Diplomarbeit

Θ ist Woodin in HOD

angefertigt am

Mathematischen Institut

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

vorgelegt der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Juni 2002

von

Frank Gerolstein

aus

Bad Hönningen

Ich erkläre, daß ich die Arbeit selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe und daß alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinne nach anderen Werken entnommen sind, durch Angabe der Quellen als Entlehnungen kenntlich gemacht worden sind. Bonn, den 3. Juli 2002

Danksagung

Ich möchte diese Gelegenheit nutzen, um mich bei allen zu bedanken, die mir bei meinem Studium beigestanden haben.
Insbesondere bei meinen Eltern, ohne die es in dieser Form nicht möglich gewesen wäre.
Desweiteren möchte ich mich bei allen Mitarbeitern der Abteilung für Mengenlehre und Logik an der Universität Bonn bedanken, die stets ansprechbar und hilfsbereit waren.
Insbesondere danke ich an dieser Stelle Dr. Benedikt Löwe.
Schließlich möchte ich mich bei meinem Betreuer Prof. Dr. Peter Koepke herzlich bedanken, dessen Erfahrung es ermöglichte, einen Blick hinter die "Magie" der Mathematik zu werfen.

Ich schließe diese Danksagung mit zwei Zitaten, die in dieser Form auch über die Mathematik anstelle der Technologie hätten gemacht werden können.

"Any sufficiently advanced technology is indistinguishable from magic"

(Arthur C. Clarke[1])

"Any technology distinguishable from magic is insufficiently advanced"

(Gregory Benford[2])

---

[1] *1917, engl. Schriftsteller, >2001, A space odyssee<

[2] *1941, amer. Schriftsteller & Prof. für Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Motivation

Warum ist die Frage nach Θ in HOD überhaupt von Interesse?
Es ist seit langer Zeit dank Gödel bekannt, daß ZF seine eigene Konsistenz, das heißt Widerspruchsfreiheit, nicht zeigen kann. Es kann also keinen absoluten Konsistenzbeweis für die Mathematik geben. Ein großes Ziel der Mengenlehre ist es geworden, relative Konsistenzbeweise zu geben, um die Stärke eines Axiomensystems möglichst genau erfassen zu können. An dieser Stelle nehmen die großen Kardinalzahlen einen wichtigen Platz ein, da sie für viele Konsistenzresultate bedeutend sind. Bei der Bestimmung der genauen Konsistenzstärke von [AD] spielen zum Beispiel die Woodinkardinalzahlen eine zentrale Rolle. Es gilt nämlich:
Satz [Woodin(1992)]:
Es sind äquikonsistent:
1) ZF+AD
2) ZFC+Es existieren abzählbar viele Woodinkardinalzahlen

Seit geraumer Zeit befindet sich ein Buch von Woodin, Matthias und Hauser in Bearbeitung, welches sich zu einem großen Teil dem Beweis dieses Satzes widmet. Dabei benötigen die Autoren für den Schritt von 1) nach 2) Verfeinerungen der Methoden, die ich in dieser Diplomarbeit benutzen werde, um "Θ ist unter geeigneten Zusatzbedingungen Woodin in HOD" zu beweisen. Ziel dieser Diplomarbeit ist es, im folgenden dem Leser diesen Beweis nahezubringen.

Obige Motivation ist in hohem Maße vereinfachend und dient nur dem Zweck, dem Leser kurz zu erklären, worum es bei dieser Diplomarbeit gehen soll. Für eine deutlich ausführlichere Erklärung der historischen Entwicklung der großen Kardinalzahlen und ihrer Einordnung in die moderne Mathematik sei auf das Einleitungskapitel von [Kan94] THE HIGHER INFINITE verwiesen.

1.2 Konventionen

In diesem Teil werden im folgenden viele grundlegende Begriffe definiert, die im allgemeinen als bekannt vorausgesetzt werden dürfen. Für eine ausführlichere Beschreibung der Begriffe sei für diejenigen, die wenig Erfahrung mit diesen besitzen, auf die gängige Literatur verwiesen, da an dieser Stelle lediglich die Schreibweise erklärt und vereinheitlicht, sowie ferner eine Nachschlagemöglichkeit gegeben werden soll. Die hier im folgenden verwendete Notation kann sich im Einzelfall von der in der Literatur verwendeten unterscheiden, da sie vor allem einheitlich an diese Diplomarbeit angepaßt sein soll. Dennoch soll sie sich nach Möglichkeit an der üblichen Literatur orientieren.

Definitionen werden durch den Doppelpunkt gekennzeichnet. Außerdem werden bei einigen Definitionen Indizes, Subskripte und Superskripte verwendet, welche jedoch im Einzelfall weggelassen werden, falls der Bezug klar ist.

Als Beispiel hierfür sei auf die Definition für $\mathcal{F}_X$ ist ein Filter auf X verwiesen. Häufig ist klar, auf welches X sich bezogen wird, oder es ist irrelevant, um welches konkrete X es sich handelt, und deshalb werde ich dann auch $\mathcal{F}$ für den Filter schreiben.

$a = \iota b \Phi$ steht für die Aussage "a ist das eine eindeutig bestimmte b, so daß Φ gilt" .

$\simeq$ werden wir im Kleeneschen Sinne für partielle Funktionen benutzen, was bedeutet, daß, wenn eine der beiden Seiten eine partielle Funktion und definiert ist, dann auch die andere Seite definiert ist, und beide gleich sind.

$f(x)\downarrow$ steht als Abkürzung für die Aussage "f ist eine partielle Funktion und an der Stelle x definiert".

$f(x)\downarrow= y$ steht als Abkürzung für die Aussage "f ist eine partielle Funktion, an der Stelle x definiert und nimmt dort den Wert y an".

Wir wollen uns dabei nicht daran stören, daß diese Verwendung des $\downarrow$ formal nicht ganz korrekt ist, da es die Schreibweise entscheidend vereinfacht.

Wenn wir über Funktionen sprechen, so benutzen wir die Zeichen $\hookrightarrow$, $\twoheadrightarrow$, $\leftrightarrow$ und $\mapsto$ als Kurzschreibweise für die Ausdrücke "ist eine injektive Funktion", "ist eine surjektive Funktion ", "ist eine bijektive Funktion" und "wird abgebildet auf ".

Für eine bijektive Funktion b bezeichne ferner b^{-1} ihre Umkehrfunktion. Für eine nichtbijektive Funktion f bezeichne dagegen f^{-1} die Funktion, welche jedem Element des Wertebereichs die Menge der Urbilder zuordnet.

Es ist zu beachten, daß die Zeichen $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ somit sowohl für Funktionen als auch in der Aussagenlogik eine Bedeutung besitzen. Es sollte aber stets aus dem Zusammenhang klar sein, welche der beiden Bedeutungen gemeint ist.

$\mathcal{P}(X)$ bezeichne die Potenzmenge einer Menge X, das heißt die Menge aller Teilmengen von X. Unter $[\mathcal{P}]$ wollen wir das Potenzmengenaxiom verstehen. Außerdem wollen wir einzelne Axiome in eckigen Klammern kennzeichnen, während wir Axiomensysteme ohne Klammern schreiben.

Wir benutzen das Symbol $\Box$, um das Ende eines Beweises zu kennzeichnen.

Wir benutzen das Symbol $\blacksquare$, um das Ende des Beweises einer Hilfsproposition innerhalb eines Beweises zu kennzeichnen.

Wann immer wir innerhalb eines Beweises die Formulierung "angenommen" benutzen, so wird diese Annahme zum Widerspruch geführt werden.

Wir arbeiten in dieser Diplomarbeit, sofern nichts anderes gesagt wird, im Axiomensystem ZF, dem Zermelo-Fraenkelschen Axiomensystem ohne Auswahl. Dies geschieht, da unsere bereits erwähnten geeigneten Zusatzbedingungen das Deteminiertheitaxiom [AD] enthalten werden, welches, wie wir noch zeigen, dem vollen Auswahlaxiom [AC] widerspricht.

1.3 Grundlegende Definitionen

Definition 1.1
Sei $R \subseteq X \times Y$ eine Relation, $f : X \to Y$ eine partielle Abbildung.

1. *$\mathrm{dom}(R) := \{x \in X \mid \exists y \in Y \; xRy\}$ heißt der **Definitionsbereich von** R.*

2. *$\mathrm{rng}(R) := \{y \in Y \mid \exists x \in X \; xRy\}$ heißt der **Wertebereich von** R.*

3. *$Fld(R) := \mathrm{dom}(R) \cup \mathrm{rng}(R)$ heißt das **Feld von** R.*

4. *$dom(f) := \{x \in X \mid f(x) \downarrow\}$ heißt der **Definitonsbereich von** f.*

5. *$Im(f) := \{y \in Y \mid \exists x \in X \; f(x) = y\}$ heißt das **Bild von** f.*

Definition 1.2
Seien X, Y Mengen und $X \subseteq Y$.
*Dann nennen wir eine partielle Funktion $f : Y \to \mathrm{ON}$ eine **charakteristische Funktion für** X, falls $f(x) \downarrow \simeq 1$ genau dann gilt, wenn $x \in X$ ist.*
Wir schreiben 1_X für eine solche Funktion.

Definition 1.3
Seien X, Y Mengen.
*Wir sagen X **trifft** Y, falls $X \cap Y \neq \emptyset$ ist.*

Definition 1.4
Seien X, Y Mengen und sei $g : X \twoheadrightarrow Y$.

1. *Dann heißt $x \in X$ **Kode für** $y \in Y$ **bezüglich** g, falls $g(x) = y$ ist.*

2. *Wir nennen g eine **Kodierung von** Y.*

Definition 1.5
*Wir nennen eine Menge X **transitiv**, falls x genau dann ein Element von X ist, wenn x auch Teilmenge von X ist.*

Definition 1.6
*Wir nennen die kleinste transitive Obermenge einer Menge X ihren **transitiven Abschluß**, geschrieben $TC(X)$.*

Das heißt $\mathrm{TC}(X) := \bigcap\{Y \mid Y \text{ transitiv } \wedge X \subseteq Y\}$.

Definition 1.7

1. *Die **Klasse** ON **der Ordinalzahlen** enthält alle transitiven Mengen x, für die die Einschränkung der ϵ-Relation auf x eine strikte lineare Ordnung ist.*

2. *Sei $\lambda \in ON$.*
   *Wir sagen $\zeta \subseteq \lambda$ ist **unbeschränkt in** λ, falls es für alle $\xi < \lambda$ ein $\mu \in \zeta$ gibt, so daß $\mu > \xi$ ist.*

3. *Sei* $X \subseteq ON$*.*
   $\gamma \neq 0$ *heißt* ***Limespunkt von*** X, *falls* $\bigcup(X \cap \gamma) = \gamma$ *ist.*

4. *Sei* $\delta \in ON$*.*
   C *heißt* ***club in*** δ, *falls* C *unbeschränkt in* δ *ist und alle Limespunkte von* C *unterhalb von* δ *enthält.*

5. *Sei* κ *eine reguläre, überabzählbare Kardinalzahl.*
   Dann heißt $\mathcal{F}_\kappa^{\text{club}} := \{X \mid \exists C\ C \text{ ist club in } \kappa \wedge C \subseteq X\}$ *der* ***club-Filter auf*** κ*.*

2 Grundlagen

2.1 Über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{N}$

In diesem ersten Teil werden wir kurz die wohlbekannten Begriffe der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ansprechen. Als erstes werden dazu folgende Standardkonventionen eingeführt.
Im gesamten folgenden Text werden wir die natürlichen Zahlen stets mit ω bezeichnen. Auch die reellen Zahlen werden wir im allgemeinen, das heißt sobald wir sie konkret in einem Argument benutzen wollen, nicht gemäß einer ihrer üblicheren Definitionen, welche zum Beispiel über Dedekindsche Schnitte verläuft, verwenden. Stattdessen identifizieren wir die reellen Zahlen meist mit dem Baireraum, was im folgenden vorgeführt und gerechtfertigt wird.

Definition 2.1

1. *Sei I eine Menge und für alle $i \in I$ seien X_i ebenfalls Mengen. Dann heißt $\prod X_i := \{(x_i)_{i\in I} \mid \forall i \in I\ x_i \in X_i\}$ das **kartesische Produkt der** X_i.*
   *Wir nennen I die **Indexmenge**.*
   Wir schreiben $\vec{x}$ für $(x_i)_{i\in I}$.

2. *Ein **topologischer Raum** ist ein Paar $(X, \mathcal{O}_\mathcal{X})$ bestehend aus einer Menge X und $\mathcal{O}_\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit:*

   T1) $X \in \mathcal{O}_\mathcal{X}$ und $\emptyset \in \mathcal{O}_\mathcal{X}$

   T2) Falls für alle i gilt, daß $O_i \in \mathcal{O}_\mathcal{X}$ ist, dann ist auch $\bigcup O_i \in \mathcal{O}_\mathcal{X}$.

   T3) Falls $O \in \mathcal{O}_\mathcal{X}$ und $P \in \mathcal{O}_\mathcal{X}$ sind, dann gilt auch $O \cap P \in \mathcal{O}_\mathcal{X}$.

3. *Wir nennen die Elemente von $\mathcal{O}_\mathcal{X}$ **offene Mengen**.*

4. *Wir nennen $\mathcal{O}_\mathcal{X}$ die **Topologie von** X.*

5. *Für $B \subseteq A$ definiere das **Komplement von** B **bezüglich** A durch $\neg B_A := A \backslash B$.*

6. *Wir nennen das Komplement einer offenen Menge **abgeschlossen**.*

7. *Mengen, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind, heißen **abgeschloffen**.*

8. *Die **diskrete Topologie auf** X ist $(X, \mathcal{P}(X))$.*

9. *Falls für alle $i \in I$ das Tupel $(X_i, \mathcal{O}_i)$ ein topologischer Raum ist, dann heißt das Tupel $(\prod X_i, \mathcal{O}_*)$ die **Produkttopologie**, falls gilt*
   $O \in \mathcal{O}_* \leftrightarrow \forall \vec{o} \in O\ \forall i \in I\ \exists O_i \in \mathcal{O}_{X_i}\ o_i \in O_i \wedge \prod O_i \subseteq O$.

10. *Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ **Basis der Topologie**, falls gilt $\forall O \in \mathcal{O}\ \exists I\ \forall i \in I\ B_i \in \mathcal{B} \wedge \bigcup B_i = O$.*

Proposition 2.2
Die diskrete Topologie und die Produkttopologie sind Topologien.

Im folgenden seien die Mengen $2 := \{0,1\}$ und ω stets mit der diskreten Topologie versehen.

Definition 2.3
*Sei $I = \omega$. Dann nennen wir $\mathcal{C} := 2^\omega := \prod 2$ versehen mit der Produkttopologie den **Cantorraum** und $\mathcal{N} := \omega^\omega := \prod \omega$ versehen mit der Produkttopologie den **Baireraum**.*

Wir werden nun im folgenden stets die reellen Zahlen, den Cantorraum und den Baireraum als identisch ansehen und gerade denjenigen Raum benutzen, der für das gerade betrachtete Problem am dienlichsten erscheint. Dies ist möglich, da es eine Isomorphie zwischen den irrationalen Zahlen und dem Baireraum gibt. Ebenso existiert eine Isomorphie zwischen dem Baireraum und den Elementen des Cantorraums, die nicht schließlich konstant sind, wobei schließlich konstant heißt, daß es einen Index gibt, ab dem die Folge konstant ist. In beiden Fällen unterscheiden sich die Räume nur um eine abzählbare Menge, nämlich entweder die rationalen Zahlen oder die schließlich konstanten Folgen. Es wird in unseren Anwendungen aber keine Rolle spielen, ob sich die Objekte um eine abzählbare Menge unterscheiden.
Als weitere Anmerkung sei an dieser Stelle darauf verwiesen, daß ich den Cantorraum explizit in dieser Arbeit nie benutzen werde und er deshalb hier nur der Vollständigkeit halber erwähnt wird. Er wird aber zum Beispiel beim Nachweis der PSP, welche später erwähnt werden wird, in dem zugrundeliegenden Spiel benutzt.

Definition 2.4
Sei $n \in \omega$ und sei A eine Menge.

1. *Die **Menge der (endlichen) Folgen in A mit Länge** n ist*
   $A^n := \{s := (s(0), s(1), ..., s(n-1)) \mid s : \omega \to A \text{ Abbildung } \}$.
2. *Die **Menge aller endlichen Folgen in** A ist $A^{<\omega} := \bigcup_{n\in\omega} A^n$.*
3. *Die **Mengen aller abzählbaren Folgen in** A ist*
   $A^\omega := \{(s(n))_{n\in\omega} \mid s : \omega \to A \text{ Abbildung } \}$.
4. *$A^0 = \{\emptyset\}$ und wir nennen deshalb $\emptyset$ auch die **leere Folge**.*

Definition 2.5
Zwei topologische Räume X, Y sind Borel-isomorph, falls es eine Bijektion $f : X \leftrightarrow Y$ gibt, so daß sowohl f als auch f^{-1} Borel-meßbar sind.

