := B_{\alpha+1}$.

Falls β eine Limesordinalzahl ist, setze $D_\beta := \bigcup_{\eta<\beta} D_\eta$.

$\langle U_\alpha \rangle^{\mathrm{cm}}$ ist unendlich groß, da U_α unendlich groß ist.

Es gilt

$$B_{\alpha+1} = \langle \bigcup_{\xi<\alpha+1} U_\xi \rangle^{\mathrm{cm}} = \langle B_\alpha \cup \langle U_\alpha \rangle^{\mathrm{cm}} \rangle^{\mathrm{cm}}, \tag{7.8}$$

Beweis von (7.8):
$B_{\alpha+1}$ ist die Vervollständigung der freien Booleschen Algebra auf $\bigcup_{\xi\leq\alpha} U_\xi$, B_α die der freien Booleschen Algebra auf $\bigcup_{\xi<\alpha} U_\xi$ und $\langle U_\alpha \rangle^{\mathrm{cm}}$ die Vervollständigung der freien Booleschen Algebra auf U_α. Es gilt

$$\langle \bigcup_{\xi\leq\alpha} U_\xi \rangle = \langle \langle \bigcup_{\xi<\alpha} U_\xi \rangle \cup \langle U_\alpha \rangle \rangle.$$

Die einzelnen Erzeugnisse der Basismengen liegen jeweils dicht in der vollständigen Booleschen Algebra, das heißt, jedes $b \in B_{\alpha+1}$ läßt sich als Supremum einer abzählbaren disjunkten Mengen von Elementen von $\langle \bigcup_{\xi\leq\alpha} U_\xi \rangle$ darstellen; mit obiger Gleichung also auch durch $\langle \langle \bigcup_{\xi<\alpha} U_\xi \rangle \cup \langle U_\alpha \rangle \rangle$.

Umgekehrt läßt sich jedes Element von $\langle B_\alpha \cup \langle U_\alpha \rangle^{\mathrm{cm}} \rangle^{\mathrm{cm}}$ als Supremum einer abzählbaren disjunkten Teilmenge von $\langle \langle \bigcup_{\xi<\alpha} U_\xi \rangle \cup \langle U_\alpha \rangle \rangle$ darstellen und damit auch von $\langle \bigcup_{\xi\leq\alpha} U_\xi \rangle$.

Damit ist (7.8) gezeigt und B_α und $\langle U_\alpha \rangle^{\mathrm{cm}}$ sind vollständige Subalgebren von $B_{\alpha+1}$.

U ist eine Menge freier (d.h. unabhängiger) Generatoren von F_κ und $B_\alpha = \langle \bigcup_{\xi<\alpha} U_\xi \rangle^{\mathrm{cm}}$, also sind B_α und $\langle U_\alpha \rangle^{\mathrm{cm}}$ unabhängig.

Entsprechend Lemma 7.1.2 erhalte ich ein $g_{\alpha+1} \in \omega^{(\langle U_\alpha \rangle^{\mathrm{cm}})} \subseteq \omega^{(B_{\alpha+1})}$.

B_κ erfüllt die ccc (s. Satz 3.2.13) und da $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$, gilt $\aleph_0 < \mathrm{cf}(\kappa)$.

Dadurch ist nach Satz 3.4.1 $B_\kappa = \bigcup_{\alpha<\kappa} B_\alpha$. $D := \bigcup_{\alpha<\kappa} D_\alpha$ ist ein Ultrafilter auf B_κ und $\omega^{(B_\kappa)} = \bigcup_{\alpha<\kappa} \omega^{(B_\alpha)}$.

Die Menge $\{(g_{\alpha+1})_D | \alpha < \kappa\}$ ist eine Teilmenge von $\omega^{(B_\kappa)}/D$ mit Ordnungstyp κ und liegt konfinal in $\langle \omega, < \rangle^{(B_\kappa)}/D$. Damit ist $\mathrm{cf}\langle \omega, < \rangle^{(B_\kappa)}/D = \mathrm{cf}(\kappa)$ gezeigt.

Es gilt $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$, also $\mathrm{card}(B_\kappa) = \kappa$ (s. Satz 3.4.2) und $\mathrm{card}(\omega^{(B_\kappa)}) \leq \kappa^{\aleph_0} = \kappa$. Damit gilt $\mathrm{card}(\omega^{(B_\kappa)}/D) = \kappa$. □

Sei $\tau = 2^{(2^\omega)^+}$, $\mathfrak{L} = \{<\} \cup \{R_\alpha | \alpha < \tau^\omega\}$, R_α ein einstelliges Prädikat für $\alpha < \tau^\omega$ und $\mathfrak{M} := \langle \tau, <, M_\alpha \rangle_{\alpha < \tau^\omega}$, $<$ eine Ordnung auf τ und $\{M_\alpha | \alpha < \tau^\omega\} = \{X \subseteq \tau | \mathrm{card}(X) \leq \omega\}$ (also alle höchstens abzählbaren Teilmengen von τ). Hierbei sei M_α die Interpretation von R_α in $\mathfrak{M}$.

Mit diesen Voraussetzungen erhält man:

Satz 7.1.4 *(B. Koppelberg und S. Koppelberg [KbKo 76]) Seien B und D wie in Lemma 7.1.3. Dann ist $\mathfrak{M}^{(B)}/D$ nicht isomorph zu einer Ultrapotenz von $\mathfrak{M}$.*

Beweis (durch Widerspruch):
Angenommen, es gäbe einen Ultrafilter F auf einer Menge I und einen Isomorphismus ψ von $\mathfrak{M}^{(B)}/D$ auf $\mathfrak{M}^I/F$.

Für $g \in \tau^I$ wähle $f \in \tau^{(B)}$, so daß $\psi(f_D) = g_F$. Da B die ccc erfüllt, gibt es ein $\alpha_g < \tau^\omega$, so daß gilt

$$\{m \in \tau | f(m) > 0\} = M_{\alpha_g},$$

und es ergibt sich $\mathfrak{M}^{(B)}/D \models R_{\alpha_g}(f_D)$ und $\mathfrak{M}^I/F \models R_{\alpha_g}(g_F)$.