Borel-isomorphe Räume haben dieselbe maßtheoretische Struktur und können für alle praktischen Anwendungen als gleich angesehen werden.
Zur Klärung der obigen Begriffe und der Isomorphie zwischen $\mathcal{C}$ und $\mathbb{R}$ sei auf [Mos94], Kapitel 2 und Definition 10.33 ff verwiesen.

Die Isomorphie zwischen den irrationalen Zahlen und $\mathcal{N}$ erhält man leicht mittels Kettenbrüchen. Dieses kann man zum Beispiel bei [Wri58], Kapitel 10.9, nachlesen, wo ausführlich gezeigt wird, wie die irrationalen Zahlen eineindeutig als unendliche Kettenbrüche dargestellt werden können, welche wir eineindeutig als unendliche Folge natürlicher Zahlen auffassen können.

Für die Isomorphie zwischen $\mathcal{N}$ und $\mathcal{C}$ kodieren wir eine abzählbare Folge $(a_0, a_1, ...)$ von natürlichen Zahlen eineindeutig durch eine abzählbare Folge $(b_0, b_1, ...)$ von Nullen und Einsen wie folgt. Beginne mit a_0-vielen Nullen und füge eine Eins als Marker an. Danach füge hinter dieser einen Eins a_1-viele weitere Einsen an und setze dahinter eine Null als Marker. Fahre nun so fort, das heißt als nächstes kämen nun a_2-viele Nullen mit einer Eins als Marker dahinter und so weiter. Man überlegt sich leicht, daß auf diese Art und Weise jede abzählbare Folge natürlicher Zahlen eine abzählbare Folge von Nullen und Einsen ergibt. Ebenso überlegt man sich, daß auf diese Art und Weise genau die nicht schließlich konstanten Folgen von Nullen und Einsen Kodes für Elemente des Baireraumes sind. Offenbar gibt es aber nur abzählbar viele schließlich konstante Folgen von Nullen und Einsen, da es eine triviale Bijektion zwischen diesen und $2^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ gibt. Ein Element $(c_0, ..., c_n)$ aus $2^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ entspricht eineindeutig der Folge $(c_0, ..., c_n, 1 - c_n, 1 - c_n, 1 - c_n, ...)$, einem Element der schließlich konstanten Folgen. Es gibt nur an einer Stelle ein winziges technisches Problem, daß wir nämlich bei dieser Bijektion keine Entsprechung für die leere Folge besitzen. Man müßte sie also noch leicht modifizieren. Desweiteren ist $2^{<\omega}$ als Teilmenge der abzählbaren Menge $\omega^{<\omega}$ höchstens abzählbar und mindestens abzählbar, da es z.B. beliebig lange endliche Nullfolgen enthält. Die Tatsache, daß $\omega^{<\omega}$ abzählbar ist, wird später noch gezeigt werden.

Es sei nun also für den Rest dieser Arbeit festgehalten, daß wir eine reelle Zahl r grundsätzlich als Element des Baireraums verstehen, das heißt r ist ein abzählbares Tupel von natürlichen Zahlen und wir schreiben $r := (r(0), r(1), ...)$.

Definition 2.6
Setze für $r, s \in \mathcal{N}$ $r \bullet s := (r(0), s(0), r(1), ...)$.

Wir kommen nun zu einer ersten wichtigen Definition:

Definition 2.7

1. *Wir definieren eine Bijektion*
   $b_{[2]}$ zwischen ω^2 und ω durch $b_{[2]}(n, m) := n + \frac{(n+m)(n+m+1)}{2}$.

2. *Wir definieren eine Bijektion $b_{[*]}$ zwischen $\omega^{<\omega}$ und ω wie folgt.*
   Sei p_i die (i+1)-te Primzahl. Da die Primfaktorzerlegung eindeutig ist, ist
   $b_{[*]} : \omega^{<\omega} \leftrightarrow \omega$ definiert durch
   1) $\emptyset \mapsto 0$
   2) $(a(0), ..., a(n)) \mapsto (p_n^{a(n)+1})(\prod_{i=0}^{n-1} p_i^{a(i)}) - 1$ eine solche Bijektion.

3. *Sei $r \in \mathcal{N}$.*
   *Dann nennen wir für $i \in \omega$ die reelle Zahl $r^{[i]}$ definiert durch $r^{[i]}(n) := r(i + \frac{(n+i)(n+i+1)}{2})$ die **i-te reelle Zahl von** r.*

Abbildung 1: $b_{[2]}$ und die i-ten reellen Zahlen

Die dritte Definition zeigt, daß wir eine reelle Zahl auch als abzählbar viele reelle Zahlen interpretieren können. Wichtig wird obige Konstruktion in Kapitel 3 werden, wo wir mit ihrer Hilfe eines der zentralen Objekte dieser Diplomarbeit, nämlich das Solovayspiel, definieren werden. Dieses Spiel liefert uns unter [AD] den für diese Arbeit so entscheidenden UF.

Die zweite Definition scheint zunächst kompliziert.
Es muß beachtet werden, daß die Primfaktorzerlegung nur eindeutig bis auf Einheiten ist.
Deswegen scheitert der naive Ansatz, ein Tupel $(x(0), ..., x(n))$ durch $\prod_{i=0}^{n} p_i^{a(i)}$ zu kodieren.
Die Tupel (1) und $(1, 0)$ würden beide dieselbe Zahl, nämlich 2, kodieren.

Eine weitere Möglichkeit, eine solche Bijektion zu bilden, wäre folgende.
Sei $\langle . \rangle$ unsere unter 1) definierte Bijektion $b_{[2]}$.
Dann erhalte ich für jede endliche Zahl i eine Bijektion $b_{[i+2]}$ zwischen ω^{i+2} und ω durch $(a_1, a_2, ..., a_{i+2}) \mapsto \langle\langle ... \langle a_1, a_2 \rangle, a_3 \rangle, ... \rangle, a_{i+2} \rangle$.
Ferner kann ich $b_{[1]} : \omega^{\leq 1} \leftrightarrow \omega$ durch $\emptyset \mapsto 0 \wedge i \mapsto i + 1$ definieren.
Damit erhalte ich eine Bijektion $b : \omega^2 \leftrightarrow \omega^{<\omega}$ durch $(i, j) \mapsto b_{[i+1]}^{-1}(j)$.
Setze also $\tilde{b}_{[*]} := b \circ b_{[2]}^{-1}$.

n	0	1	2	3	4	5	6
PFZ $(n+1)$	2^0	2^1	3^1	2^2	5^1	$2^1 \star 3^1$	7^1
$b_{[*]}$	$\emptyset$	(0)	(0,0)	(1)	(0,0,0)	(1,0)	(0,0,0,0)
$\tilde{b}_{[*]}$	$\emptyset$	(0)	(0,0)	(1)	(0,1)	(0,0,0)	(2)
$b_{[2]}^{-1}$	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(0,2)	(1,1)	(2,0)	(0,3)
n	7	8	9	10	11	12	13
PFZ $(n+1)$	2^3	3^2	$2^1 \star 5^1$	11^1	$2^2 \star 3^1$	13^1	$2^1 \star 7^1$
$b_{[*]}$	(2)	(0,1)	(1,0,0)	(0,0,0,0,0)	(2,0)	(0,0,0,0,0,0)	(1,0,0,0)
$\tilde{b}_{[*]}$	(1,0)	(0,0,1)	(0,0,0,0)	(3)	(0,2)	(0,1,0)	(0,0,0,1)
$b_{[2]}^{-1}$	(1,2)	(2,1)	(3,0)	(0,4)	(1,3)	(2,2)	(3,1)

Abbildung 2: Der Unterschied zwischen $b_{[*]}$ und $\tilde{b}_{[*]}$

Wie man sich nun leicht überlegt, wäre auch $\tilde{b}_{[*]}$ eine Bijektion wie gewünscht. Der Vorteil dieser Bijektion wäre, daß sie sich ausschließlich unserer Technik aus dem ersten Teil der Definition bedient. Der Vorteil der von uns verwendeten Definition ist, daß sie viel einfacher aufgebaut ist. Sie beruht nur auf der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung. Es mußten lediglich oben erwähnte kleine technische Änderungen vorgenommen werden. Daher kann man immer noch unmittelbar aus einem Tupel die natürliche Zahl errechnen. Ebenso kann man mittels Primfaktorzerlegung aus einer natürlichen Zahl das Tupel leicht zurückgewinnen.

2.2 Über ZF und Σ_1-Formeln

Zur ausführlichen Definition und Diskussion über das von uns benutzte Axiomensystem ZF, die **Z**ermelo-**F**raenkelschen Axiome, sei auf die Kapitel 2 und 3 in [Bur96] verwiesen.
Sei im folgenden H eine Menge.
Wir verstehen unter ZF^H die Zermelo-Fraenkelschen Axiome, wobei alle Instanzen des Aussonderungs- und Ersetzungsschemas in der Sprache betrachtet werden, die um das zusätzliche Prädikat "ist ein Element von H" erweitert wurde.
Als nächstes erklären wir kurz die Komplexität von Formeln.

Definition 2.8
*Wir nennen eine Formel ϕ eine **Δ_0-Formel der Sprache $\mathcal{L}$**, falls ϕ in der kleinsten Klasse Y liegt, die alle atomaren Formeln von $\mathcal{L}$ enthält und abgeschlossen ist unter den folgenden Aussagen:*
Falls ϕ in Y ist, dann ist $\neg\phi$ in Y.
Falls ϕ und ψ in Y sind, dann ist $\phi \wedge \psi$ in Y.
Falls ϕ in Y ist, dann ist für alle Variablen u und v $\exists u \in v\ \phi$ in Y.

Definition 2.9
*Wir nennen eine Formel ϕ eine **Σ_1-Formel der Sprache $\mathcal{L}$**, falls ϕ von der Form ist $\exists u\ \psi(u)$ für eine Δ_0-Formel $\psi(u)$ der Sprache $\mathcal{L}$.*

Definition 2.10
*Wir nennen eine Formel ϕ eine **Σ-Formel der Sprache $\mathcal{L}$**, falls ϕ in der kleinsten Klasse Y liegt, die alle Δ_0-Formeln der Sprache $\mathcal{L}$ enthält und abgeschlossen ist unter den folgenden Aussagen:*
Falls ϕ und ψ in Y liegen, dann ist $\phi \wedge \psi$ in Y.
Falls ϕ in Y ist, dann ist für alle Variablen u und v $\exists u \in v\ \phi$ in Y.
Falls ϕ in Y ist, dann ist für alle Variablen u und v $\forall u \in v\ \phi$ in Y.
Falls ϕ in Y ist, dann ist für alle Variablen u $\exists u\ \phi$ in Y.

Für Beispiele von Δ_0- und Σ-Formeln sei auf die Tabellen 1-4 in [Bar75] verwiesen.
Unter Σ_1^H-Formeln verstehen wir Σ_1-Formeln in der Sprache, die um das zusätzliche Prädikat H erweitert wurde.
Wir wollen für $\zeta < \Theta$, das einstellige Prädikat "ist Element von H" als "ist Element von $\zeta \cap H$" interpretieren.
Wir werden aber weiterhin H statt $H \cap \zeta$ dafür schreiben.

Definition 2.11
Seien A, B Modelle.
*Dann sagen wir A ist **Σ_n-elementares Submodell von** B, geschrieben*
$A \preceq_{\Sigma_n} B$, falls für jede Σ_n-Formel ϕ mit Parametern aus A gilt $A \models \phi \leftrightarrow B \models \phi$.

Unter $\preceq_{\Sigma_1^H}$ verstehen wir natürlich die Σ_1^H-Elementarität.

2.3 Rekursionstheorie

Dieser Abschnitt stellt eine knappe Zusammenfassung einiger Ergebnisse des dritten Kapitels von [Mos80] dar und dient sowohl der Erklärung von Begriffen, als auch der Erwähnung einiger für den späteren Beweis zentraler Sätze. Im folgenden sei Γ stets eine Punktklasse vom Typ 1 oder Typ 0, benutzt in der üblichen Definition.
Es wird ferner davon ausgegangen, daß der Leser die Definitionen der Kleeneschen Punktklassen kennt. Insbesondere werden uns als Punktklasse die Σ^1_1-Mengen interessieren.

Definition 2.12
*Eine Punktklasse Γ heißt **Fettdruckpunktklasse**, falls sie alle Δ^0_1-Mengen enthält und abgeschlossen unter stetigen Urbildern ist.*

Definition 2.13
*Eine **Parametrisierung von** S **durch** I ist eine Surjektion $\pi : I \twoheadrightarrow S$.*

Definition 2.14

1. $\Gamma{\restriction}\mathcal{X} := \{P \subseteq \mathcal{X} \mid P \in \Gamma\}$
2. *Für* $P \subseteq \mathcal{Y} \times \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}$ *setze* $P_y := \{x \in \mathcal{X} \mid P(y,x)\}$.

Definition 2.15
*Wir nennen $G \subseteq \mathcal{Y} \times \mathcal{X}$ **universell für** $\Gamma{\restriction}\mathcal{X}$, falls $G \in \Gamma$ und $a \mapsto G_a$ eine Parametrisierung von $\Gamma{\restriction}\mathcal{X}$ durch $\mathcal{Y}$ ist.*

Das heißt eine Teilmenge P von $\mathcal{X}$ liegt genau dann in der Punktklasse Γ, wenn es ein $a \in \mathcal{Y}$ gibt, so daß $P = G_a$.

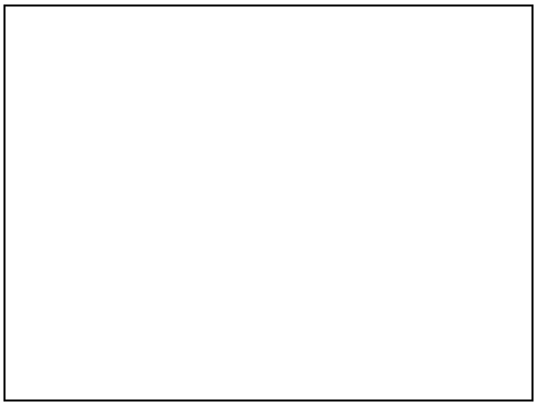

Abbildung 3: Universelle Mengen

Proposition 2.16
Sei $U \in \Gamma$ universell für Γ.
Dann ist $\{x \mid U(x,x)\} \in \Gamma \setminus \neg\Gamma$.

BEW: Der Beweis erfolgt mittels des üblichen Diagonalarguments.
Setze $P(x) :\leftrightarrow U(x,x)$.
Angenommen es gelte $\neg P \in \Gamma$.
Dann existiert ein y, so daß für alle x gilt, daß $\neg P(x)$ genau dann wahr ist, wenn auch $U(y,x)$ zutrifft, da U universell ist. Dann gilt aber für $x := y$, daß $\neg P(y) \leftrightarrow U(y,y) \leftrightarrow P(y)$ gilt, was offenbar widersprüchlich ist. Also gilt, da $U \in \Gamma$ ist, daß auch $P \in \Gamma$ ist. Somit ist aber $\neg P \in \neg\Gamma$. Alles zusammen ergibt $\neg P \in \neg\Gamma \setminus \Gamma$, und mittels Negation folgt die Behauptung.
$\square$

Weitere Eigenschaften von universellen Mengen finden sich erneut in [Mos80], Kapitel 3.

Definition 2.17
*Wir nennen eine Punktklasse Γ eine **$\mathcal{Y}$-parametrisierte** Punktklasse, falls für jede Punktklasse $\mathcal{X}$ ein für $\Gamma\restriction\mathcal{X}$ universelles $G \subseteq \mathcal{Y} \times \mathcal{X}$ existiert.*

Eine für uns interessante Punktklasse Σ_1 ist ω-parametrisiert.

Definition 2.18
*Eine Punktklasse Γ heißt **adäquat**, falls sie alle rekursiven Punktmengen enthält und abgeschlossen unter Σ^0_1-rekursiver Substitution, Konjunktion, Disjunktion und beschränkter Quantifizierung ist.*

Ich werde nun einige Ergebnisse auflisten, die ich ohne Beweis verwenden werde. Für genauere Informationen sei wiederum auf [Mos80], Kapitel 3, verwiesen. Für Kleenesche Punktklassen, benutzt in ihrer üblichen Definition, wozu auch Σ^0_1-Punktklassen gehören, gilt, daß sie verschieden voneinander sind, universelle Mengen besitzen und adäquat sind. Die Tatsache, daß Kleenesche Punktklassen universelle Mengen besitzen und adäquat sind, folgt mittels des Aufbaus der Kleene-Hierarchie, der Tatsache, daß diese Eigenschaften auf Σ^0_1-Mengen zutreffen, und folgender beiden Propositionen.