Als nächstes zeigen wir

(7.9) $\qquad F$ ist δ-unzerlegbar für jedes δ mit $\omega < \delta < 2^{(2^\omega)^+} = \tau$.

Beweis von (7.9): Sei für $\omega < \delta < \tau$ durch $\{I_m | m < \delta\}$ eine Partition von I gegeben. Definiere eine Funktion $g : I \to \tau$ durch $g(x) = m$, falls $x \in I_\eta$. Sei $f \in \tau^{(B)}$ die zu g gewählte Funktion. Dann gilt $\bigvee_{m \in \tau} f(m) = \bigvee_{m \in M_{\alpha_g}} I_m = 1$ und $\mathfrak{M}^I/F \models R_{\alpha_g}(g_F)$. Dies ist äquivalent zu $\{i \in I | \mathfrak{M} \models R_{\alpha_g}(g(i))\} \in F$, also gilt auch $X := \{i \in I | g(i) \in M_{\alpha_g} \cap \delta\} \in F$, denn $g(i) \in \delta$ für alle $i \in I$ nach Definition von g. Damit folgt

$$\bigcup_{m \in M_{\alpha_g} \cap \delta} I_m = \bigcup_{m \in M_{\alpha_g} \cap \delta} g^{-1}\{m\} = X \in F$$

und somit gilt (7.9).

Setze $\lambda = \mu = \omega$ wie in Lemma 7.1.1. Damit erhalten wir $\omega^I/F \cong \omega^\nu/G$ für ein $\nu \leq \omega$ und einen Ultrafilter G auf ν.

Also induziert ψ einen Isomorphismus von $\omega^{(B)}/D$ auf ω^I/F, aber

$$\mathrm{card}(\omega^{(B)}/D) = \kappa > 2^\omega$$

(Korollar 7.1.3) und $\mathrm{card}(\omega^\nu/G) \leq 2^\omega$. Widerspruch. □

7.2 ... auf kleinen Strukturen

Im letzten Abschnitt wurde eine Boolesche Potenz konstruiert, die nicht äquivalent zu einer Ultrapotenz ist. Im obigen Beweis sind die Struktur und die Sprache allerdings noch sehr groß ($\tau = 2^{(2^\omega)^+}$).

Im folgenden wird die Größe reduziert: Wenn man gewisse mengentheoretische Voraussetzungen macht, kann man die Größe der Struktur auf ω oder ω_1 „herunterdrücken".

Zuerst einige Definitionen und Sätze, die ich hier nur zitiere.

Die Existenz von $0^\sharp$ ist äquivalent dazu, daß es für jede überabzählbare Kardinalzahl κ eine nichttriviale Einbettung $j : L_\kappa \to L_\kappa$ gibt. Dabei ist mit L_κ die κte Stufe in der konstruktiblen Hierarchie gemeint.[1]

Satz 7.2.1 *(Ketonen [Ket 76]) Angenommen, $\neg 0^\sharp$. Wenn α eine Nachfolgerkardinalzahl ist und F uniform über α, dann gibt es ein $\tau < \alpha$, so daß F (τ, α)-regulär ist.*

Für den Beweis s. [Ket 76].

Definition 7.2.2 *$f \in \alpha^\alpha$ ist eine* **erste Funktion** *bezüglich eines Filters F über α, wenn für jedes $\xi \in \alpha$ gilt*

$$\{i \in \alpha | \xi < f(i)\} \in F$$

und wenn für jedes $g \in \alpha^\alpha$, mit $\{i \in \alpha | \xi < g(i)\} \in F$ für jedes $\xi \in \alpha$, gilt

$$\{i \in \alpha | f(i) \leq g(i)\} \in F.$$

Satz 7.2.3 *(Jensen [JeKb]) Angenommen, $\neg 0^\sharp$. Wenn α eine reguläre Kardinalzahl ist mit $2^{<\alpha} = \alpha$, und F uniform über α, dann gibt es keine erste Funktion bezüglich F.*

Für den Beweis s. [JeKb].

Satz 7.2.4 *(Kanamori [Ka 76]) Wenn α regulär ist, F uniform über α und es keine erste Funktion bezüglich F gibt, so ist F λ-regulär für jedes $\lambda < \alpha$.*

Für den Beweis s. [Ka 76].

Korollar 7.2.5 *Angenommen, $\neg 0^\sharp$. Wenn α regulär ist, $2^{<\alpha} = \alpha$ und F uniform über α, dann ist F λ-regulär für jedes $\lambda < \alpha$.*

---
[1] vgl. auch [De 84].

Satz 7.2.6 *(B. Koppelberg [JeKb]) Angenommen, $\neg 0^\sharp$. Wenn α regulär ist und F uniform über α, dann ist F δ-zerlegbar für jedes reguläre $\delta \leq \alpha$.*

Für den Beweis s. [JeKb].

Satz 7.2.7 *(Jensen [DeJe 75]) Angenommen, $\neg 0^\sharp$. Sei κ eine unendliche singuläre Kardinalzahl und $\lambda = 2^{<\kappa}$. Dann ist*

$$2^\kappa = \begin{cases} \lambda & \textit{wenn } 2^\gamma = \lambda \textit{ für ein } \gamma < \kappa \\ \lambda^+ & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Für den Beweis s. [DeJe 75].

Lemma 7.2.8 *Sei τ eine reguläre Kardinalzahl, $\mathfrak{A} = (\tau, <)$ und F ein (τ, λ)-regulärer Filter auf κ.*

Dann ist $\mathrm{cf}(\mathfrak{A}^\kappa/F) > \lambda$.

Beweis:
Sei $E \subseteq F$, so daß $\mathrm{card}(E) = \lambda$ und $\bigcap E_0 = \emptyset$ für jedes $E_0 \subseteq E$ mit $\mathrm{card}(E_0) \geq \tau$.