Proposition 2.19
Sei $\mathcal{X} = \mathcal{N}$ oder $\mathcal{X} = \omega$. Falls U universell für Γ ist, dann gilt:

1. *$\neg U$ ist universell für $\neg\Gamma$.*
2. *$\exists^{\mathcal{X}} U$ ist universell für $\exists^{\mathcal{X}}\Gamma$.*
3. *$\forall^{\mathcal{X}} U$ ist universell für $\forall^{\mathcal{X}}\Gamma$.*

Proposition 2.20
Sei Γ eine adäquate Punktklasse. Dann sind auch $\neg\Gamma$, $\exists^\omega\Gamma$, $\forall^\omega\Gamma$, $\exists^{\mathcal{N}}\Gamma$ und $\forall^{\mathcal{N}}\Gamma$ adäquat.

Daß Σ^0_1 tatsächlich universelle Mengen erlaubt und adäquat ist, zeigen die folgenden Propositionen. Ohne dies im folgenden zu beweisen, gilt, daß wir zu jedem Raum $\mathcal{X}$ vom Typ 0 beziehungsweise 1 eine Topologiebasis $(N(\mathcal{X}, s) \mid s \in \omega)$ von Nachbarschaften definieren können, welche folgende Eigenschaften besitzt:

1. $N(\mathcal{X}, 0) = \emptyset$
2. Es existieren rekursive Funktionen f, g, h derart, daß gilt:
   2.1. $N(\mathcal{X}, s) \times N(\mathcal{Y}, t) = N(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, f(s, t))$
   2.2. $N(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, s) = N(\mathcal{X}, g(s)) \times N(\mathcal{Y}, h(s))$
3. Es existieren rekursive Funktionen f, g derart, daß gilt:
   3.1. $N(\mathcal{X}, s) \cap N(\mathcal{X}, t) = \bigcup_{n\in\omega} N(\mathcal{X}, f(s, t, n))$
   3.2. $\bigcap_{i\leq m} N(\mathcal{X}, (u)_i) = \bigcup_{n\in\omega} N(\mathcal{X}, g(u, m, n))$

Proposition 2.21
Sei $N(\mathcal{X}, s)$ eine rekursive Aufzählung der offenen Nachbarschaften, wie oben angedeutet. Sei $\epsilon \in \mathcal{N}$.
Dann ist $U(\epsilon, x) :\leftrightarrow x \in \bigcup_{n\in\omega} N(\mathcal{X}, \epsilon(n))$ universell für $\Sigma^0_1 \restriction \mathcal{X}$.

Hierzu rechnet man die Eigenschaft für universelle Mengen nach.

Definition 2.22
*Eine Punktklasse Γ ist eine Σ-**Punktklasse**, falls sie alle semirekursiven Punktmengen enthält und abgeschlossen unter trivialer Substitution, Konjunktion, Disjunktion, beschränkter Quantifizierung und natürlicher Existenzquantifikation ist.*

Proposition 2.23
Σ-Punktklassen mit der Ersetzungseigenschaft sind adäquat.

Wir können nun einige zentrale Sätze formulieren, welche wir in Zukunft öfter benutzen werden. Dies sind die Sätze (3H1-3H3) aus [Mos80].

Satz 2.24 (Gutes Parametrisierungslemma)
Sei Γ eine ω-parametrisierte Punktklasse, welche unter rekursiver Substitution abgeschlossen ist. Dann können wir mit $\mathcal{X}$ ein $G^{\mathcal{X}} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X}$ assoziieren, welches folgende Eigenschaften besitzt:

1. *$G^{\mathcal{X}} \in \Gamma$ ist universell für $\Gamma \restriction \mathcal{X}$.*
2. *Für $P \subseteq \mathcal{X}$ gilt, daß es ein rekursives $\epsilon \in \mathcal{N}$ gibt, so daß $P \in \Gamma$ genau dann gilt, wenn auch $P = G^{\mathcal{X}}_{\epsilon}$ gilt.*
3. *Es gibt eine rekursive Funktion $S : \mathcal{N} \times \mathcal{X} \to \mathcal{N}$, so daß $G^{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}(\epsilon, x, y)$ dann und nur dann wahr ist, wenn auch $G^{\mathcal{Y}}(S(\epsilon, x), y)$ wahr ist.*

Wir wollen im folgenden eine Parametrisierung, die das gute Parametrisierungslemma erfüllt, **gut** nennen. Ferner wollen wir die Menge $G^{\mathcal{X}}$ einer guten Parametrisierung als **gute universelle Menge** bezeichnen.

Satz 2.25 (Satz über den uniformen Abschluß)
Sei Γ eine ω-parametrisierte, adäquate Punktklasse, und sei ferner Γ abgeschlossen unter einer der folgenden Operationen $(\wedge, \vee, \exists^{\leq}, \forall^{\leq}, \exists^{\omega}, \forall^{\omega}, \exists^{\mathcal{N}}, \forall^{\mathcal{N}})$.
Dann ist Γ unter der entsprechenden Operation uniform abgeschlossen.

Unter dem uniformen Abschluß verstehen wir den Abschluß mittels rekursiver Funktionen, das heißt, es gibt eine rekursive Funktion, welche die Abschlußeigenschaft bezeugt.

Satz 2.26 (Rekursionssatz)
Sei Γ eine ω-parametrisierte Punktklasse, welche unter rekursiver Substitution abgeschlossen ist, und sei ferner $R \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{X}$ eine Relation in Γ.
Dann gibt es ein rekursives $\epsilon^* \in \mathcal{N}$, so daß $R_{\epsilon^*} := \{x \mid R(\epsilon^*, x)\}$ den Γ-Kode ϵ^* hat.

R_{ϵ^*} hat den Γ-Kode ϵ^*, bedeutet, $R(\epsilon^*, x)$ ist genau dann wahr, wenn auch $G^{\mathcal{X}}(\epsilon^*, x)$ zutrifft, wobei $G^{\mathcal{X}}$ wiederum eine gute universelle Menge ist.

Definition 2.27
Sei $G^{\mathcal{X}}$ eine gute universelle Menge für $\mathcal{X} \times \omega$.

1. *Definiere für $\mathcal{Y}$ eine partielle Funktion $U : \mathcal{N} \times \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ durch*
   $U(\epsilon, x) = \iota y \forall s\ (y \in N(\mathcal{Y}, s) \leftrightarrow G(\epsilon, x, s))$, falls ein solches y existiert.
   $U(\epsilon, x)$ ist ansonsten undefiniert.

2. *Setze $\{\epsilon\}(x) :\simeq U(\epsilon, x)$.*

Mit dieser Definition ist für jedes $\epsilon \in \mathcal{N}$
$\{\epsilon\}$ eine partielle Funktion von $\mathcal{X}$ nach $\mathcal{Y}$.

Mit Hilfe obigen Rekursionssatzes für Relationen erhält man einen Rekursionssatz für Funktionen, den ich hier nicht explizit formulieren werde. Hierfür sei auf 7A.2 in [Mos80] verwiesen.
Er besagt, daß unter geeigneten Bedingungen für geeignete Funktionen[3]
$f : \mathcal{N} \times \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ ein $\epsilon^* \in \mathcal{N}$ existiert, so daß für alle $x \in \mathcal{X}$ $f(\epsilon^*, x) \downarrow= \{\epsilon^*\}(x)$ ist.

[3] was in unseren Anwendungen erfüllt sein wird

2.4 Über $\mathrm{pos}\Sigma^1_1(<_P)$

Im folgenden seien P, Q zweistellige Relationen auf einem Raum $\mathcal{X}$ vom Typ 1. Wir wollen eine Klasse definieren, welche alle Σ^1_1-Mengen sowie die Relationen P und Q enthält, abgeschlossen ist unter Konjunktion, Disjunktion, natürlicher Quantifikation und reeller Existenzquantifikation und minimal mit diesen Eigenschaften ist. Diese Klasse wollen wir dann zunächst $\mathrm{pos}\Sigma^1_1(P, Q)$ nennen. Im Falle $Q = \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, wollen wir diese Klasse dann mit $\mathrm{pos}\Sigma^1_1(<_p) := \mathrm{pos}\Sigma^1_1(P, \mathcal{X}^2)$ bezeichnen.

Definition 2.28
Sei U eine gute universelle Menge für Σ^1_1. Seien $P, Q \subseteq \mathcal{X}$
Die Punktklasse $\mathrm{pos}\Sigma^1_1(P, Q)$ besteht aus den Punktmengen X, so daß ein rekursives ϵ existiert mit
$x \in X :\leftrightarrow G^{P,Q}_\epsilon(x) :\leftrightarrow \exists a, b, c, d\ \forall n \in \omega\ Q(a^{[n]}, b^{[n]}) \wedge P(c^{[n]}, d^{[n]}) \wedge U(\epsilon, a, b, c, d, x)$.

Als Anmerkung sei erwähnt, daß wir das Objekt $a^{[n]}$ für beliebige Räume vom Typ 1 nicht definiert haben, aber definieren könnten.
Wir haben unsere Klasse definiert, indem wir eine gute universelle Menge für sie angegeben haben. Wir müssen nun noch zeigen, daß diese Definition tatsächlich auch unseren Abschlußeigenschaften genügt.

Proposition 2.29
Die Klasse $\mathrm{pos}\Sigma^1_1(Q, R)$ ist abgeschlossen unter Konjunktion, Disjunktion, natürlicher Quantifikation, reeller Existenzquantifikation. Ausserdem enthält sie die Relation P, Q, alle Σ^1_1-Punktmengen, ist ω-parametrisiert und ist eine adäquate Σ-Punktklasse.

Der Beweis findet sich in [Mos80] unter Lemma 7D.7 skizziert.

2.5 Über Spiele

Definition 2.30
Sei $n \in \omega$, und sei A eine Menge versehen mit der diskreten Topologie.
Seien ferner $s, t \in A^{<\omega} \cup A^{\omega}$, und A^{ω} sei versehen mit der Produkttopologie.

1. *Wir nennen $s\restriction n := (s(i))_{i<n}$ die* ***Einschränkung von** s **auf Länge** n.*

2. *Dann heißt s* ***Anfangsstück von** t, bzw. t **Erweiterung von** s, geschrieben $s \subseteq t$, falls $\exists m \in \omega\ s = t\restriction m$.*

3. *Wir nennen ein Anfangsstück, bzw. eine Erweiterung,* ***echt**, geschrieben $s \subsetneq t$, falls $s \subseteq t \wedge \neg(t \subseteq s)$.*

4. *Wir nennen $N_s := \{x \in A^{\omega} \mid s \subseteq x \wedge s \in A^{<\omega}\}$ die* ***Standardbasis der Topologie auf** A^{ω}.*

5. *Sei $r \in A^n$.*
   Dann heißt u ***Konkatenation von** r **mit** s, geschrieben $r \frown s$, falls für alle $i < n$ gilt $u(i) = r(i)$ und für alle $i \geq n$ gilt $u(i) = s(i-n)$.*

Sei im folgenden zusätzlich $T \subseteq A^{<\omega}$.

6. *Dann heißt T* ***Baum auf** A, falls T abgeschlossen unter Anfangsstücken ist, d.h. $t \in T \wedge s \subseteq t \rightarrow s \in T$.*

7. *$a \in A^n$ heißt* ***Zweig von** T **mit Länge** n, falls für alle $m < n$ gilt $s\restriction m \in T$.*

8. *Analog heißt $a \in A^{\omega}$* ***abzählbarer Zweig von** T, falls $\forall m \in \omega\ a\restriction m \in T$.*

9. *$[T] := \{a \mid a \text{ ist abzählbarer Zweig von } T\}$ heißt der* ***Stamm von** T.*

10. *Wir nennen einen Baum T* ***gestutzt**, falls $\forall r \in T\ \exists r_* \in T\ r \subsetneq r_*$.*

Proposition 2.31
Die Standardbasis ist eine Basis.

Definition 2.32
Sei A eine Menge.
Dann definiert jedes $X \in \mathcal{P}(A^{\omega})$ ein ***Spiel** und wir schreiben dafür $\mathcal{G}(A, X)$.*
Wir nennen dabei X die ***Gewinnmenge**.*

Warum definieren wir ein Spiel, wenn jedes Element der Potenzmenge von A^{ω} ein solches ist?
Der Grund ist, daß wir uns ein Spiel wie folgt vorstellen.
X zerlegt A^{ω} in 2 disjunkte Teilmengen $X, \neg X$. Wir denken uns jede Folge $x := \vec{x} \in A^{\omega}$ als abwechselnd von zwei Spielern gespielt vor:
$I \quad x(0) \quad x(2) \quad x(4)...$
$II \quad x(1) \quad x(3) \quad x(5)...$
Wir schreiben im folgenden $x_I := (x(2i))_{i\in\omega}$ und $x_{II} := (x(2i+1))_{i\in\omega}$.

Wir nennen x_I ein **Spiel von I im Spiel** $\mathcal{G}(A, X)$.
Wir nennen ferner jedes Folgenglied einen **Zug** des entsprechenden Spielers.
Ein Spiel von I zusammen mit einem Spiel von II ergibt einen **Spielverlauf (Partie)**.
Ziel des Spiels für I ist es zu versuchen, daß die beim Spiel entstehende Folge x in X landet, während II versucht, dies zu verhindern, also die Folge in $\neg X$ landen zu lassen.

Definition 2.33

1. *Wir sagen,* ***I gewinnt*** $\mathcal{G}(A, X)$ *genau dann, wenn* $(x(n))_{n\in\omega} \in X$ *ist.*

2. ***II gewinnt*** *genau dann, wenn I nicht gewinnt.*

3. *Wir nennen einen Baum* $\sigma \subseteq A^{<\omega}$ ***Prästrategie für I****, falls gilt*

   S1) $\sigma \neq \emptyset$ *ist gestutzt.*

   S2) $(x(i))_{i\leq 2j} \in \sigma \to \forall x(2j+1)\ (x(i))_{i\leq 2j+1} \in \sigma$

4. *Wir nennen eine Prästrategie* ***Strategie****, falls zusätzlich gilt*

   S3) $(x(i))_{i\leq 2j-1} \in \sigma \to \exists! x(2j)\ (x(i))_{i\leq 2j} \in \sigma$

5. *Wir nennen eine Prästrategie* ***Quasistrategie****, falls zusätzlich gilt*

   S3') $(x(i))_{i\leq 2j-1} \in \sigma \to \exists x(2j)\ (x(i))_{i\leq 2j} \in \sigma$

6. *Eine Strategie* σ *heißt* ***gewinnend für I****, falls* $[\sigma] \subseteq X$.
   Wir nennen eine solche Strategie auch ***Gewinnstrategie (GST) für I****.*

7. *Ein Spiel* $\mathcal{G}(A, X)$ *heißt* ***determiniert****, falls einer der Spieler eine gewinnende Strategie besitzt.*

8. *Wir nennen eine Menge* $X \in \mathcal{P}(A^\omega)$ ***determiniert****, geschrieben* $\mathrm{Det}(X)$*, falls* $\mathcal{G}(A, X)$ *determiniert ist.*

9. *Wir nennen eine Punktklasse* Γ ***determiniert****, geschrieben* $\mathrm{Det}(\Gamma)$*, falls jedes Element von* Γ *determiniert ist.*

10. *Zwei Spiele* $\mathcal{G}(A, X)$ *und* $\mathcal{G}(B, Y)$ *heißen* ***äquivalent****, falls stets aus der Existenz einer GST für einen der beiden Spieler in einem der beiden Spiele die Existenz einer GST für denselben Spieler im anderen Spiel folgt.*

11. *Wir nennen* $\mathcal{G}_T(A, X)$ *ein* ***Spiel mit Regeln****, falls gilt*

    (a) $T \subseteq A^{<\omega}$ *ein nichtleerer gestutzter Baum ist.*

    (b) $X \subseteq [T]$

    (c) $\forall n \in \omega\ (x(i))_{i<n} \in T$

Unter einem **modifzierten Spiel** wollen wir ein Spiel verstehen, in dem die Züge der Spieler anders aufgefaßt werden. Beispiele dafür sind die den später noch erwähnten Regularitätseigenschaften zugrunde liegenden Spiele. So macht es keinen Unterschied, ob die Spieler abwechselnd ziehen, oder ob einer der beiden Spieler statt eines Zuges endliche viele Züge machen darf. Auch das daraus resultierende modifizierte Spiel ist äquivalent zu einem Spiel.
Die Beweisskizze ist einfach. Formuliere obiges Beispiel in ein äquivalentes Spiel mit Regeln um und nutze 2.34. Das äquivalente Spiel mit Regeln könnte z.B. so lauten:
Beide Spieler spielen abwechselnd natürliche Zahlen, welche wir jedoch anders interpretieren wollen.
Wann immer ein Spieler eine Null spielt, so interpretieren wir dies als passen, das heißt der entsprechende Spieler zieht nicht und der nächste Spieler ist am Zug. Wann immer ein Spieler keine Null, also eine Zahl $n+1$, spielt, so interpretieren wir dies, als ob er die Zahl n gespielt hätte. Die Regeln lauten dann.
R1) Falls I und II passen, so verliert II[4].
R2) Falls I und II nicht passen, so verliert II[5].
R3) I verliert, falls er nur endlich oft paßt.
Sofern die Regeln eingehalten werden, ist dies ein Spielverlauf im modifizierten Spiel und unsere Gewinnmenge aus dem modifizierten Spiel entscheidet über den Sieger. Vernünftig implementiert ist klar, daß die beiden Spiele äquivalent sind und das zweite lediglich ein Spiel mit Regeln ist.
Auch wenn dies hier nicht erfolgt ist, müßte man noch die Begriffe "II gewinnt, (Prä-)(Quasi-)Strategie für II, GST für II", etc. definieren. Dies macht man aber auf natürliche Art und Weise, ebenso die einzelnen Begriffe für Spiele mit Regeln.