Angenommen, $G \subseteq \tau^\kappa$ hat Kardinalität λ. Seien $E = \{e_\xi | \xi < \lambda\}$ und $G = \{g_\xi | \xi < \lambda\}$ Aufzählungen von E bzw. G, so daß $e_\xi \neq e_\eta$ für $\xi < \eta < \lambda$ gilt. Definiere $f \in \tau^\kappa$ so, daß

$$g_\xi(i) < f(i) \text{ für } i \in e_\xi.$$

Dies ist möglich, da $\mathrm{card}(\{\xi \in \lambda | i \in e_\xi\}) < \tau$ und τ regulär. Also ist $e_\xi \subseteq \{i \in \kappa | g_\xi(i) < f(i)\}$ und damit $g_{\xi F} < f_F$ für jedes $\xi < \lambda$, das heißt, daß $\{g_{\xi F} | \xi < \lambda\}$ ist nicht konfinal in $\mathfrak{A}^\kappa/F$. □

Lemma 7.2.9 *(S. Koppelberg [Kb 80]) Seien κ, β unendliche Kardinalzahlen, $\mathfrak{A} = \langle \omega, < \rangle$. Dann gibt es eine vollständige Boolesche Algebra B und einen abzählbar unvollständigen Ultrafilter D auf B, so daß $\kappa = \mathrm{card}(\omega^{(B)}/D)$ und $\beta = \mathrm{cf}(\mathfrak{A}^{(B)}/D)$ gdw. $\kappa^\omega = \kappa$, β regulär ist und $\omega_1 \leq \beta \leq \kappa$.*

Zusätzlich läßt sich B so wählen, daß sie die ccc erfüllt.

Beweis:
„$\Rightarrow$“: Sei $\kappa = \mathrm{card}(\omega^{(B)}/D)$ und $\beta = \mathrm{cf}(\mathfrak{A}^{(B)}/D)$; hierbei sei D ω-regulär. Damit ist β regulär und $\beta \leq \kappa$. Aus Lemma 6.5.1 folgt, daß $\mathfrak{A}^{(B)}/D$ $\aleph_1$-saturiert ist. Also ist $\beta \geq \omega_1$.

Nach Satz 6.3.3 gilt $\kappa^\omega = \kappa$.

„$\Leftarrow$“: Setze $\kappa^\omega = \kappa$ und $\omega_1 \leq \beta = \mathrm{cf}(\beta) \leq \kappa$ voraus. Sei $B = B_\kappa$ die Vervollständigung einer freien Booleschen Algebra F, wobei F frei generiert sei von $U \subseteq F$ mit $\mathrm{card}(U) = \kappa$. Also erfüllt B die ccc (s. Satz 3.2.13) und damit ist $\mathrm{card}(B) = \kappa$ (s. Satz 3.4.2).

Sei $U = \bigcup_{\xi<\beta} U_\xi$ und hierbei $(U_\xi)_{\xi<\beta}$ eine aufsteigende Kette von Teilmengen von U, $\mathrm{card}(U_0) = \kappa$ und $U_{\xi+1} \setminus U_\xi$ unendlich. Sei B_ξ die Subalgebra von B, die vollständig von U_ξ generiert wird.

$B = \bigcup_{\xi<\beta} B_\xi$ gilt mit Lemma 3.4.1.

Wähle induktiv eine aufsteigende Kette von abzählbar unvollständigen Ultrafiltern D_ξ auf B_ξ und setze $D := \bigcup_{\xi<\beta} D_\xi$; dann ist für jedes $\xi < \beta$ die Ultrapotenz $\mathfrak{A}^{(B_\xi)}/D_\xi$ eine elementare Substruktur von $\mathfrak{A}^{(B)}/D$.

Sei für $\xi \leq \zeta < \beta$ eine Abbildung

$$\Pi_{\xi\zeta} : \mathfrak{A}^{(B_\xi)}/D_\xi \to \mathfrak{A}^{(B_\zeta)}/D_\zeta$$

durch $\Pi_{\xi\zeta}(f_{D_\xi}) := f_{D_\zeta}$ definiert. $\Pi_{\xi\zeta}$ ist wohldefiniert und falls $f_{D_\xi} < g_{D_\xi}$, so gilt $\|f < g\|^{B_\xi} \in D_\xi \subseteq D_\zeta$, also gilt auch $\|f < g\|^{B_\zeta} \in D_\zeta$ und damit $\Pi_{\xi\zeta}(f_{D_\xi}) = f_{D_\zeta} < g_{D_\zeta} = \Pi_{\xi\zeta}(f_{D_\xi})$. Damit ist $\Pi_{\xi\zeta}$ ein Homomorphismus. Ferner ist für $\xi < \beta$ gilt $\Pi_{\xi\xi}(f_{D_\xi}) = f_{D_\xi}$, also ist $\Pi_{\xi\xi}$ die Identitätsfunktion auf $\mathfrak{A}^{(B_\xi)}/D_\xi$. Sei nun $\xi \leq \zeta \leq \eta < \beta$. Dann gilt

$$\Pi_{\zeta\eta}(\Pi_{\xi\zeta}(f_{D_\xi})) = \Pi_{\zeta\eta}(f_{D_\zeta}) = f_{D_\eta} = \Pi_{\xi\eta}(f_{D_\xi}).$$

Damit ist

$$\mathcal{A} := \{\mathfrak{A}^{(B_\xi)}/D_\xi | \xi < \beta\} \cup \{\Pi_{\xi\zeta} | \xi \leq \zeta < \beta\}$$

ein gerichtetes System von Mengen.[2]

Sei ferner für $\xi < \beta$ eine Abbildung

$$\Pi_\xi : \mathfrak{A}^{(B_\xi)}/D_\xi \to \mathfrak{A}^{(B)}/D$$

mittels $\Pi_\xi(f_{D_\xi}) := f_D$ definiert.

Π_ξ ist wohldefiniert und für $f_{D_\xi} < g_{D_\xi}$ gilt $\|f < g\|^{B_\xi} \in D_\xi \subseteq D$, also ist $\|f < g\|^B \in D$ und damit folgt $\Pi_\xi(f_{D_\xi}) = f_D < g_D = \Pi_\xi(g_{D_\xi})$. Damit ist Π_ξ ein Homomorphismus.

Für $\xi \leq \zeta < \beta$ gilt

$$\Pi_\xi(f_{D_\xi}) = f_D = \Pi_\zeta(f_{D_\zeta}) = \Pi_\zeta(\Pi_{\xi\zeta}(f_{D_\xi})).$$

Sei nun $\mathfrak{B}$ eine Struktur, so daß es für jedes $\xi < \beta$ einen Homomorphismus $\Sigma_\xi : \mathfrak{A}^{(B_\xi)}/D_\xi \to \mathfrak{B}$ gibt, für den gilt, falls $\xi \leq \zeta < \beta$, so

$$\Sigma_\zeta(\Pi_{\xi\zeta}(f_{D_\xi})) = \Sigma_\xi(f_{D_\xi}).$$

[2] vgl. auch Definition 2.2.9.

Definiere eine Abbildung $\Sigma : \mathfrak{A}^{(B)}/D \to \mathfrak{B}$ folgendermaßen: Da $\mathfrak{A}^{(B)}/D$ die ccc hat, gibt es für jedes $f \in \mathfrak{A}^{(B)}$ ein $\xi(f) < \beta$, so daß $\mathrm{ran}(f) \subseteq B_{\xi(f)}$. Sei nun

$$\Sigma(f_D) := \Pi_{\xi(f)}(f_{D_{\xi(f)}}).$$

Dann gilt

$$\Sigma(\Pi_\xi(f_{D_\xi}) = \Sigma_\xi(f_{D_\xi}).$$

Damit ist $\mathcal{B} := \{\mathfrak{A}^{(B)}/D\} \cup \{\Pi_\xi | \xi < \beta\}$ ein direkter Limes von $\mathcal{A}$.[3]

Ferner gilt $\omega^{(B)}/D = \bigcup_{\xi<\beta} \mathrm{ran}(\Pi_\xi)$: Sei dazu $x \in \omega^{(B)}/D$. Dann gilt $x = f_D$ für ein $f \in \omega^{(B)}$. Mit der ccc folgt, daß $f"\omega \subseteq B_\xi$ für ein $\xi < \beta$. Also ist $f_{D_\xi} \in \omega^{(B_\xi)}/D_\xi$ und es gilt $\Pi_\xi(f_{D_\xi}) = x$.

Zur Konstruktion der D_ξ: Da $\mathrm{card}(U_0) = \kappa$, ist B_0 isomorph zu B, also können wir D_0 so wählen, daß $\mathrm{card}(\omega^{(B_0)}/D_0) = \kappa$ (wie in Lemma 7.1.3, angewendet auf B_0). Damit erhalten wir $\kappa \leq \mathrm{card}(\omega^{(B)}) \leq \mathrm{card}(B^\omega) = \kappa^\omega = \kappa$ und $\mathrm{card}(\omega^{(B)}/D) = \kappa$. Mit Lemma 7.1.2 und $A := B_\xi, B := \langle U_{\xi+1} \setminus U_\xi \rangle$ und $C := B_{\xi+1}$ können wir $D_{\xi+1}$ so wählen, daß $\omega^{(B_{\xi+1})}/D_{\xi+1}$ ein Element f_ξ enthält, das größer als jedes $g \in \omega^{(B_\xi)}/D_\xi$ ist.

Die Folge $(\Pi_\xi(f_\xi))_{\xi<\beta}$ liegt konfinal in $\mathfrak{A}^{(B)}/D$, also ist $\beta = \mathrm{cf}(\mathfrak{A}^{(B)}/D)$. □

Satz 7.2.10 *(B. Koppelberg [Kb 80]) Angenommen,* $2^{(2^\omega)^+} < \aleph_\omega$. *Sei* $\mathfrak{A} = (\omega_1, <)$ *und* $\mathfrak{A}^{(B)}/D$ *eine Boolesche Potenz, so daß* $\mathrm{card}(\omega^{(B)}/D) > 2^\omega$ *und* B *die ccc erfüllt. Dann gilt für jede Kardinalzahl* α *und jeden Ultrafilter* F *über* α,

$$\mathfrak{A}^{(B)}/D \ncong \mathfrak{A}^\alpha/F.$$

Beweis:
Zunächst zeigen wir

$$\mathrm{cf}(\mathfrak{A}^{(B)}/D) = \omega_1. \tag{7.10}$$

Beweis von (7.10):
Zur Erinnerung nochmals die Definition der Funktion $\breve{m}$ aus Satz 6.1.1 $\breve{m} : \omega_1 \to B$ mit

$$\breve{m}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = m \\ 0 & \text{für } x \neq m. \end{cases}$$

Es gilt

$$\|\breve{\alpha} = \breve{\beta}\| = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha = \beta \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und somit gilt für $\alpha \neq \beta$

$$\breve{\alpha} \neq_D \breve{\beta}.$$

[3] s. auch Definition 2.2.10.

Behauptung: Die Folge $(\breve{\alpha}_D)_{\alpha<\omega_1}$ liegt konfinal in $\mathfrak{A}^{(B)}/D$.

Angenommen, die Folge ist nicht konfinal. Dann gibt es eine Partition $h : \omega_1 \to B$, so daß

$$\mathfrak{A}^{(B)}/D \models \breve{\alpha}_D < h_D \text{ für alle } \alpha < \omega_1.$$

Also gilt für alle $\alpha < \omega_1$

$$\bigvee_{x<y<\omega_1} \breve{\alpha}(x) \wedge h(y) \in D.$$

h ist eine Partition und B hat die ccc, also gibt es ein $x_0 \in \omega_1$, mit $h(x) = 0$ für alle $x \geq x_0$. Damit ist

$$\bigvee_{x<y<x_0} \breve{x}_0(x) \wedge h(y) \in D,$$

aber $\breve{x}_0(x) = 0$ für $x < x_0$. Widerspruch.