Konvention

* Da Beweise unter [AD] häufig durch konkrete Angabe eines exemplarischen Spielverlaufs geschehen, wollen wir erklären, wie unsere Schreibweise in Zukunft zu verstehen ist. Es gibt bei den Beweisen einige häufig benutzte Techniken.
  Erstens betrachtet man sehr oft Spielverläufe gemäß einer Strategie, die üblicherweise σ genannt wird, falls sie eine Strategie für I ist, ansonsten nennen wir sie τ. Wir benutzen diese Strategien wie folgt. Wann immer statt des üblichen Schemas
  $I \quad x(0)...$
  $II \quad x(1)...$
  die Schreibweise
  $\sigma \quad x(0)...$
  $II \quad x(1)...$
  benutzt wird, heißt dies, daß I im gesamten Spielverlauf seiner Strategie σ folgt, welche entweder vorher irgendwann festgelegt wurde oder durch

[4] sobald I paßt, muß II ziehen
[5] solange I zieht, muß II passen

diese Angabe des exemplarischen Spielverlaufs definiert wird, und I somit keine Wahl für seine eigenen Züge besitzt.
Zweitens gibt es das sogenannte "Kopieren" von Zügen, in dem ein Spieler einen Zug einfach wiederholt, der bereits an anderer Stelle gespielt wurde. Um dies zu verdeutlichen, zeichnet man üblicherweise Pfeile vom Originalzug zur Kopie. Da dies im Einzelfall aber zu einer sehr unübersichtlichen Darstellung führt, möchte ich hier eine andere Schreibweise einführen:
Wann immer ein einzelner Zug $x(n)$ von einer Box $\boxed{x(n)}$ umgeben ist, handelt es sich um einen kopierten Zug, das heißt, an einer anderen früheren Stelle existiert ein identischer Zug, der nicht von einer Box umgeben ist. Dieser Zug ist der Originalzug.

* Desweiteren werden wir in einigen Spielen auch die Züge von I und II anders nennen. Es wird oft so sein, daß uns nicht der gesamte Spielverlauf x sondern die einzelnen Spiele x_I und x_{II} von I, beziehungsweise II interessieren. In diesem Fall gehen wir dazu über, zu sagen, I spielt ein $a := (a(0), a(1), ...)$, während II ein $e := (e(0), e(1), ...)$ spielt.
  Ein Spielverlauf sieht dann entsprechend so aus:
  $I \quad a(0) \quad\quad a(1)...$
  $II \quad\quad e(0) \quad\quad e(1)...$

* Spiele mit Regeln werden in der Praxis stets anders als in der Definition angegeben gehandhabt werden. Es wird nicht T angegeben, sondern es werden Regeln formuliert werden, aus denen man dann T erhält.
  Auch wird die Bedingung, daß $X \subseteq [T]$ ist, selten eingehalten werden. In diesem Falle erhält man das X aus der Definition durch den Schnitt der angegebenen Gewinnmenge mit $[T]$.

* Wir wollen an dieser Stelle für den Rest dieser Arbeit festlegen, daß in einem Spiel mit Regeln, sofern diese aufsteigend aufgezählt sind, stets derjenige Spieler automatisch verliert, der die Regel mit der niedrigsten Numerierung verletzt, ansonsten verliert der Spieler, der als Erstes ausgehend von der Zugfolge eine Regel verletzt.
  Wird überhaupt keine Regel verletzt, entscheidet die Gewinnmenge über den Sieger einer Partie.
  Wir sagen, daß in einem Spiel mit Regeln T die **legalen Positionen** definiert.

Es gilt ferner, daß man für S3) eventuell [AC] benötigt.
Außerdem ist eine äquivalente Definition von Strategie für I:
Es gibt eine Funktion $\sigma : A^{<\omega} \to A$, so daß $\sigma((x(1), x(3), ..., x(2n-1)) = x(2n)$ ist.
Für $n = 0$ verstehen wir $\sigma((x(1), ..., x(-1))$ natürlich als $\sigma(\emptyset)$.

Lemma 2.34
Zu jedem Spiel mit Regeln $\mathcal{G}_T(A, X)$ existiert ein äquivalentes Spiel $\mathcal{G}(A, \tilde{X})$ und umgekehrt.

BEW:

"$\Leftarrow$" Sei $\mathcal{G}(A, \tilde{X})$ Spiel.
Setze $T := A^{<\omega}$ und $X := \tilde{X}$.
Dann ist offenbar $\mathcal{G}_T(A, X)$ das Spiel mit der gleichen Gewinnmenge und mit der Regel, daß "keine Regeln existieren" äquivalent zu $\mathcal{G}(A, \tilde{X})$.

"$\Rightarrow$" Sei $\mathcal{G}_T(A, X)$ Spiel mit Regeln.
Setze
$\tilde{X} := \{x \in A^{<\omega} \mid \exists n \in \omega\ (x{\restriction}n \notin T \wedge \min\{n \in \omega \mid x{\restriction}n \notin T\} \equiv 0 \bmod 2)$
$\vee (x \in [T] \wedge x \in X)\}$.
Ein Element ist also offenbar genau dann in unserer neuen Gewinnmenge, falls entweder eine Regel verletzt wurde und II der Erste war, der dies tat, oder es wurde keine Regel verletzt und I gelang es, in die Gewinnmenge zu spielen.
Also ist $\mathcal{G}_T(A, X) = \mathcal{G}(A, \tilde{X})$.

□

Satz 2.35 (Satz von Gale-Stewart(1953))
Sei $T \neq \emptyset$ gestutzter Baum auf A, $X \subseteq [T]$ offen oder abgeschlossen in $[T]$. Dann ist X determiniert.

Zum Beweis siehe [Kec95] Satz 20.1.
Später gelang es Martin mittels nicht mehr so elementarer Techniken zu zeigen, daß sogar Borel-Mengen determiniert sind.

Satz 2.36 (Martin)
Sei $T \neq \emptyset$ gestutzter Baum auf A, $X \subseteq [T]$ Borel. Dann ist X determiniert.

Zum Beweis siehe [Kec95] Satz 20.5.

Satz 2.37 (Gale, Stewart(1953))
[AC] Es gibt eine nicht determinierte Menge.

BEW: Wir können eine Strategie für I als Funktion von $\sigma : \omega^{<\omega} \to \omega$ auffassen[6]. Analog kann eine Strategie für II als Funktion $\tau : \omega^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \to \omega$ aufgefasst werden.
Es gibt nun aber eine natürliche Bijektion E zwischen $\omega^{<\omega}$ und $\omega^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ definiert durch $E(\emptyset) = (0), E((a_0)) = (a_0 + 1)$ und $E((a_0, ..., a_{n+1})) = (a_0, ..., a_{n+1})$. Man schickt also die leere Folge auf die Einerfolge 0, jede Einerfolge auf die Einerfolge bestehend aus dem Nachfolger, und jede Folge der Länge größer Eins

[6] siehe auch 2.7

bildet man identisch ab. Mit Hilfe von E können wir also jede Strategie als Funktion von $\omega^{<\omega}$ nach ω auffassen.
Nach 2.7 gibt es eine Bijektion zwischen $\omega^{<\omega}$ und ω, so daß wir Strategien als Abbildungen von ω nach ω auffassen können. Damit sind sie ein Element von ω^ω, also eine reelle Zahl.
Es gibt aber $2^{\aleph_0}$ reelle Zahlen, also gibt es auch genauso viele Strategien.
Sei nun also $(\sigma_\alpha \mid \alpha < 2^{\aleph_0})$ eine Aufzählung der Strategien von I, und analog sei $(\tau_\alpha \mid \alpha < 2^{\aleph_0})$ eine Aufzählung der Strategien von II.
Wähle nun für $\alpha < 2^{\aleph_0}$ mittels verschachtelter Rekursion ein a_α und ein b_α aus den reellen Zahlen wie folgt.
Für $\alpha = 0$ wähle eine beliebige reelle Zahl y und setze $b_0 := \sigma_0 * y$. Dies bedeutet b_0 ist ein Spielverlauf gemäß der Strategie σ_0.
Seien nun für alle $\beta < \alpha$ die a_α und für alle $\beta \leq \alpha$ die b_α gewählt.
Wähle a_α derart, daß es ein $z \in \mathcal{N}$ gibt, so daß $a_\alpha = [z] * \tau_\alpha$ ist, aber auch $a_\alpha \notin \{b_\beta \mid \beta \leq \alpha\}$ gilt. Dies ist stets möglich, da die durch $i_\alpha((z_0, ...)) := [z] * \tau_\alpha$ definierte Funktion $i_\alpha : \omega^\omega \to \omega^\omega$ injektiv ist.
i_α ist offenbar injektiv, da $i_\alpha((z_0, ...)) = (z_0, y_0, z_1, ...)$ ist, wobei y_i die Züge von II gemäß τ_α sind.
Sei also $z \neq \tilde{z}$ und $\min\{n \mid z_n \neq \tilde{z}_n\} = m$.
Das Minimum existiert, da die beiden ungleich sind.
Dann ist $i_\alpha(z)_{2m} = z_m \neq \tilde{z}_m = i_\alpha(\tilde{z})$.
Somit ist also $|\{z * \tau_\alpha \mid z \in \mathcal{N}\}| = 2^{\aleph_0}$.
Aber die Kardinalität der Menge $\{b_\beta \mid \beta \leq \alpha\}$ ist höchstens abzählbar. Insgesamt wählen wir also im Schritt α einen Spielverlauf, dem keiner der bislang gewählten Spielverläufe gemäß einer Strategie für I entspricht.
Analog wählen wir die b_α, so daß es ein $y \in \mathcal{N}$ gibt, so daß $b_\alpha = \sigma_\alpha * [y]$ ist, aber auch $b_\alpha \notin \{a_\beta \mid \beta < \alpha\}$ gilt. Auch dies ist aus denselben Gründen möglich.
Wir wählen also ebenfalls Spielverläufe gemäß σ_α, die aber keinem der bislang gewählten Spielverläufe einer Strategie für II entsprechen.
Nach Konstruktion sind also die Mengen $A := \{a_\alpha \mid \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ und $B := \{b_\alpha \mid \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ disjunkt. Die Behauptung ist nun, daß $\mathcal{G}(A)$ nicht determiniert ist. Dies beweisen wir mittels Fallunterscheidung.

Fall1) Angenommen I besitzt eine GST σ.
Dann entspricht diese einem σ_γ, da dort alle Strategien aufgezählt wurden.
Da σ GST ist, gilt für alle $z \in \mathcal{N}$, daß $\sigma * [z] \in A = \{a_\alpha \mid \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ ist.
Betrachte nun b_γ, welches nach Definition für ein bestimmtes $y \in \mathcal{N}$ dem Spielverlauf $\sigma_\alpha * [y]$ entspricht. II spiele dieses y.
Damit folgt $\sigma_\gamma * [y] = \sigma * [y] \in A$, da σ eine GST ist, und da $\sigma_\gamma * [y] = b_\gamma \in B$ nach Konstruktion von B gilt.
Insgesamt folgt $\sigma_\gamma * [y] \in A \cap B = \emptyset$.
Widerspruch

Fall2) Angenommen II besitzt eine GST $\tau = \tau_\gamma$.
Dies führt man analog zum Widerspruch, indem I das y spielt, welches zur Wahl von a_γ führte.

□

2.6 Über [AD]

Der interessierte Leser sei auch auf Kapitel 6 von [Kan94] verwiesen, welches einen weitaus ausführlicheren Überblick gewährt.

Definition 2.38
Unter $[AD]$ *verstehen wir folgendes Axiom,* ***Determiniertheitsaxiom*** *genannt:*
$[AD]$ *Für alle* $X \subseteq \mathcal{N}$ *gilt* $\mathrm{Det}(X)$.

In Worten ausgedrückt bedeutet dies, daß jede Teilmenge der reellen Zahlen determiniert ist. Also besitzt im zugehörigen Spiel mit dieser Menge als Gewinnmenge einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie.
Das Determiniertheitsaxiom impliziert aber auch eine begrenzte Auswahl[7].
Eine weitere Konsequenz von [AD], die nun stark der "normalen" mathematischen Intuition widerspricht, ist die Tatsache, daß [AD] die Existenz vieler Surjektionen sichert[8].
Dieser später noch zu beweisende Satz sagt aus, daß es möglich ist, unter [AD] und der Voraussetzung, daß es eine Surjektion von den reellen Zahlen auf eine Ordinalzahl α gibt, eine Surjektion von den reellen Zahlen auf die Potenzmenge von α zu konstruieren. Dies bedeutet aber auch, daß Surjektionen nicht mehr unserer natürlichen Vorstellung von Größe entsprechen, denn es gibt Surjektionen von "kleinen" Mengen in "große" Mengen.
Während Cantors berühmtes Diagonalargument nun weiterhin auch in [AD] sicherstellt, daß es keine Bijektion zwischen einer Menge und ihrer Potenzmenge gibt, folgt ebenfalls, daß es unter [AD] nur wenige Injektionen gibt[9].
Insgesamt ist der Begriff Kardinalität unter [AD] schwierig.
Wir wollen uns zunächst einmal mit der Frage beschäftigen, wieviel Auswahl wir unter [AD] erwarten können.
Dazu definieren wir im folgenden unterschiedlich starke Auswahlaxiome.

Definition 2.39
Sei S *eine Familie von Mengen.*
Dann heißt f ***Auswahlfunktion für*** S, *falls* $\forall X \in S \; f(X) \in X$ *gilt.*

Definition 2.40

1. *Unter* $[AC_\omega(\mathcal{N})]$ *verstehen wir das Axiom:*
   "Jede abzählbare Familie nichtleerer Teilmengen der reellen Zahlen besitzt eine Auswahlfunktion."
2. *Unter* $[DC]$ *verstehen wir das Axiom:*
   "Jede nichtleere Menge erlaubt es sukzessiv ω*-viele Elemente auszuwählen, wobei die Auswahl jedoch vom vorher Gewählten abhängt."*
3. *Unter* $[AC]$ *verstehen wir das Axiom, welches wir* ***volles Auswahlaxiom*** *bezeichnen wollen:*
   "Jede Familie nichtleerer Teilmengen besitzt eine Auswahlfunktion."

[7]siehe 2.41
[8]siehe auch Satz 2.88
[9]siehe Satz 3.38

Als triviale Konsequenz aus 2.37 kann das volle Auswahlaxiom nicht unter [AD] gelten. Es zeigt sich aber, daß man zumindest eine sehr schwache Form von Auswahl auch unter [AD] erhält.

Satz 2.41 (Swierczkowki, Mycielski, Scott(1964))
$[AD]$ *impliziert* $[AC_\omega(\mathcal{N})]$.

BEW: Sei $\{Z_n \mid n \in \omega\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{N} \setminus \emptyset)$.
Betrachte das Ergebnis x eines Spielverlaufs. Definiere das Komplement $A \subseteq \mathcal{N}$ der späteren Gewinnmenge durch $x \in A \leftrightarrow e = x_{II} \in Z_{a(0)=x(0)}$.
Da $Z_{a(0)} \neq \emptyset$ ist, kann I offenbar keine Strategie in $G(\mathcal{N} \setminus A)$ haben.
Also hat II nach [AD] eine GST τ.
Dann ist aber $f : \omega \to \mathcal{N}$ definiert durch $f(n) := (\langle n, 0, 0, 0, ...\rangle * \tau)_{II}$ eine Auswahlfunktion wie gefordert.

$\square$

Es folgt ein erstes Ergebnis dieser beschränkten Auswahl, welches wir später in Zusammenhang mit dem Solovayobjekt benutzen wollen.

Proposition 2.42
$[AC_{\aleph_0}(\mathcal{N})]$ *Jede unendliche Menge* A *besitzt eine abzählbar unendliche Teilmenge* B.

BEW: Definiere für $n \in \omega$ $X_n := \{a \subseteq A \mid \mathrm{card}(a) = n + 1\}$.
Unsere begrenzte Auswahl sichert uns nun aber eine Auswahlfunktion f zu.
Setze $B := \bigcup_{n \in \omega} f(X_n)$.
Offenbar ist B als abzählbare Vereinigung endlicher Mengen höchstens abzählbar und mindestens abzählbar, da beliebig große endliche Mengen vereinigt wurden. Also ist B wie gewünscht.