Damit gilt (7.10).

Behauptung:

(7.11) F ist δ-unzerlegbar für jedes δ mit $\omega < \delta \leq 2^{(2^\omega)^+} < \aleph_\omega$.

Beweis von (7.11):
Falls F ω_n-zerlegbar für ein $n \in \omega \setminus \{0\}$ ist, so ist F mit Satz 7.2.6 auch ω_1-zerlegbar. Mit Satz 4.4.5 gibt es also einen uniformen Filter F' über ω_1, mit $F' \leq_{\mathrm{RK}} F$.

Um den Beweis von (7.11) weiterzuführen, müssen wir erst einmal folgendes zeigen:

(7.12) F' ist (ω_1, ω_1)-regulär.

Beweis von (7.12):
Sei $X_0 \in F'$ beliebig. Definiere für $\eta > 0$

$$X_\eta := \bigwedge_{\gamma<\eta} X_\gamma \setminus \{\eta\}.$$

Sei nun $B' \subseteq \omega_1$ mit $\mathrm{card}(B') \geq \omega_1$, das heißt, für alle $\eta \in \omega_1$ gibt es ein $\xi \in B'$, so daß $\eta < \xi$. Damit gilt $\eta \notin X_\xi$ und

$$\bigwedge_{\eta\in B'} X_\eta = 0.$$

Also gilt (7.12).

Damit ist F nach Satz 4.3.6 auch (ω_1, ω_1)-regulär. Mit Lemma 7.2.8 gilt $\mathrm{cf}(\mathfrak{A}^\alpha/F) > \omega_1$. Aber $\mathrm{cf}(\mathfrak{A}^{(B)}/D) = \omega_1$ nach (7.10).

Damit ist (7.11) gezeigt.

Mit Lemma 7.1.1 für $\lambda = \omega$ und $\mu = \omega$ gibt es einen Ultrafilter F' über ω mit

$$(\omega, <)^\alpha/F \cong (\omega, <)^\omega/F'.$$

Also ist $\mathrm{card}(\omega^\alpha/F) \leq 2^\omega$. Aber jeder Isomorphismus von $\mathfrak{A}^{(B)}/D$ auf $\mathfrak{A}^\alpha/F$ würde $\omega^{(B)}/D$ isomorph auf ω^α/F abbilden. Widerspruch. □

Mit Hilfe von stärkeren Voraussetzungen läßt sich die Größe der Struktur für die echte Boolesche Potenz auf ω verkleinern, wie in den folgenden beiden Sätzen:

Satz 7.2.11 *(B. Koppelberg [Kb 80]) Angenommen,* $\neg 0^\sharp$. *Sei* $\mathfrak{A} = (\omega, <)$ *und* $\mathfrak{A}^{(B)}/D$ *eine Boolesche Potenz, so daß* $\mathrm{card}(\omega^{(B)}/D) = \kappa$ *und* $\mathrm{cf}(\mathfrak{A}^{(B)}/D) = \omega_1$, *wobei* κ *eine starke Limeskardinalzahl sei mit* $\kappa > \mathrm{cf}(\kappa) > \omega$.

Dann gilt für jede Kardinalzahl α *und jeden Ultrafilter* F *über* α, *daß*

$$\mathfrak{A}^{(B)}/D \ncong \mathfrak{A}^\alpha/F.$$

B. Koppelberg stellt alternativ die Bedingung an κ, daß $2^\kappa = \kappa^{+n}$ für ein $n \in \omega$. Damit funktioniert aber der folgende Beweis nicht, weil Koppelberg die Voraussetzung $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$ explizit (und für beide Fälle) gebraucht und z. B. unter GCH gilt $2^{\aleph_\omega} = \aleph_\omega^+$ (d.h. die Voraussetzung ist mit $n = 1$ erfüllt), aber $\mathrm{cf}(\aleph_\omega) = \omega$.

Beweis:
Angenommen, es gibt doch ein α und einen Ultrafilter F über α, so daß $\mathfrak{A}^{(B)}/D \cong \mathfrak{A}^\alpha/F$. Mit 2.2.7 gilt $\kappa^\omega = \kappa$.

- Wenn F δ-zerlegbar ist für ein δ mit $\mathrm{cf}(\delta) > \omega$, dann ist F $\mathrm{cf}(\delta)$-zerlegbar mit Satz 4.4.7 und Satz 4.4.6 und es gibt einen uniformen Filter $F' \leq_{\mathrm{RK}} F$ über $\mathrm{cf}(\delta)$ (mit Satz 4.4.5).

  Mit Satz 4.4.8 ist F' ω_1-zerlegbar, also gibt es mit Satz 4.4.5 einen Filter $F'' \leq_{\mathrm{RK}} F'$, der uniform über ω_1 ist.

  Mit Satz 7.2.1 ist F'' ω_1-regulär, also ist F mit Satz 4.3.6 ω_1-regulär. Also gilt mit Lemma 7.2.8 für $\tau = \omega, \lambda = \omega_1$ und $\alpha = \alpha$, daß

  $$\mathrm{cf}(\mathfrak{A}^\alpha/F) > \omega_1.$$

  Damit gilt der Satz für δ-zerlegbare F für ein δ mit $\mathrm{cf}(\delta) > \omega$.

- Andernfalls hat jedes δ, für das F δ-zerlegbar ist, Konfinalität ω.

  Wir zeigen nun

  (7.13) Es gibt eine Folge $(f_\xi|\xi < \kappa)$ in ω^α,

  $$\text{so daß für } \xi < \eta < \kappa \text{ gilt } f_\xi \neq_F f_\eta$$

  $$\text{und für } \xi < \kappa \text{ und } n < \omega \text{ gilt } \{i \in \alpha | f_\xi(i) = n\} \notin F.$$

  Beweis von (7.13):
  Da $\mathfrak{A}^{(B)}/D \cong \mathfrak{A}^\alpha/F$, gilt auch $\omega^{(B)}/D \cong \omega^\alpha/F$. Also $\mathrm{card}(\omega^\alpha/F) = \kappa$, das heißt, es gibt κ-viele F-verschiedene Funktionen in ω^α. Sei $(f'_\xi|\xi < \kappa)$ eine Aufzählung dieser Funktionen (ohne Wiederholungen). Für jedes $n \in \omega$ kann es nur ein $\xi = \xi(n)$ geben, so daß

  $$\{i \in \alpha | f'_\xi(i) = n\} \in F,$$

  da die f' alle mod F verschieden sind.