$\square$

Eine weitere Implikation über die Auswahl, welche uns [AD] zur Verfügung stellt, und welche auch in unserem Zusammenhang von Interesse sein wird, ist von Kechris.

Satz 2.43 (Kechris(1984))
$[AD]$ *Sei* $\mathbb{V} = \mathbb{L}(\mathbb{R})$. *Dann gilt* $[DC]$.

[DC] impliziert und ist sogar äquivalent zur Wohlfundiertheit, welche besagt, daß es keine abzählbaren, echt absteigenden Ketten gibt. Der Beweis dieser Aussage kann in [Kec84] in dem Artikel von Kechris "The Axiom of Determinacy implies dependent choices in $\mathbb{L}(\mathbb{R})$" nachgelesen werden.

Für eine genauere Analyse des Folgenden und die Definitionen der Begriffe sei auf [Kec95], Kapitel 21, verwiesen.
Mit Hilfe des Determiniertheitsaxioms lassen sich dann "schöne" Eigenschaften

für Teilmengen der reellen Zahlen zeigen, zum Beispiel die sogenannten Regularitätseigenschaften. Zu diesen Regularitätseigenschaften zählen die Baire-Eigenschaft [BP], die Perfekte-Mengen-Eigenschaft [PSP] und die Lebesgue-Meßbarkeit [LM].
Mit Hilfe speziell für je eine der oben erwähnten Regularitätseigenschaften konstruierter Spiele gelang es 1964 Banach-Mazur für die BP, Davis für die PSP und Swierczkowski sowie Mycielski für die LM zu zeigen, daß [AD] die entsprechende Eigenschaft für jede Menge impliziert. Mit Hilfe von Solovays Entfaltungs-Idee, welche grob gesprochen bedeutet, daß in einem Spiel[10] einer der beiden Spieler zusätzliche Elemente spielt, gelang es Anfang der 70er, weitere Resultate zu erhalten.

Satz 2.44 (Kechris, Martin)
$[AC_\omega(\mathcal{N})]\mathrm{Det}(\Pi^1_n)$ *impliziert,* Σ^1_{n+1}*-Mengen haben PSP,BP,LM.*

Definition 2.45
Seien $A, B \subseteq \mathcal{N}$. *Das* ***Wadge-Spiel mit Regeln*** $\mathcal{G}^{\mathrm{Wadge}}(A, B)$ *ist definiert durch:*
Spieler I spielt ein $a \in \mathcal{N}$, *II ein* $e \in \mathcal{N}$ *und die einzige Regel lautet:*
R1) I gewinnt genau dann, wenn $(a \in A \leftrightarrow e \in B)$ *wahr ist.*

Definition 2.46

1. $A \leq_L B :\leftrightarrow \exists f\ f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ *Lipschitz-stetig* $\wedge A = f^{-1}[B]$
2. $A \leq_W B :\leftrightarrow \exists f\ f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ *stetig* $\wedge A = f^{-1}[B]$

Proposition 2.47 (Wadge (1972))
[AD] Für alle Teilmengen A, B *der reellen Zahlen gilt entweder* $A \leq_L \neg B$ *oder* $B \leq_L A$.

BEW: Aus [AD] folgt, daß ein Spieler eine GST in $\mathcal{G}^{\mathrm{Wadge}}(A, B)$ hat.

Fall1) I hat GST σ.
Dann gilt $\forall e\ e \in B \leftrightarrow \sigma * [e] \in A$. Damit ist $B = \sigma^{-1}[A]$. Also ist $B \leq_L A$.

Fall2) II hat GST τ.
Dann gilt $\forall a\ a \in A \leftrightarrow [a] * \tau \notin B$. Und somit ist $A = \tau^{-1}[\neg B]$. Und es folgt $A \leq_L \neg B$.

□

[10] wie zum Beispiel in einem der obigen von Davis, Banach-Mazur oder Swierczkowski-Mycielski

Proposition 2.48
[AD] Eine Fettdruckpunktklasse Γ hat genau dann universelle Mengen, wenn Γ nicht abgeschlossen unter Komplementen ist.

BEW:

"$\Rightarrow$" Sei U universell für Γ.
Dann gilt mit 2.16, daß $\{x \mid \neg U(x,x)\} \notin \Gamma \wedge \{x \mid U(x,x)\} \in \Gamma$ ist.

"$\Leftarrow$" Sei $A \in \Gamma, \neg A \notin \Gamma, B \in \Gamma$.
Dann ist $B \leq_L A$ oder $A \leq_L \neg B$.

Fall1) Angenommen es wäre $A \leq_L \neg B$.
Dann wäre auch $\neg A \leq_L B$ und somit wäre wegen des Abschlusses unter stetigen Urbildern $\neg A \in \Gamma$. Widerspruch

Fall2) Sei $B \leq_L A$.
Definiere $C := \{(x, \sigma) \mid \sigma * [x] \in A\}$.
Damit ist $C \in \Gamma$ als stetiges Urbild von A unter σ.
Und somit folgt $\forall D \in \Gamma\ \exists \sigma\ D = C_\sigma$, da $x \in D \leftrightarrow \sigma * [x] \in A \leftrightarrow (x, \sigma) \in C \leftrightarrow x \in C_\sigma$ gilt.

$\square$

2.7 Über Filter

Definition 2.49
Sei X eine Menge.

1. *Ein* ***Präfilter über*** *X, geschrieben $\mathcal{F}_X$, ist eine Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften:*

   F1) $\emptyset \notin \mathcal{F}_X$

   F2) $A \in \mathcal{F}_X \wedge A \subseteq B \rightarrow B \in \mathcal{F}_X$

   F3) $A, B \in \mathcal{F}_X \rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}_X$

2. *Ein* ***Filter*** *ist ein Präfilter mit:*

   F4) $X \in \mathcal{F}_X$

3. *Ein* ***Hauptfilter*** *oder* ***prinzipaler Filter*** *ist ein Präfilter mit:*

   H4) $\bigcap \mathcal{F}_X \in \mathcal{F}_X$

4. *Ein* ***Ultrafilter (UF)*** *ist ein Präfilter mit:*

   U4) $A \notin \mathcal{F}_X \rightarrow \neg A \in \mathcal{F}_X$

5. *Wir nennen einen Filter* ***echt****, falls er kein Hauptfilter ist.*

6. *Wir nennen einen Filter* ***κ-vollständig****, falls*
   $\kappa \in \mathrm{Card} \wedge \forall \gamma < \kappa \ \{A_i \mid i \in \gamma\} \subseteq \mathcal{F}_X \rightarrow \bigcap_{i \in \gamma} A_i \in \mathcal{F}_X$ *gilt.*

Für einen Filter $\mathcal{F}_X$ definiere ferner:

7. $\tilde{\mathcal{F}}_X := \{Y \subseteq X \mid X \setminus Y \in \mathcal{F}_X\}$

8. $\mathcal{F}_X^+ := \neg \tilde{\mathcal{F}}_X$

Wenn wir uns einen Filter auf einer Menge als eine Art Größenmesser für Teilmengen vorstellen, und wir ferner annehmen, daß wir unsere Größen von 0 für "kleine" Mengen bis 1 für "große" Mengen messen, dann sind Filtermengen genau die großen Mengen.
Außerdem definieren wir auch die kleinen Mengen, nämlich Elemente von $\tilde{\mathcal{F}}$ und die nicht kleinen Mengen, welche nicht notwendigerweise groß sind. Beachte, daß $\tilde{\mathcal{F}}$ im allgemeinen nicht $\neg\mathcal{F}$ entspricht, welches formal die nicht großen Mengen wären.
Die nicht kleinen Mengen haben eine Größe im Intervall $(0, 1]$ und sind genau die Elemente von $\mathcal{F}^+$.
Ein Ultrafilter entspricht demnach einem zweiwertigen Maß, welches die Mengen in große, solche vom Maß 1, und kleine, mit Maß 0 einteilt. Im Ultrafilterfall ist die Bezeichnung nicht klein äquivalent zu groß. Den Begriff Hauptfilter werden wir im folgenden nicht mehr benötigen.

Proposition 2.50
Ultrafilter und Hauptfilter sind Filter.

Proposition 2.51
Der club-Filter $\mathcal{F}_\kappa^{\text{club}}$ ist ein Filter.

Lemma 2.52
Sei $\mathcal{U}$ UF auf I, $\pi : I \to J$ Abbildung.
Dann ist $\pi_*(\mathcal{U}) := \{X \subseteq J \mid \pi^{-1}[X] \in \mathcal{U}\}$ ein UF auf J.
*Wir nennen ihn den **Bildultrafilter**.*

BEW:

F1) Da $\pi^{-1}[\emptyset] = \emptyset \notin \mathcal{U}$ ist, folgt, daß $\emptyset \notin \pi_*(\mathcal{U})$ ist.

F2) Sei $X \in \pi_*(\mathcal{U})$ und sei $X \subseteq Y$.
Dann ist $\pi^{-1}[Y] \supseteq \pi^{-1}[X] \wedge \pi^{-1}(X) \in \mathcal{U}$. Also ist $\pi^{-1}[Y] \in \mathcal{U}$. Und somit $Y \in \pi_*(\mathcal{U})$.

F3) Seien $X, Y \in \pi_*(\mathcal{U})$.
Dann gilt $\pi^{-1}[X] \in \mathcal{U} \wedge \pi^{-1}[Y] \in \mathcal{U}$.
Also gilt auch $\pi^{-1}[X] \cap \pi^{-1}[Y] = \pi^{-1}[X \cap Y] \in \mathcal{U}$.
Schließlich folgt $X \cap Y \in \pi_*(\mathcal{U})$.

U4) Sei $X \notin \pi_*(\mathcal{U})$.
Dann ist $\pi^{-1}[X] \notin \mathcal{U}$, und daher ist $I \setminus \pi^{-1}[X] \in \mathcal{U}$.
Es folgt $\pi^{-1}[J] \setminus \pi^{-1}[X] = \pi^{-1}[J \setminus X] \in \mathcal{U}$.
Ferner gilt daher $J \setminus X \in \pi_*(\mathcal{U})$.

□

Sofern der UF κ-vollständig ist, ist es auch der Bildultrafilter, der diese Eigenschaft erbt. Der Beweis dazu ist eine einfache Verallgemeinerung von F2).
Falls jedoch der UF echt ist, so erbt der Bildultrafilter diese Eigenschaft nicht zwangsläufig. Ein triviales Gegenbeispiel bietet die konstante Abbildung.

Definition 2.53
*Sei $k \in \omega$. Ein k-**Chamäleon** ist eine Abbildung π, Färbung genannt,*
$\pi : [\omega]^{\aleph_0} \to k$ mit folgender Eigenschaft:
$\forall X \in [\omega]^{\aleph_0}\ \forall n \in X\ \pi(X) \neq \pi(X \setminus \{n\})$

Wir wollen diese Eigenschaft so interpretieren, daß, wann immer eine abzählbare Menge um ein Element wächst oder schrumpft, sich ihre Farbe, das heißt der Wert unter π, ändert. Daher kommt der Name Chamäleon.

Proposition 2.54
Sei $\mathcal{U}$ ein echter UF, X ein Element des UF und E eine Menge endlicher Kardinalität.
Dann ist auch $X \setminus E$ ein Element des UF.

BEW: Angenommen $X \setminus E \notin \mathcal{U}$.
Dann folgt aber $\omega \setminus (X \setminus E) \in \mathcal{U}$.
Somit wäre $\omega \setminus X \cup E \in \mathcal{U}$.

Also wäre $X \cap (\omega \setminus X \cup E) \in \mathcal{U}$.
Daher wäre auch $X \cap E \in \mathcal{U}$.
Damit folgt $\neg \forall e \in E \cap X \ \omega \setminus \{e\} \in \mathcal{U}$.
Also gilt $\exists e \ \{e\} \in \mathcal{U}$.
Damit wäre aber $\mathcal{U}$ nicht echt.
Widerspruch

$\square$

Diese kleine Proposition ist nützlich, da sie besagt, daß endliche Mengen für die Frage der Größe irrelevant sind. Die Bedingung der Echtheit wird natürlich benötigt, da bei einem von einem Element erzeugten Ultrafilter jedes Element des Ultrafilters nicht mehr im Ultrafilter ist, sobald man den Erzeuger entfernt.

Korollar 2.55
Sei $\mathcal{U}$ ein echter UF, X ein Element des Ultrafilters.
Dann ist $\mathrm{card}(X) \geq \aleph_0$.

BEW: Angenommen es gäbe ein $X \in \mathcal{U}$ mit endlicher Kardinalität.
Dann ist nach 2.54 $X \setminus X = \emptyset \in \mathcal{U}$ im Widerspruch zu F1).

$\square$

Dies ist anschaulich auch ganz klar, wenn man an einfache Erkenntnisse aus der Maßtheorie denkt. Endliche Mengen sind in unserem Fall sogenannte Nullmengen und diese ändern am Maß nichts.

Proposition 2.56
Sei $\mathcal{U}$ echter UF auf ω.
Dann existiert für alle $k \geq 2$ ein k-Chamäleon π.

BEW: Sei $k \geq 2$ fest, $X \subseteq \omega$ unendlich.
Zähle X aufsteigend auf, also $X = \{x_0, x_1, ...\}$.
Setze $s_0 := [0, x_0]; s_{i+1} := (x_i, x_{i+1}]$.
Für $0 \leq j < k$ definiere $X_j^k := \bigcup_{n \in \omega} s_{kn+j}$.
Dann ist aber $\omega = \dot{\bigcup}_{0 \leq j < k} X_j^k$.
Da $\mathcal{U}$ ein UF ist, ist genau eines der $X_j^k \in \mathcal{U}$.
Definiere $\pi_k^{\mathcal{U}}(X) = j :\leftrightarrow X_j^k \in \mathcal{U}$.

HILFSPROPOSITION: Das so definierte $\pi_k^{\mathcal{U}}$ ist ein k-Chamäleon.
BEW: Dazu muß gezeigt werden, daß für beliebiges $x \in X$ $\pi_k^{\mathcal{U}}(X) \neq \pi_k^{\mathcal{U}}(X \setminus \{x\})$ gilt.
Sei also $x \in X$ beliebig und $x = x_p$ in der Aufzählung von X.
Definiere $\tilde{X} := X \setminus \{x_p\}$.
Offenbar ist die Aufzählung von $\tilde{X}$ gleich $\{x_0, ..., x_{p-1}, x_{p+1}, x_{p+2}, ...\}$. Dann mögen die $\tilde{s}_i, \tilde{X}_j^k$ für $\tilde{X}$ analog zur Definition der s_i, X_j^k für X definiert sein. Wie man sich leicht überlegt, gilt also
$\tilde{s}_0 = s_0, ..., \tilde{s}_{p-1} = s_{p-1}, \tilde{s}_p = s_p \cup s_{p+1}, \tilde{s}_{p+1} = s_{p+2}, ...$
Mittels Fallunterscheidung erhält man:

Fall1) Sei $\pi_k^{\mathcal{U}} = j \neq 0$.
Dann ist $X_j^k = \bigcup_{n\in\omega} s_{kn+j} \in \mathcal{U}$ und da jedes Intervall nur endlich viele Elemente enthalten kann, ist wegen Proposition 2.54 auch
$\bigcup_{n>\frac{p+1-j}{k}} s_{kn+j} \in \mathcal{U}$, das heißt wir betrachten nur noch die Vereinigung der Intervalle, die sich echt über x_{p+1} befinden.
Es ist $\bigcup_{n>\frac{p+1-j}{k}} s_{kn+j} = \bigcup_{n>\frac{p+1-j}{k}} \tilde{s}_{kn+j-1}$.
Also gilt $\bigcup_{n>\frac{p+1-j}{k}} \tilde{s}_{kn+j-1} \in \mathcal{U}$.
Wegen F2) ist daher $\bigcup_{n\in\omega} \tilde{s}_{kn+j-1} = \tilde{X}_{j-1}^k \in \mathcal{U}$.
Damit gilt $\pi_k^{\mathcal{U}}(\tilde{X}) = j-1 \neq j = \pi_k^{\mathcal{U}}(X)$.

Fall2) Sei $\pi_k^{\mathcal{U}} = 0$.
Man erhält nun analog zu Fall1), daß
$\bigcup_{n>\frac{p+1}{k}} s_{kn} = \bigcup_{n>\frac{p+1}{k}} \tilde{s}_{kn-1} = \bigcup_{n>\frac{p+1}{k}} \tilde{s}_{(k-1)n+k-1}$ gilt.
Weiterhin folgt ganz analog, daß $\tilde{X}_{k-1}^k \in \mathcal{U}$ ist.
Also ist $\pi_k^{\mathcal{U}}(\tilde{X}) = k-1 \neq 0 = \pi_k^{\mathcal{U}}(X)$.

■

Dies war aber genau zu zeigen.