  Sei $(f_\xi|\xi < \kappa)$ eine Aufzählung von $\{f'_\xi|\xi < \kappa \text{ und } \forall n < \omega\ \xi \neq \xi(n)\}$. Damit gilt für $\xi < \kappa$ und $n \in \omega$

  $$\{i \in \alpha | f_\xi(i) = n\} \notin F.$$

  Also gilt (7.13).

  Sei für $\xi < \kappa$ P_ξ die Partition von α, die durch f_ξ gegeben ist:

  $$P_\xi = \{\{i \in \alpha | f_\xi(i) = n\} | n \in \omega\}$$

  und sei P die gröbste gemeinsame Verfeinerung der P_ξ. Wegen $\mathrm{card}(P_\xi) = \omega$ ist $\mathrm{card}(P) \leq \omega^\kappa = 2^\kappa$.

  Sei τ die kleinste Kardinalzahl, so daß es eine injektive Folge $(x_\nu)_{\nu<\tau}$ in P gibt mit $\bigcup_{\nu<\tau} x_\nu \in F$.

  Behauptung:
  (7.14) $\tau \geq \omega.$

  Beweis von (7.14):
  Angenommen, $\tau < \omega$. Dann gilt $\bigcup x_\nu = x_0 \cup \ldots \cup x_{n-1}$. Da F Ultrafilter ist, gilt, wenn $a \cup b \in F$, dann $a \in F$ oder $b \in F$. Also folgt induktiv:

  $$a_0 \cup \ldots \cup a_{n-1} \in F \rightarrow \exists i < n a_i \in F.$$

  Somit ist $n = 1$ oder es gibt ein $j < n$ mit $x_j \in F$. Da x_j zur Partition P gehört, gibt es ξ mit $x_j \subseteq \{i \in \alpha | f_x i(i) = n\}$. aber $\{i \in \alpha | f_\xi(i) = n\} \notin F$. Also kann τ nicht endlich sein. Damit gilt (7.14).

Es gilt

(7.15) F ist τ-zerlegbar.

Beweis von (7.15):
Sei $(x_\nu)_{\nu<\tau}$ eine injektive Folge in F, so daß $x := \bigcup_{\nu<\tau} x_\nu \in F$. Die Menge

$$\{\alpha \setminus x\} \cup \{x_\nu | \nu < \tau\}$$

ist eine Partition der Länge τ von α. Sei $B \subseteq \{\alpha \setminus x\} \cup \{x_\nu | \nu < \tau\}$ mit $\mathrm{card}(B) < \tau$ und sei $B' := \{\nu | x_\nu \in B\}$.

Falls $\alpha \setminus x \notin B$, so gilt $\bigcup B = \bigcup_{\nu \in B'} x_\nu \notin F$ nach Wahl von τ.

Falls gilt $\alpha \setminus x \in B$, dann ist zu zeigen $\alpha \setminus x \cup \bigcup_{\nu \in B'} x_\nu \notin F$.

Angenommen, nicht. Dann gilt

$$\begin{aligned} F \ni x \cap (\alpha \setminus x \cup \bigcup_{\nu \in B'} x_\nu) &= x \cap \bigcup_{\nu \in B'} x_\nu \\ &= \bigcup_{\nu \in B'} x \notin F. \end{aligned}$$

Widerspruch. Damit gilt (7.15).

Falls $\mathrm{cf}(\tau) > \omega$, wurde der Fall schon oben behandelt. Im anderen Fall, d.h. $\mathrm{cf}(\tau) = \omega$, gilt mit $\tau \leq \mathrm{card}(P) \leq 2^\kappa$ und $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$, daß $\tau < \kappa$.

Wenn $\xi < \kappa$ und $\nu < \tau$, so ist $f_\xi \restriction x_\nu$ eine konstante Funktion, da $x_\nu \in P$. Definiere eine Folge $(g_\xi | \xi < \kappa)$ in ω^τ durch

$$g_\xi(\nu) \in f_\xi{}'' x_\nu.$$

Für $\xi < \eta < \kappa$ wähle

$$i \in (\bigcup_{\nu<\tau} x_\nu) \wedge \{i \in \alpha | f_\xi(i) \neq f_\eta(i)\} \in F$$

(da beide Faktoren aus F sind), z.B. $i \in x_\nu$.

Dann gilt $g_\xi(\nu) \neq g_\eta(\nu)$ und damit $g_\xi \neq g_\eta$. Also gibt es κ-viele verschiedene Funktionen in ω^τ, das heißt, $\kappa \leq \omega^\tau$ im Widerspruch dazu, daß κ starke Limeszahl und $\tau < \kappa$.

$\square$

Sei LCH die Aussage, daß alle Limeskardinalzahlen starke Limeskardinalzahlen sind.

Satz 7.2.12 *(B. Koppelberg [Kb 80]) Angenommen, $\neg 0^\sharp$ und LCH. Dann ist für jede unendliche Kardinalzahl α und jeden Ultrafilter F auf α die Kardinalzahl* $\operatorname{card}(\omega^\alpha/F)$ *regulär. Wenn α eine singuläre Kardinalzahl ist, dann gilt entweder* $\operatorname{card}(\omega^\alpha/F) < \alpha$ *oder* $\operatorname{card}(\omega^\alpha/F) = \alpha^+$.

Beweis:
Angenommen, es gäbe eine singuläre Kardinalzahl λ und eine unendliche Kardinalzahl α mit einem Ultrafilter F, so daß

$$\operatorname{card}(\omega^\alpha/F) = \lambda.$$

Angenommen, F ist $<\omega_1$-vollständig. Dann gilt mit Satz 5.2.12

$$\operatorname{card}(\omega^\alpha/F) = \omega$$

und damit die Behauptung des Satzes.

Andernfalls ist F $<\omega_1$-unvollständig, d.h. ω-regulär. Dann gilt mit Satz 6.3.3 $\lambda^\omega = \lambda$. Also gilt mit Korollar 2.2.4 $\operatorname{cf}(\lambda) > \omega$.

Definiere

$$\tau := \sup\{\delta | \delta \text{ ist eine reguläre Kardinalzahl und } F \text{ ist } \delta\text{-zerlegbar}\}.$$

1. Fall: $\tau < \lambda$.

   $$F \text{ ist } \mu\text{-unzerlegbar für } \tau < \mu < 2^{(2^\tau)^+}. \tag{7.16}$$

   Beweis von (7.16): τ ist eine Kardinalzahl, also gibt es ein δ, so daß $\tau = \aleph_\delta$. Die nächstgrößere Limeskardinalzahl ist $\aleph_{\delta+\omega}$. Mit LCH ist dies auch eine starke Limeskardinalzahl. Damit sind $\tau^+, 2^\tau, (2^\tau)^+, 2^{(2^\tau)^+} < \aleph_{\delta+\omega}$. Also liegen nur reguläre Kardinalzahlen zwischen τ und $2^{(2^\tau)^+}$.

   Damit ist (7.16) gezeigt.

   Mit Lemma 7.1.1 gibt es also ein $\alpha' \leq \tau < \lambda$ und ein $F' \leq_{\mathrm{RK}} F$ über α', so daß
   $$\omega^\alpha/F \cong \omega^{\alpha'}/F'.$$

   Da λ singulär ist, ist λ eine Limeskardinalzahl und mit LCH auch eine starke Limeskardinalzahl. Also gilt mit $\alpha' < \lambda$ auch $2^{\alpha'} < \lambda$. Daraus folgt
   $$\operatorname{card}(\omega^\alpha/F) = \operatorname{card}(\omega^{\alpha'}/F') \leq 2^{\alpha'} < \lambda.$$

2. Fall: $\tau \geq \lambda$.

   $$A := \{\beta < \lambda | \beta \text{ ist eine starke Limeskardinalzahl}\} \tag{7.17}$$

ist eine konfinale Teilmenge von λ.

Beweis von (7.17):
Sei $\delta < \lambda$. Definiere eine Folge $(\delta_n | n \leq \omega)$ durch

$$\begin{aligned} \delta_0 &:= \delta \\ \delta_{n+1} &:= 2^{\delta_n} \\ \delta_\omega &:= \bigvee_{n<\omega} \delta_n \end{aligned}$$

Wegen LCH gilt $\delta_n < \lambda$ für alle $n < \omega$. Aber auch $\delta_\omega < \lambda$, da $\mathrm{cf}(\lambda) > \omega$. δ_ω ist eine Limeskardinalzahl und mit LCH eine starke Limeskardinalzahl.

Behauptung: Damit gilt (7.17).

(7.18) F ist β^+-zerlegbar für alle $\beta \in A$.

Beweis von (7.18):
Sei $\beta \in A$. Es gilt $\tau \geq \lambda$, also gibt es ein reguläres $\delta > \beta^+$, so daß F δ-zerlegbar ist. Mit Satz 4.4.5 gibt es also einen uniformen Filter $F' \leq_{\mathrm{RK}} F$ auf δ. Mit Satz 4.4.8 ist F' β^+-zerlegbar. Also gibt es mit Satz 4.4.5 einen uniformen Filter $F_\beta \leq_{\mathrm{RK}} F'$ auf β^+. Da $F_\beta \leq_{\mathrm{RK}} F$, ist F (wieder mit Satz 4.4.5) β^+-zerlegbar. Damit gilt (7.18).

Es gilt

$$2^{<\beta^+} = \bigcup_{\eta<\beta^+} 2^\eta = 2^\beta = \beta^+ \text{ für alle } \beta \in A.$$

Die letzte Gleichheit gilt aufgrund von Satz 7.2.7.

Nach Korollar 7.2.5 folgt für $\alpha = \beta^+$, daß F_β δ-regulär ist für jedes $\delta \leq \beta$. Damit ist F δ-regulär für jedes $\delta < \lambda$ (Satz 4.3.6). Mit Lemma 7.2.8 gilt für alle regulären $\delta < \lambda$, daß $\mathrm{cf}((\omega, <)^\alpha/F) > \delta$. Damit gilt

$$\mathrm{card}(\omega^\alpha/F) \geq \mathrm{cf}((\omega, <)^\alpha/F) \geq \lambda^+,$$

im Widerspruch zur Annahme (die letzte Ungleichung gilt, da $\lambda \leq \mathrm{cf}((\omega, <)^\alpha/F)$ und $\mathrm{cf}((\omega, <)^\alpha/F)$ regulär). Also kann λ nicht singulär sein.

Um den zweiten Teil des Satzes zu zeigen, sei α eine singuläre Kardinalzahl und F ein Ultrafilter über α, so daß

$$\mathrm{card}(\omega^\alpha/F) \geq \alpha.$$

Aus dem ersten Teil des Beweises folgt, daß $\mathrm{card}(\omega^\alpha/F)$ regulär ist, also gilt auch $\alpha^+ \leq \mathrm{card}(\omega^\alpha/F)$.