□

Proposition 2.57
[*AD*] *Es gibt kein 2-Chamäleon.*

BEW: Angenommen π ist ein 2-Chamäleon.
Betrachte folgendes Spiel mit Regeln $\mathcal{G}^{\mathrm{Cha}}(\pi)$:
R1) $\forall i\ a(i) < e(i) < a(i+1)$
R2) I gewinnt $:\leftrightarrow \pi(a) = \pi(e)$
Nach [AD] ist $\mathcal{G}^{\mathrm{Cha}}(\pi)$ determiniert.

Fall1) Angenommen I hat GST σ.
Betrachte die folgenden zwei Spiele gemäß σ:

σ $\quad a_1(0) \quad a_1(1) \quad a_1(2)...$
Spiel1
$II \quad e_1(0) := a_1(0)+1 \quad \boxed{a_2(1)} \quad \boxed{a_2(2)}$ ...

σ $\quad a_2(0) = a_1(0) \quad a_2(1) \quad a_2(2)...$
Spiel2
$II \quad \boxed{a_1(1)} \quad \boxed{a_1(2)} \quad \boxed{a_1(3)}$ ...

Wir wollen die von I im i-ten Spiel gespielte Menge $\{a_i(n) \mid n \in \omega\}$ mit $\vec{A_i}$ bezeichnen.
Analog bezeichnen wir die von II gespielte Menge mit $\vec{E_i}$.
Definiere $\vec{C} := \{a_1(1), a_1(2), ...\}$.
Es folgt nun $\vec{A_1} = \{a_1(0)\} \cup \vec{E_2}$. Somit ist $\pi(\vec{A_1}) \neq \pi(\vec{E_2})$.
Es gilt $\vec{E_1} = \vec{C} \cup \{a_1(0)+1\}$ und $\vec{A_2} = \vec{C} \cup \{a_1(0)\}$.

Somit gilt $\pi(\vec{E_1}) \neq \pi(\vec{C})$ und $\pi(\vec{A_2}) \neq \pi(\vec{C})$.
Also ist $\pi(\vec{E_1}) = \pi(\vec{A_2})$.
Da σ GST ist, gilt ferner $\pi(\vec{A_1}) = \pi(\vec{E_1})$ und $\pi(\vec{A_2}) = \pi(\vec{E_2})$.
Alles zusammen ergibt $\pi(\vec{A_1}) = \pi(\vec{E_1}) = \pi(\vec{A_2}) = \pi(\vec{E_2})$. Widerspruch

Fall2) Angenommen II hat GST τ.
Betrachte analog zu Fall1) die folgenden zwei Spiele gemäß τ:

$I \quad a_1(0) := 0 \quad \boxed{e_2(0)}$ ...
Spiel1
$\tau \quad e_1(0) \quad e_1(1)$...

$I \quad \boxed{e_1(0)} \quad \boxed{e_1(1)}$ ...
Spiel2
$\tau \quad e_2(0) \quad e_2(1)$...

Definiere $\vec{A_i}$ und $\vec{E_i}$ analog zu Fall1).
Da τ GST ist, gilt $\pi(\vec{A_1}) \neq \pi(\vec{E_1})$ und $\pi(\vec{A_2}) \neq \pi(\vec{E_2})$.
Insgesamt folgt:
$\pi(\vec{A_1}) \neq \pi(\vec{E_1}) = \pi(\vec{A_2}) \neq \pi(\vec{E_2})$.
Also ist $\pi(\vec{A_1}) = \pi(\vec{E_2})$, da $k = 2$ ist. Aber $\vec{A_1} = \vec{E_2} \cup \{0\}$. Also ist $\pi(\vec{A_1}) \neq \pi(\vec{E_2})$. Widerspruch

Daß beide Fälle einen Widerspruch ergeben, steht aber im Widerspruch zu unserer Prämisse, daß [AD] gilt. Also muß die Annahme der Existenz eines 2-Chamäleons falsch gewesen sein.

$\square$

Korollar 2.58
$[AD]$

1. *Es gibt keinen echten UF $\mathcal{U}$ über ω.*
2. *Jeder UF $\mathcal{U}$ über X ist ω_1-vollständig.*

BEW:

1. Ist eine Folgerung aus den beiden vorhergehenden Propositionen.

2. Angenommen es gäbe einen nicht abzählbar vollständigen Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf X.
   Dann existieren $\tilde{X}_0, \tilde{X}_1, ... \in \mathcal{U}$ mit $\bigcap_{i\in\omega} \tilde{X}_i \notin \mathcal{U}$.
   Das heißt, es gibt $\tilde{X}_0, ... \in \mathcal{U}$, so daß $\neg \bigcap_{i\in\omega} \tilde{X}_i \in \mathcal{U}$ gilt.
   Daher existieren $\tilde{X}_0, ... \in \mathcal{U}$ mit $\bigcup_{i\in\omega} \neg\tilde{X}_i \in \mathcal{U}$.
   Somit gibt es $\neg\tilde{X}_0, ... \notin \mathcal{U}$ mit $\bigcup_{i\in\omega} \neg\tilde{X}_i \in \mathcal{U}$.
   Definiere nun rekursiv: $X_0 := \neg\tilde{X}_0$

$X_{i+1} := \neg\tilde{X}_{i+1} \setminus (\neg\tilde{X}_{i+1} \cap \bigcup_{j\leq i} X_j)$
Also existieren abzählbar viele $X_i \notin \mathcal{U}$, welche eine Partition von $\mathcal{U}$ bilden.
Definiere nun $\mathcal{U}_* := \{A \subseteq \omega \mid \bigcup_{n\in A} X_n \in \mathcal{U}\}$.

HILFSPROPOSITION: $\mathcal{U}_*$ ist ein echter UF auf ω.
BEW: Definiere eine Abbildung $\pi : X \to \omega$ durch $x \mapsto i :\leftrightarrow x \in X_i$.
Mit dieser Definition ist $\mathcal{U}_*$ aber nichts anderes als der Bildultrafilter $\pi_*(\mathcal{U})$.
Also folgen nach 2.52 alle Ultrafiltereigenschaften.
Die Echtheit folgt ebenfalls unmittelbar, denn wäre $\mathcal{U}_*$ nicht echt, dann gäbe es einen einzelnen Erzeuger $n \in \omega$. Damit wäre nach Definition von $\mathcal{U}_*$ aber $X_n \in \mathcal{U}$. Widerspruch zur Konstruktion der X_i

$\blacksquare$

Insgesamt erhalten wir einen Widerspruch zum ersten Teil.

$\square$

2.8 Über HOD

Es wird hier dargestellt, daß das innere Modell HOD stets ein Modell von ZFC sein wird. Es sei dazu auf [Bur96], Kapitel 24, verwiesen.

Lemma 2.59
Für jedes X existiert eine transitive Obermenge Y.

BEW: Der Beweis erfolgt durch Konstruktion von $\mathrm{TC}(X)$.
Setze rekursiv
$X_0 := X$
$X_{n+1} := \bigcap X_n$
$Y := \bigcup_{n=0}^{\omega} X_n$
Nach Konstruktion ist Y transitiv und sogar die kleinste transitive Obermenge. $\square$

Die Klasse ON der **Ordinalzahlen** enthält die transitiven Mengen x, für die die Einschränkung der $\in$-Relation auf x eine strikte lineare Ordnung ist.

Definition 2.60

1. *x heißt **definierbar**, falls es eine Formel $\phi(v_0, ..., v_n)$ und $y_1, ..., y_n \in \mathbb{V}$ gibt, so daß $\forall v_0\ v_0 = x \leftrightarrow \phi(v_0, y_1, ..., y_n)$ gilt.*
2. *x heißt **ordinalzahl-definierbar**, falls es eine Formel $\phi(v_0, ..., v_n)$ und $y_1, ..., y_n \in \mathrm{ON}$ gibt, so daß $\forall v_0\ v_0 = x \leftrightarrow \phi(v_0, y_1, ..., y_n)$ gilt.*

Beachte, daß die beiden obigen Definitionen so nicht in ZF möglich sind, da ZF nicht über deren Gültigkeit entscheiden kann. Deshalb können wir nicht einfach OD als die **Klasse der ordinalzahl-definierbaren Mengen** definieren. Dazu müssen wir erst einen Klassenterm definieren, der genau dies besagt. Dies ist aber möglich und wird z.B. in [Bur96] Definition 24.2 vorgeführt.
Die Ordinalzahlen sind in OD enthalten, da für jedes $\zeta \in \mathrm{ON}$ die Formel $\phi_\zeta(y_0, \zeta) :\equiv y_0 = \zeta$ dies bezeugt.
Falls $x \in \mathrm{OD}$, dann gilt:
Es existieren eine Formel $\phi(v_0, v_1, v_2, v_3)$ und $\Xi \in \mathrm{ON}, i \in \omega, \alpha < \Xi$, so daß für alle v_0 $v_0 = x \leftrightarrow \phi(v_0, \Xi, i, \alpha)$ gilt.
Wir sagen (Ξ, i, α) ist eine **Definition von** x.

Definition 2.61
$\mathrm{HOD} := \{x \mid \mathrm{TC}(\{x\}) \subseteq \mathrm{OD}\}$
*ist die **Klasse der erblich ordinalzahl-definierbaren Mengen**.*

Das heißt, daß in HOD diejenigen x enthalten sind, welche ordinalzahl-definierbar sind, und deren Elemente wieder <u>erblich</u> ordinalzahl-definierbar sind.
Ferner ist $\mathrm{HOD} \subseteq \mathrm{OD}$, da $x \in \mathrm{TC}(\{x\})$ ist.
Außerdem ist OD definierbar abgeschlossen.
OD läßt sich kanonisch wohlordnen.

Wir wollen diese Wohlordnung mit $<_{\mathrm{OD}}$ bezeichnen.
Wir sagen $x <_{\mathrm{OD}} y$, falls die kleinste Stufe, auf der x definierbar ist, kleiner ist als die kleinste Stufe, auf der y definierbar ist. Falls diese gleich sind, ist $x <_{\mathrm{OD}} y$, falls die kleinste Gödelnummer einer Definition von x kleiner ist als die kleinste Gödelnummer einer Definition von y.
HOD erbt diese Wohlordnung.

Satz 2.62
HOD $\models$ *ZF*

Der Beweis findet sich zum Beispiel in [Bur96] Satz 24.8.

Satz 2.63
HOD $\models$ $[AC]$

Der Beweis findet sich zum Beispiel in [Bur96] Satz 24.9.
Es gilt also in HOD das Auswahlaxiom. Diese wichtige Tatsache werden wir ausnutzen, um später den Satz von Łoš anwenden zu können, der uns dann die gewünschte elementare Einbettung liefert.

2.9 Über $\mathbb{V} = \mathbb{L}(\mathbb{R})$

Wichtigster Punkt an dieser Stelle wird die Erkenntnis sein, daß die konstruktible Hierarchie und die Jensen-Hierarchie eng miteinander verknüpft sind. Genaueres findet man in [Dev84], Kapitel IV-4, und in [Jec97], Kapitel 12.
Aufgrund dieses engen Zusammenhanges können und werden wir im folgenden bei unseren Betrachtungen über die konstruktible Hierarchie reden, da diese im allgemeinen gebräuchlicher ist, werden aber die Jensen-Hierarchie benutzen. Wir wollen an dieser Stelle einen kurzen Abriß geben.
Das Aussonderungsschema sagt uns, daß zu jeder Formel $\phi(x)$ und jeder Menge X die Menge $Y := \{u \in X \mid \phi(u)\}$ existiert. Es stellt sich heraus, daß für beschränkte Formeln eine stärkere Eigenschaft gilt:

Satz 2.64 (Satz über die Normalform)
Es existieren zehn Operatoren $\mathcal{T}_1, ..., \mathcal{T}_{10}$ mit der Eigenschaft, daß zu jeder beschränkten Formel $\phi(u_1, ..., u_n)$ ein Operator $\mathcal{T}$ existiert, so daß für alle Mengen $X_1, ..., X_n$ gilt $\mathcal{T}(X_1, ..., X_n) = \{(u_1, ..., u_n) \mid \forall 1 \leq i \leq n\ u_i \in X_i \wedge \phi(u_1, ..., u_n)\}$. Hierbei entsteht $\mathcal{T}$ durch Komposition der zehn Operatoren $\mathcal{T}_1, ..., \mathcal{T}_{10}$.

Wir bezeichnen diese zehn Operatoren als die **Gödel-Operatoren**, und sie lauten:

Definition 2.65
Seien X, Y Mengen.
$\mathcal{T}_1(X, Y) := \{X, Y\}$
$\mathcal{T}_2(X, Y) := X \times Y$
$\mathcal{T}_3(X, Y) := \{(u, v) \mid u \in X \wedge v \in Y \wedge u \in v\}$
$\mathcal{T}_4(X, Y) := X \setminus Y$
$\mathcal{T}_5(X, Y) := X \cap Y$
$\mathcal{T}_6(X) := \bigcup X$
$\mathcal{T}_7(X) := \mathrm{dom}(X)$
$\mathcal{T}_8(X) := \{(u, v) \mid (v, u) \in X\}$
$\mathcal{T}_9(X) := \{(u, v, w) \mid (u, w, v) \in X\}$
$\mathcal{T}_{10}(X) := \{(u, v, w) \mid (v, w, u) \in X\}$

Wir definieren als nächstes den Gödel-Abschluß einer Menge.

Definition 2.66
Sei X eine Menge.
$W_0 := X$
$W_{n+1} := W_n \cup \{\mathcal{T}_i(X, Y) \mid i \in 1, ..., 10 \wedge X \in W_n \wedge Y \in W_n\}$
$W := \bigcup_{n \in \omega} W_n$
*Wir nennen $\mathrm{cl}(X) := W$ den **Gödel-Abschluß** von X.*

Der Gödel-Abschluß entsteht also aus X durch alle möglichen endlichen Anwendungen der Gödel-Operatoren auf Elemente von X, und auf bereits durch frühere Anwendung der Gödel-Operatoren entstandene Elemente.

Die normale Mengenhierarchie entsteht durch die Anwendung des Potenzmengenaxioms.

Definition 2.67
$\mathbb{V}_0 := \emptyset$
$\mathbb{V}_{\alpha+1} := \mathcal{P}(\mathbb{V}_\alpha)$
Für eine Limesordinalzahl λ ist
$\mathbb{V}_\lambda := \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathbb{V}_\alpha$
$\mathbb{V} := \bigcup_{\alpha\in ON} \mathbb{V}_\alpha$

Gödel konstruierte nun ein inneres Modell $\mathbb{L}$, das die konstruktible Hierarchie genannt wird.

Definition 2.68
Sei X eine Menge.
*Dann sind die **aus X definierbaren Mengen** $\mathrm{Def}(X) := \mathrm{cl}(X \cup \{X\}) \cap \mathcal{P}(X)$.*

Definition 2.69
$\mathbb{L}_0 := \emptyset$
$\mathbb{L}_{\alpha+1} := \mathrm{Def}(\mathbb{L}_\alpha)$
Für eine Limesordinalzahl λ ist
$\mathbb{L}_\lambda := \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathbb{L}_\alpha$
$\mathbb{L} := \bigcup_{\alpha\in ON} \mathbb{L}_\alpha$

Das Konstruktibilitätsaxiom, im folgenden $\mathbb{V} = \mathbb{L}$ genannt, besagt, daß jede Menge konstruktibel ist, also ein Element von $\mathbb{L}$ ist.
Eine Stärke der konstruktibelen Hierarchie ist, daß sie ein Modell der ZFC-Axiome ist.
Daher können wir die Elemente von $\mathbb{L}$ mit Hilfe des Auswahlaxioms wohlordnen.
Wir wollen diese Wohlordnung mit $<_{\mathbb{L}}$ bezeichnen.
Jensen konstruierte nun mittels etwas anderer Operatoren auf ganz ähnliche Weise die Jensen-Hierarchie, die auf den ersten Blick stärker zu sein scheint.

Definition 2.70
*Wir nennen eine Funktion $f : \mathbb{V}^n \to \mathbb{V}$ **rudimentär**, geschrieben $\mathrm{rud}(f)$, genau dann, wenn f aus den unteren Schemata generiert wird:*
1) Für $1 \le i \le n$ ist $f(x_1, ..., x_n) = x_i$ rudimentär.
2) Für $1 \le i, j \le n$ ist $f(x_1, ..., x_n) = \{x_i, x_j\}$ rudimentär.
3) Für $1 \le i, j \le n$ ist $f(x_1, ..., x_n) = x_i \setminus x_j$ rudimentär.
4) Falls $h, g_1, ..., g_k$ rudimentäre Funktionen sind,
dann ist auch $f(x_1, ..., x_n) = h(g_1(x_1, ..., x_n), ..., g_k(x_1, ..., x_n))$ rudimentär.
5) Falls g rudimentär ist, dann ist auch $f(y, x_1, ..., x_{n-1}) = \bigcup_{z\in y} g(z, x_1, ..., x_{n-1})$ rudimentär.

Wir definieren nun analog den rudimentären Abschluß einer Menge X.

Definition 2.71
Sei X *eine Menge.*
$W_0^*(X) := X \cup \{X\}$
$W_{n+1}^*(X) := W_n^*(X) \cup$
$\{x \mid f : \mathbb{V}^n \to \mathbb{V}$ *rudimentär* $\wedge f(x_1, ..., x_n) = x \wedge \forall 1 \leq i \leq n \; x_i \in W_n^*(X)\}$
$W^*(X) := \bigcup_{n\in\omega} W_n^*(X)$
Der ***rudimentäre Abschluß von*** X *ist* $\mathrm{rud}(X) := W^*(X)$.

Wir können nun die Jensen-Hierarchie definieren.

Definition 2.72
$\mathbb{J}_0 := \emptyset$
$\mathbb{J}_{\alpha+1} := \mathrm{Rud}(\mathbb{J}_\alpha)$
Für eine Limesordinalzahl λ *ist*
$\mathbb{J}_\lambda := \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathbb{J}_\alpha$
$\mathbb{J} := \bigcup_{\alpha\in ON} \mathbb{J}_\alpha$
Wir nennen $\mathbb{J}$ *die* ***Jensen-Hierarchie****.*

Es stellte sich heraus, daß sich die konstruktible Hierarchie und die Jensen-Hierarchie -wenn überhaupt- nur auf den einzelnen Stufen unterscheiden, daß sie insgesamt betrachtet aber dieselben Mengen enthalten, das heißt $\mathbb{L} = \mathbb{J}$.
Es gilt nämlich, ohne daß dies hier bewiesen wird:

Proposition 2.73
1. *Für jede Ordinalzahl* α *gilt*
   $\mathbb{L}_\alpha \subseteq \mathbb{J}_\alpha \subseteq \mathbb{L}_{\omega\alpha}$.
2. $\mathbb{L}_\alpha = \mathbb{J}_\alpha$ *gilt genau dann, wenn* $\alpha = \omega\alpha$ *ist.*

Diese Proposition zeigt, daß die zunächst "stärker" aussehende Jensen-Hierarchie zwar auch im allgemeinen auf einer festen Stufe mehr Mengen enthält als die konstruktible, daß es aber immer wieder Stufen gibt, auf denen die konstruktible Hierarchie die Jensen-Hierarchie einholt und sich die beiden Hierarchien nicht unterscheiden.

Als nächstes müssen wir noch kurz ansprechen, was wir unter $\mathbb{L}(\mathbb{R})$, und -analog für die Jensen-Hierarchie- unter $\mathbb{J}(\mathbb{R})$ verstehen wollen. Dies bedeutet, daß wir die reellen Zahlen als Urelemente ansehen wollen, die bereits sehr "früh" in unserer Hierarchie vorhanden sind. Im allgemeinen sind sie bereits auf der ersten Stufe vorhanden, wobei ich aber der in [Jec97] auf Seite 131 gegebenen Definition folge, wo sie erst auf Stufe $\omega + 1$ vorliegen.

Definition 2.74
Seien A, X *Mengen.*
Dann definiere $\mathrm{Def}_A(X) := \mathrm{cl}(\mathrm{TC}(X) \cup \{\mathrm{TC}(X)\} \cup \{A \cap \mathrm{TC}(X)\}) \cap \mathcal{P}(\mathrm{TC}(X))$.

Definition 2.75
Wir können nun eine neue Hierarchie, die der ***über*** $\mathbb{R}$ ***konstruktiblen Mengen*** *definieren.*
$\mathbb{L}_0(\mathbb{R}) := \emptyset$
$\mathbb{L}_{\alpha+1}(\mathbb{R}) := \bigcup_{R \in \mathrm{TC}(\mathbb{R})} \mathrm{Def}_R(\mathbb{L}_\alpha(\mathbb{R}))$
Für Limesordinalzahlen β *setze*
$\mathbb{L}_\beta(\mathbb{R}) := \bigcup_{\alpha<\beta} \mathbb{L}_\alpha(\mathbb{R})$
$\mathbb{L}(\mathbb{R}) := \bigcup_{\alpha \in ON} \mathbb{L}_\alpha(\mathbb{R})$

Es sei bemerkt, daß $\mathbb{L}(\mathbb{R})$ nicht mehr notwendigerweise ein Modell von [AC] ist.
Es gilt aber weiterhin, daß wir ein Modell von ZF vorliegen haben.
Wir müssen noch kurz erklären, was wir unter $\mathbb{J}(\mathbb{R}; H)$ verstehen wollen.
Hierzu erweitern wir den Begriff der rudimentären Funktionen in Definition 2.70 um den Punkt:
6) Die Funktion $i(x) := x \cap H$ ist rudimentär.

Für die konstruktible Hierarchie $\mathbb{L}$ führen wir ein neues einstelliges Relationssymbol H ein, welches in der Bedeutung $H(x) :\leftrightarrow x \in H$ benutzt wird.

Wir kommen nun zu einer entscheidenden Eigenschaft von $\mathbb{V} = \mathbb{L}(\mathbb{R})$.

Proposition 2.76
$[\mathbb{V} = \mathbb{L}(\mathbb{R})]$ *Es gibt eine Surjektion von* $\omega \times \mathcal{N}^{<\omega} \times \mathrm{ON}^{<\omega}$ *auf* $\mathbb{L}(\mathbb{R})$.

BEW: Es ist $\mathbb{L} \subseteq \mathrm{OD}$, und daher ist auch $\mathbb{L}(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{OD}(\mathbb{R})$.
Wegen $\mathbb{V} = \mathbb{L}(\mathbb{R})$ gilt die Gleichheit.
Sei also $x \in \mathrm{OD}(\mathbb{R})$.
Dann gibt es eine Definition für x, bezeugt von einer Formel mit endlichen vielen reellen Parametern und endlich vielen ordinalen Parametern.
Dann ist g, definiert durch
$g(n, (r_0, ..., r_m), (\zeta_0, ..., \zeta_l)) = x$ genau dann, wenn die n-te Formel mit den reellen Parametern r_0 bis r_m und den ordinalen Parametern ζ_0 bis ζ_l x definiert, eine Surjektion wie gefordert.

$\square$

Unter $\mathrm{OD}(\mathbb{R})$ verstehen wir die Klasse der mit Parametern aus $\mathbb{R} \cup \mathrm{ON}$ definierbaren Mengen.
Auf die Voraussetzung $\mathbb{V} = \mathbb{L}(\mathbb{R})$ in obiger Proposition kann verzichtet werden.
In diesem Fall definiert man eine Surjektion $\tilde{g}$ mittels Rekursion.
Diese beiden Surjektionen sind im allgemeinen verschieden.

Korollar 2.77
$[\mathbb{V} = \mathbb{L}(\mathbb{R})]$ *Es gibt eine Surjektion von* $\omega \times \mathcal{N} \times \zeta$ *auf* $\mathbb{L}_\zeta(\mathbb{R})$.

BEW:

Fall1 $\zeta = \zeta^{<\omega}$
Man kann endlich viele reelle Zahlen als eine reelle Zahl und endlich viele

Ordinalzahlen kleiner ζ als eine Ordinalzahl kleiner ζ kodieren.
Benutze diese Kodierung und die Surjektion aus 2.76.

Fall2 $\zeta < \omega$
Dann ist $\zeta^{<\omega} < \omega$.
Also ist $\zeta^{<\omega} \in \omega$.
Daher kann ich diesen natürlichen Parameter mit in den reellen Parameter kodieren.

Also folgt in beiden Fällen die Behauptung.

$\square$

Als nächstes möchte ich zunächst das klassische Kondensationslemma anführen.

Satz 2.78 (Kondensationslemma für $\mathbb{L}$)
Sei α eine Limesordinalzahl.
Falls $X \preceq_{\Sigma_1} \mathbb{L}_\alpha$ ist, dann gibt es eindeutig bestimmte π und $\beta \leq \alpha$ mit folgenden Eigenschaften:
1) $\pi : \langle X, \epsilon \rangle \cong \langle \mathbb{L}_\beta, \epsilon \rangle$
2) Falls $Y \subseteq X$ transitiv ist, dann ist $\pi \restriction Y = id \restriction Y$.
3) Für alle $x \in X$ gilt $\pi(x) \leq_{\mathbb{L}} x$.

Der ausführlicher Beweis dazu kann in [Dev84] auf Seite 80 ff nachgelesen werden.
Eine Version des Kondensationslemmas für $\mathbb{J}$ mit Beweis findet sich in [Dev73], Kapitel 6, Satz 22.

Bei dem nun folgenden Lemma handelt es sich um eine abgewandelte Version des Kondensationslemmas, welche ich für diese Arbeit benötige.

Proposition 2.79 (Kondensationslemma für $\mathbb{L}(\mathbb{R})$)
[DC] Sei $\zeta \in ON$ so, daß $\mathbb{J}_\zeta(\mathbb{R}) \models \Theta = ON$ und daß $\mathbb{J}_\zeta(\mathbb{R}) \models$ "Die Länge jeder Präwohlordnung einer Teilmenge der reellen Zahlen ist eine Ordinalzahl" gilt.
Sei ferner $\mathbb{R} \subseteq M, \mathbb{R} \in M$ und $M \preceq_{\Sigma_1} \mathbb{J}_\zeta(\mathbb{R})$.
Dann ist M transitiv und von der Form $\mathbb{J}_\xi(\mathbb{R})$ für ein geeignetes $\xi \leq \zeta$.

BEW: Sei $\lambda \in M \cap$ON.
Dann ist $\lambda < \zeta$.
Also gibt es eine PWO Λ von $\mathcal{N}$ der Länge λ[11].
Die Aussage "Λ ist PWO von $\mathbb{R}$" ist eine Δ_0-Aussage über $\mathbb{R}$ und Λ.
Wegen [DC] reicht es aus zu zeigen, daß es keine ω-lange echt absteigende Sequenz reeller Zahlen gibt.
Aber nach 2.7 gibt es eine Bijektion zwischen den reellen Zahlen und den ω-Tupeln reeller Zahlen, so daß bereits eine reelle Zahl eine ω-absteigende Sequenz erkennt.
Also gilt $\mathbb{J}_\zeta(\mathbb{R}) \models \exists \Lambda\ \Lambda$ ist eine PWO von $\mathbb{R}$ der Länge λ.
Deshalb gilt $M \models \exists \Lambda\ \Lambda$ ist eine PWO von $\mathbb{R}$ der Länge λ.

[11] da $\mathbb{J}_\zeta(\mathbb{R}) \models \Theta = ON$ impliziert, daß $\zeta \leq \Theta$ ist

Sei $\Lambda \in M$ das, was M für eine PWO der Länge λ hält.
Dann kennt M eine Funktion $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \lambda$, die dies bezeugt.
Sei $\eta < \lambda$.
Dann gibt es ein $a \in \mathcal{N}$, so daß $f(a) = \eta$ ist.
Da $a \in \mathbb{R}$ ist, ist $a \in M$. Also ist $\eta \in M$.
Damit sind aber alle Ordinalzahlen kleiner als λ in M.
Also ist $M \cap \mathrm{ON}$ eine Ordinalzahl ξ.

HILFSPROPOSITION: $M = \mathbb{J}_\xi(\mathbb{R})$
BEW: Betrachte die Π_2-Aussage $\forall x \; \exists \nu \; \nu \in \mathrm{ON} \wedge x \in \mathbb{J}_\nu(\mathbb{R})$.
Diese Aussage ist in $\mathbb{J}_\zeta(\mathbb{R})$ wahr, also gilt sie auch in M.
Sei x dazu beliebig.
Dann gilt $\mathbb{J}_\zeta(\mathbb{R}) \models \exists \nu \; \nu \in \mathrm{ON} \wedge x \in \mathbb{J}_\nu(\mathbb{R})$.
Also ist auch M wegen der Σ_1-Elementarität ein Modell dieser Aussage. Also folgt die Behauptung, da $M \cap \mathrm{ON}$ gleich ξ ist.

$\blacksquare$

Somit folgt unsere Proposition.

$\square$

2.10 Über Θ

Definition 2.80

1. *Eine* ***Norm auf*** X *ist eine Abbildung* $\Phi : X \to ON$.
2. *Der Ordnungstyp des Bildes einer solchen Norm* Φ *heißt* ***Länge von*** Φ, *geschrieben* $|\Phi|$.
3. *Eine Norm heißt* ***regulär****, falls* $\mathrm{Im}(\Phi)$ *Anfangsstück der Ordinalzahlen ist.*
4. *Eine Norm* Φ *definiert eine Relation* $\leq_\Phi$ *durch* $x \leq_\Phi y :\leftrightarrow \Phi(x) \leq \Phi(y)$.
5. *Ein Paar* $P = (X_P, \leq_P)$ *heißt* ***Präwohlordnung (PWO)****, falls eine Norm* Φ *auf* X_P *existiert, so daß* $\leq_P = \leq_\Phi$ *gilt.*
6. *Für eine PWO* P *definiere* $\varrho_P(x) := \sup\{\varrho_P(y) + 1 \mid y <_P x\}$ *mittels Rekursion.*
   Wir nennen ϱ_P *die* ***zu*** P ***assoziierte reguläre Norm****.*
7. *Für eine PWO* P *und* $\zeta \in \mathrm{Im}(P)$ *nennen wir* $(P)_\zeta := \{x \mid |x|_P = \zeta\}$ *die* ζ***-Komponente von*** P.

Wir werden im Einzelfall nicht zwischen Φ und $\leq_\Phi$ unterscheiden.

Proposition 2.81
Die zu P *assoziierte reguläre Norm ist eine reguläre Norm.*

Wir kommen nun zu einer zentralen Definition dieser Diplomarbeit.
Warum ist das hier zu definierende Θ so wichtig?
Wir arbeiten in dieser Diplomarbeit in einem Universum, in dem [AD] gilt.
[AD] hängt aber sehr eng mit Spielen zusammen. In solchen Spielen werden reelle Zahlen gespielt.

Definition 2.82
$\Theta := \bigcup\{\delta \mid \exists f \ f : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \delta\}$.

Also ist Θ das Supremum der Länge von PWO der reellen Zahlen und gibt uns somit genau die Stufe unserer Hierarchie an, bis zu der [AD] Einfluß nehmen kann.

Proposition 2.83
[AC]

1. $\Theta = (2^{\aleph_0})^+$
2. *Falls die Kontinuumshypothese gilt, ist* $\Theta = \aleph_2$.

BEW:

1. $2^{\aleph_0}$ ist gleich dem Cantorraum.
   $(2^{\aleph_0})^+$ ist unter [AC] gleich $\min\{\delta \mid \neg\exists f \ f : 2^{\aleph_0} \twoheadrightarrow \delta\}$.
   Also ist $(2^{\aleph_0})^+ = \sup\{\delta \mid \exists f \ f : 2^{\aleph_0} \twoheadrightarrow \delta\}$.
   Also ist $\Theta = (2^{\aleph_0})^+$.

2. Nach [CH] gilt $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.
   Also ist $(2^{\aleph_0})^+ = (\aleph_1)^+ = \aleph_2$.

$\square$

Diese Proposition zeigt, daß die Frage nach der Größe von Θ in einem Universum mit Auswahl von geringem Interesse ist.
Es zeigt sich aber, daß unter Abwesenheit des vollen Auswahlaxioms Θ sehr groß werden kann. Deshalb kann die Frage seiner Größe in diesen Universen als eine Art Kontinuumshypothese angesehen werden.
Es folgen einige Resultate über Θ.

Proposition 2.84
Θ ist eine Limesordinalzahl größer als ω_1.

BEW: $\mathcal{N}$ ist überabzählbar und ω_1 ist die kleinste überabzählbare Ordinalzahl.
Daher gibt es eine Surjektion von $\mathcal{N}$ auf ω_1.
Sei nun $\lambda \in \mathrm{ON}$ und g_λ eine Surjektion von $\mathcal{N}$ auf λ.
Dann ist $g_{\lambda+1}$ definiert durch
$0 \mapsto \lambda$
$n+1 \mapsto n$, falls n endlich ist
$\alpha \mapsto \alpha$, falls $\omega \leq \alpha < \lambda$ ist
eine Surjektion von $\mathcal{N}$ auf $\lambda + 1$.
Daher ist $\Theta > \omega_1$ und aus dem selben Grund ist Θ eine Limesordinalzahl.

$\square$

Korollar 2.85
Es gibt keine Surjektion von $\mathcal{N}$ auf Θ.

BEW: Angenommen es gäbe eine solche Surjektion g.
Dann existiert nach dem vorherigen Beweis eine Surjektion von $\mathcal{N}$ auf $\Theta + 1$ im Widerspruch zur Definition von Θ.