Es ist $\omega^\alpha = 2^\alpha$, also gilt mit Satz 5.2.1 4.

$$\alpha^+ \leq \mathrm{card}(\omega^\alpha/F) \leq 2^\alpha = \alpha^+.$$

Die letzte Gleichheit gilt mit Satz 7.2.7. □

Satz 7.2.13 *(B. Koppelberg [Kb 80]) Angenommen, $\neg 0^\sharp$ und LCH. Sei κ eine singuläre Kardinalzahl mit $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$. Dann gibt es eine vollständige Boolesche Algebra B und einen Ultrafilter D auf B, so daß für jede Kardinalzahl α und jeden Ultrafilter F über α gilt*

$$\kappa = \mathrm{card}(\omega^{(B)}/D) \neq \mathrm{card}(\omega^\alpha/F).$$

Beweis:

Mit LCH und Satz 2.2.7 folgt aus $\kappa > \mathrm{cf}(\kappa) > \omega$, daß $\kappa^\omega = \kappa$. Wähle nun mit Lemma 7.2.9 eine Boolesche Algebra B und einen Ultrafilter D so, daß $\mathrm{card}(\omega^{(B)}/D) = \kappa$. Mit Satz 7.2.12 kann ω^α/F aber nur reguläre Kardinalität haben. Damit gilt die Behauptung. □

Literaturverzeichnis

[BeSl 69] Bell, J.S. und Slomson, A.B.: *Models and Ultraproducts: an Introduction*, North-Holland, Amsterdam 1969

[BK 96] Burghardt, M. und Koepke, P.: *Mengenlehre: ein Skript zu den Grundlagen der Mathematik mit einer Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie*, Bonn 1996

[CKe 77] Chang, C.C. und Keisler, H.J.: *Model Theory*, North-Holland, Amsterdam 1977

[Da 71] Daigneault, A.: *Boolean Powers in Algebraic Logic*, In: *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* 17 (1971), S. 411-420

[De 84] Devlin, K.: *Constructability*, Springer, New York 1984

[DeJe 75] Devlin, K. und Jensen, R.: *Marginalia to a theorem of Silver*, In: *Proceedings Logic Conference Kiel 1974*, Springer Lecture Notes 499 (1975)

[Do 84] Donder,H.-D.: *Regularität von Ultrafiltern und das Kernmodell*, Habilitationsschrift, Berlin 1984

[EKar 65] Engelking, R. und Karłowicz, M.: *Some Theorems of Set Theory and Their Topological Consequences*, In: *Fundamenta Mathematicae* 57 (1965), S. 275-285

[FiKant 35] Fichtenholz, G. und Kantorovitch, L.: *Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées*, In: *Studia Mathematica* 5 (1935), S. 69-98

[FMS 62] Frayne, T., Morel, A.C. und Scott, D.S.: *Reduced Direct Products*, In: *Fundamenta Mathematicae* 51 (1962), S. 195-228

[Ge 90] Gemignani, M.: *Elementary Topology*, Dover, New York 1990

[Ha 36] Hausdorff, F.: *Über zwei Sätze von G. Fichtenholz und L. Kantorovitch*, In: *Studia Mathematica* 6 (1936), S. 18-19

[JeKb] Jensen, R. und Koppelberg, B.: *A note on ultrafilters*, to appear

[JiSh 99] Jin, R. und Shelah, S.: *Possible Size of an Ultrapower of* ω, In: *Archive for Mathematical Logic* 38 (1999), S. 61-77

[Ka 76] Kanamori, A.: *Weakly normal filters and irregular ultrafilters*, In: *Transactions of the Amer. Math. Soc.* 220 (1976), S. 393-399

[Ke 67a] Keisler, H.J.: *Ultraproducts which are not Saturated*, In: *Journal of Symbolic Logic* 32 (1967), S. 23-46

[Ke 67b] Keisler, H.J.: *Ultraproducts of Finite Sets*, In: *Journal of Symbolic Logic* 32 (1967), S. 47-57

[Ket 76] Ketonen, J.: *Nonregular ultrafilters and large cardinals*, In: *Transactions of the Amer. Math. Soc.* 224 (1976), S. 61-73

[Kb 80] Koppelberg, B.: *Ultrapowers and Boolean Ultrapowers of* ω *and* ω_1, In: *Archiv für mathematische Logik* 20 (1980), S. 147-153

[KbKo 76] Koppelberg, B. und Koppelberg, S.: *A Boolean Ultrapower which is not an Ultrapower*, In: *Journal of Symbolic Logic* 41 (1976), S. 245-249

[Ko 89] Koppelberg, S.: *Handbook of Boolean Algebras: Volume 1*, North-Holland, Amsterdam 1989

[Ko 80] Koppelberg, S.: *Cardinalities of Ultrapowers of Finite Sets*, In: *Journal of Symbolic Logic* 45 (1980), S. 574-584

[Kr 72] Kopperman, R.: *Model Theory and its Applications*, Allyn & Bacon, Boston 1972

[Ku 72] Kunen, K.: *Ultrafilters and Independent Sets*, In: *Transactions of the American Mathematical Society* 172 (1972), S. 299-306

[Ku 80] Kunen, K.: *Set Theory: an Introduction to Independence Proofs*, North-Holland, Amsterdam 1980

[KuPr 71] Kunen, K. und Prikry, K.: *On descendingly incomplete ultrafilters*, In: *Journal of Symbolic Logic* 36 (1971), S. 650-653

[La 78] Lange, W.: *Modelltheoretische Untersuchungen Boolescher Potenzen*, Diss., Köln 1978

[Ma 71] Mansfield, R.: *The Theory of Boolean Ultrapowers*, In: *Annals of Mathematical Logic* 2 (1971), S. 297-323

[Po 81] Potthoff, K.: *Einführung in die Modelltheorie und ihre Anwendungen*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1981

[Pr 71] Prikry, K.: *On Measures on Complete Boolean Algebras*, In: *Journal of Symbolic Logic* 36 (1971), S. 395-406

[Sh 70] Shelah, S.: *On the Cardinality of Ultraprodukt of Finite Sets*, In: *Journal of Symbolic Logic* 35 (1970), S. 83f.

[Sh 90] Shelah, S.: *Classification Theory*, North-Holland, Amsterdam 1990

[Sh 99] Shelah, S.: *Possible Size of an Ultrapower of* ω, In: *Archive for Mathematical Logic* 38 (1999), S.61-77

[S 69] Sikorski, R.: *Boolean Algebras*, (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete: 25), Springer, 3. Aufl., Heidelberg 1969