$\square$

Proposition 2.86
Es gibt eine OD*-Funktion Ψ, die allen $\nu < \Theta^{\mathbb{L}(\mathbb{R})}$ eine PWO der Länge ν zuordnet.*

BEW: Jedes der obigen ν ist Länge einer PWO in $\mathbb{L}(\mathbb{R})$ von $\mathcal{N}$, da $\nu < \Theta$.
Aber jedes Element von $\mathbb{L}(\mathbb{R})$ ist ordinalzahl-definierbar über einer reellen Zahl nach 2.76[12].
Setze für alle $x \in \mathbb{R}$ P_x als die erste PWO von $\mathcal{N}$ der Länge ν, falls sie ordinalzahl-definierbar über x ist.
Ansonsten setze P_x gleich der trivialen PWO von $\mathcal{N}$ der Länge 1.
Dann ist $s : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \nu$ definiert durch $(a, x) \mapsto \varrho_{P_x}(a)$ surjektiv.
Sei ferner $b : \mathcal{N} \leftrightarrow \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ eine Bijektion.
Dann ist $\Psi := s \circ b$ wie gewünscht.

$\square$

[12]sofern wir endlich viele reelle Zahlen durch eine reelle Zahl kodieren

Proposition 2.87 (Solovay)
$[\mathbb{V} = \mathbb{L}(\mathbb{R})]$ Θ *ist regulär.*

BEW: Sei $\langle \Theta_\nu \mid \nu < \lambda \rangle$ Sequenz der Länge $\lambda < \Theta$ von Ordinalzahlen $0 < \Theta_\nu < \Theta$ und sei $f : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \lambda$.
Eine solche Surjektion existiert, da $\lambda < \Theta$ ist.
Nach Definition von Θ existiert daher eine Sequenz $\langle \pi_\nu \mid \nu < \lambda \rangle$ mit $\pi_\nu : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \Theta_\nu$.
Definiere $\chi : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \twoheadrightarrow \sup \Theta_\nu$ durch $\chi(x, y) := \pi_{f(x)}(y)$.
Zusammen mit dem b aus obiger Proposition folgt also $\Psi := \chi \circ b : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \sup \Theta_\nu$.
Also ist $\sup \Theta_\nu < \Theta$, und damit ist Θ regulär.
$\square$

Satz 2.88 (Moschovakis (1970))
$[AD]$ Sei $\alpha \in$ ON.
Falls f eine Funktion ist mit $f : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \alpha$, dann existiert auch eine Funktion g mit $g : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathcal{P}(\alpha)$.

BEW: Sei also $f : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \alpha$.
Definiere nun rekursiv eine Sequenz $\langle g_\xi \mid \xi < \alpha \rangle$, so daß $g_\xi : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathcal{P}(\xi)$ ist.
$g_0 : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathcal{P}(0) = 1$ ist natürlich die einzig mögliche Abbildung, nämlich die konstante Abbildung auf die 0.
$g_{n+1} : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathcal{P}(n)$ läßt sich für endliches n trivialerweise realisieren, da $\mathcal{P}(n)$ endlich.
$g_{\xi+1} : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathcal{P}(\xi + 1)$ läßt sich für ξ unendlich ebenfalls leicht realisieren, indem man eine Bijektion $\tilde{b} : \xi \leftrightarrow \xi + 1$ benutzt.
Setze $g_{\xi+1}(x) := \{y \mid \exists z \in g_\xi(x)\ y = \tilde{b}(z)\}$.
$g_\delta : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathcal{P}(\delta)$ sei für $\mathrm{Lim}(\delta)$ wie im folgenden konstruiert:

HILFSDEFINITION: Für $\xi < \delta, y \subseteq \xi$ nennen wir
$z \in \mathcal{N}$ Kode für $y :\leftrightarrow f(z^{[0]}) = \xi \wedge g_\xi(z^{[1]}) = y$.[13]

HILFSSPIEL: Betrachte für $X \subseteq \delta$ das Spiel mit Regeln $\mathcal{G}(X)$:
R1) I verliert, falls a nicht $X \cap \xi$ für ein $\xi < \delta$ kodiert.
R2) II verliert, falls e nicht $X \cap \eta$ für ein $\xi < \eta < \delta$ kodiert.
R3) II gewinnt.
Nach [AD] besitzt ein Spieler eine GST.

Fall1) I hat GST σ.
Dann gilt $\forall y \in \mathcal{N}\ ((\sigma * y)_I$ kodiert $X \cap \xi$ für ein geeignetes ξ.

HILFSPROPOSITION: X ist durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmte Teilmenge von δ.
BEW: Sei $Y \subseteq \delta, Y \neq X, \Psi \in Y \triangle X$ und $y \in \mathcal{N}$ Kode für $X \cap (\Psi + 1)$.
Da $(\sigma * y)_I$ ein Kode für $X \cap \xi$
und $(\sigma * y)_{II}$ nach Wahl von y ein Kode für $X \cap (\Psi + 1)$ ist,

[13] Zur Erinnerung: f ist die Surjektion, welche uns der Satz zusichert.

muß $\xi \geq \Psi + 1$ gelten, da σ eine GST war.
Also ist $X \cap \xi \neq Y \cap \xi$, da Ψ nach Wahl ein Element genau einer dieser Mengen ist.
Daher kodiert $(\sigma * y)_I$ nicht $Y \cap \xi$ nach obiger Hilfsdefinition.

■

Fall2) II hat GST τ.
Dann gilt $\forall z \in \mathcal{N}$ (z Kode für $X \cap \xi$ mit ξ geeignet $\rightarrow (z * \tau)_{II}$ kodiert $X \cap \eta$ für ein geeignetes η)

HILFSPROPOSITION: X ist durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmte Teilmenge von δ.
BEW: Sei $Y \subseteq \delta \wedge Y \neq X$.
Setze $\Psi := \min(Y \triangle X) \wedge z \in \mathcal{N}$ kodiere $X \cap \Psi$[14].
Da $(z * \tau)_I$ Kode für $X \cap \Psi$ nach Wahl von z ist,
muß $(z * \tau)_{II}$ Kode für $X \cap \eta$ mit $\Psi < \eta < \delta$ sein, da τ eine GST war.
Damit ist $X \cap \eta \neq Y \cap \eta$, da Ψ nach Wahl ein Element genau einer der beiden Mengen ist.
Somit kodiert $(z * \tau)_{II}$ nicht $Y \cap \eta$ nach obiger Hilfsdefinition.

■

Also kodiert bereits jede GST in $\mathcal{G}(X)$ eindeutig dieses $X \subseteq \delta$.
Definiere $g : \{p \mid p \text{ ist eine Strategie } \} \rightarrow \mathcal{P}(\delta)$ durch
1) Falls es ein X gibt, so daß p eine GST in $\mathcal{G}(X)$ ist, dann setze $g(p) := X$.
2) Im anderen Fall, daß nämlich die Strategie p für alle X keine GST in $\mathcal{G}(X)$ ist, setze $g(p) := \emptyset$.
Nach [AD] ist g surjektiv, da für jedes $\mathcal{G}(X)$ und damit für jedes X eine GST existiert.
Eine Strategie ist aber eine Abbildung $\Phi : A^{<\omega} \rightarrow A$.
In unserem Fall ist $A = \omega$.
Benutze unsere Bijektion $b_{[*]}^{-1} : \omega \leftrightarrow \omega^{<\omega}$ aus 2.7.
Definiere nun $\Phi_{b_{[*]}} : \omega \rightarrow \omega$ durch $\Phi_{b_{[*]}}(n) := \Phi(b_{[*]}^{-1}(n))$
Somit ist $\Phi_{b_{[*]}} \in \omega^\omega$.
Also entspricht jede Strategie Φ eineindeutig einer reellen Zahl $\Phi_{b_{[*]}}$.
Definiere schließlich $g_\delta : \omega^\omega \twoheadrightarrow \mathcal{P}(\delta)$ durch $g_\delta(\Phi_{b_{[*]}}) := g(\Phi)$.

□

Korollar 2.89 (Friedman)
$[AD]$ Θ *ist eine Limeskardinalzahl.*

BEW: Sei $\omega \leq \lambda < \Theta$.
Nach 2.88 gibt es eine Surjektion $g : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$[15].
Sei $b : \lambda \leftrightarrow \lambda \times \lambda$ eine Bijektion.
Betrachte die Funktion $f : \mathcal{P}(\lambda \times \lambda) \rightarrow$ON definiert durch:

[14]$= Y \cap \Psi$, da Ψ minimal ist
[15]Hier benutzen wir indirekt [AD].

1) $R \mapsto \mathrm{ot}(R) \cap \lambda^+$, falls R eine Wohlordnung ist.
2) $R \mapsto 0$, sonst
Wegen des Cantor-Arguments ist $\mathrm{ot}(f) \geq \lambda^+$.
Also folgt, $\tilde{f}$ definiert durch $\tilde{f}(x) := f(b'' g(x))$ ist eine Surjektion von $\mathcal{N}$ auf λ^+.
□

Korollar 2.90 (Solovay)
$[AD]$ $\Theta = \omega_\Theta$

BEW: Sei $\alpha < \Theta$.
Definiere rekursiv für $\xi \leq \alpha$ eine Surjektion $g_\xi : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \omega_\xi$.

$\xi = 0$ $g_0 : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \omega_0$ wird definiert als $g_0((x(0), x(1), ...)) := x(0)$.

$\xi = \zeta + 1$ Nutze die bereits konstruierte Surjektion g_ζ und wende die Konstruktion aus dem Beweis von 2.89 an[16].

$\lim(\xi)$ Es gibt eine Surjektion $h : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \xi$, da $\xi < \Theta$ ist.
Außerdem gibt es nach Konstruktion für alle $\zeta < \xi$ eine Surjektion $g_\zeta : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \omega_\zeta$.
Dann definiert $g_\xi : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \omega_\xi$ definiert durch $g_\xi((x(0), x(1), ...)) := g_{h((x(0), x(2), ...))}((x(1), x(3), ...))$ eine Surjektion wie gewünscht.
□

Proposition 2.91
Sei $\lambda < \Theta$.
Dann gibt es eine Surjektion $g : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathbb{J}_\lambda(\mathbb{R})$.

BEW: Nach 2.77 gibt es eine Surjektion $g_0 : \omega \times \mathcal{N} \times \lambda \twoheadrightarrow \mathbb{J}_\lambda(\mathbb{R})$.
Da $\lambda < \Theta$ ist, gibt es eine Surjektion $\Lambda : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \lambda$.
Dann ist $g_1 : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathbb{J}_\lambda(\mathbb{R})$ definiert durch:
$g_1((x(0), x(1), ...)) := g_0((x(0), (x(1), x(3), ...), \Lambda(x(2), x(4), ...)))$ eine Surjektion wie gefordert.
□

[16] Hier benutzen wir erneut [AD] indirekt.

2.11 Der Satz von Łoš

Für genauere Informationen sei hierfür auf [Slo71], Kapitel 5§2, verwiesen.
Im folgenden seien $\mathbb{V}, M, N$ Strukturen einer Sprache $\mathcal{L}$.

Definition 2.92

1. *Eine injektive Abbildung $j : N \hookrightarrow M$ heißt* ***elementare Einbettung****, geschrieben $j : N \preceq M$, falls j nicht die Identität auf N ist, und für jede Formel $\phi(v_1, ..., v_n)$ der Sprache $\mathcal{L}$ gilt $N \models \phi[x_1, ..., x_n]$ genau dann, wenn auch $M \models \phi[j(x_1), ..., j(x_n)]$ gilt.*

2. *Falls j eine elementare Einbettung ist, so bezeichnen wir mit* $\mathrm{crit}(j) := \min\{\delta \in ON \mid j(\delta) > \delta\}$ *den* ***kritischen Punkt von j****.*

Von einer elementaren Einbettung werden natürlich Ordinalzahlen auf Ordinalzahlen ordnungserhaltend abgebildet, da es Formeln für "ist eine Ordinalzahl" und für "ist größer als" gibt. Somit gilt für jede Ordinalzahl δ, daß $j(\delta) \geq \delta$ ist. Ferner gilt, da j nicht die Identität ist, daß jede elementare Einbettung einen kritischen Punkt besitzt.
Elementare Einbettungen spielen eine zentrale Rolle, wenn es um die Formulierung starker Kardinalzahlhypothesen geht.
Zum Beispiel läßt sich die "schwache" [17] Bedingung der Existenz einer meßbaren[18] Kardinalzahl umformulieren.
Unter [AC], nicht aber unter [AD], gilt folgende Äquivalenz:
Es existiert eine elementare Einbettung von $\mathbb{V}$ in ein inneres Modell M genau dann, wenn eine meßbare Kardinalzahl existiert.
Eine Grenze für die Existenz elementarer Einbettung zeigte Kunen mit seinem Resultat, daß es unter ZFC keine elementare Einbettung von $\mathbb{V}$ in sich selbst geben kann, auf. Eine genauere Analyse des Beweises ergibt sogar folgende Schranken:
1) Sei j eine elementare Einbettung von $\mathbb{V}$ nach M mit kritischem Punkt κ und sei $j_\omega(\kappa) := \sup\{\kappa, j(\kappa), j(j(\kappa)), ...\}$.
Dann kann nicht $\mathbb{V}_{j_\omega(\kappa)+1} \subseteq M$ gelten.
2) Für kein δ existiert eine elementare Einbettung von $\mathbb{V}_{\delta+2}$ in sich selbst.
Aus diesen beiden Resultate erhält man z.B. die sehr starken Hypothesen einer ω-riesigen Kardinalzahl oder einer I1- beziehungsweise I3-Kardinalzahl.

Definition 2.93

1. *Eine Kardinalzahl κ heißt* ***ω-riesig****, falls es eine elementare Einbettung $j : \mathbb{V} \preceq M$ gibt, deren kritischer Punkt κ ist und für die gilt, daß $\mathbb{V}_{j_\omega(\kappa)} \subseteq M$ ist.*

2. $\delta \in \mathrm{ON}$ *ist eine* ***I3-Kardinalzahl****, falls es eine elementare Einbettung von $\mathbb{V}_\delta$ in sich selbst gibt.*

[17] In Bezug auf die Konsistenzstärke der Existenz einer Woodinkardinalzahl
[18] Die Definition wird in Kapitel 3.1 nachgeliefert.

3. *$\delta \in \mathrm{ON}$ ist eine* ***I1-Kardinalzahl****, falls es eine elementare Einbettung von $\mathbb{V}_{\delta+1}$ in sich selbst gibt.*

Definition 2.94
Sei $\mathcal{U}$ UF über einer Menge S und sei für $i \in S$ $\mathcal{M}_i := \langle M_i, ...\rangle$ Struktur einer Sprache $\mathcal{L}$.

1. *Definiere $\prod_{i\in S} M_i^S := \{f : S \to \prod_{i\in S} M_i \mid f(i) \in M_i\}$.*
2. *Setze für $f, g \in \prod_{i\in S} M_i^S$ $f =_{\mathcal{U}} g :\leftrightarrow \{i \in S \mid f(i) = g(i)\} \in \mathcal{U}$.*
3. *Setze für $f \in \prod_{i\in S} M_i^S$ $[f]_{\mathcal{U}} := \{g \in \prod_{i\in S} M_i^S \mid g =_{\mathcal{U}} f\}$.*
4. *Definiere $\prod M_i/\mathcal{U} := \{[f]_{\mathcal{U}} \mid f \in \prod_{i\in S} M_i^S\}$.*

$=_{\mathcal{U}}$ ist eine Äquivalenzrelation und $[.]_{\mathcal{U}}$ ihre Äquivalenzklasse.

Definition 2.95
Definiere nun das ***Ultraprodukt der*** *$\mathcal{M}_i$, geschrieben $\prod \mathcal{M}_i/\mathcal{U}$, wie folgt:*
i) $\prod \mathcal{M}_i/\mathcal{U} = \langle \prod M_i/\mathcal{U}, ...\rangle$
ii) Falls das n-stellige Prädikatensymbol in $\mathcal{L}$ durch die n-stellige Relation $R_i \subseteq M_i^n$ in M_i interpretiert wird, dann sei die Interpretation $R_{\mathcal{U}}$ im Ultraprodukt $\langle [f_1]_{\mathcal{U}}, ..., [f_n]_{\mathcal{U}}\rangle \in R_{\mathcal{U}} :\leftrightarrow \{i \in S \mid \langle f_1(i), ..., f_n(i)\rangle \in R_i\} \in \mathcal{U}$.
iii) Analog verfahren wir im Fall von Funktionen- und Konstantensymbolen.

Satz 2.96 (Satz von Łoš)
$[AC]$ Sei $\mathcal{U}$ ein UF über S.
Für eine Formel $\phi(v_1, ..., v_n)$ und Funktionen $f_1, ..., f_n \in \prod_{i\in S} M_i^S$ gilt:
$\prod \mathcal{M}_i/\mathcal{U} \models \phi[[f_1]_{\mathcal{U}}, ..., [f_n]_{\mathcal{U}}] \leftrightarrow \{i \in S \mid \mathcal{M}_i \models \phi[f_1(i), ..., f_n(i)]\} \in \mathcal{U}$

BEW: Es wird hier nur eine kurze Beweisskizze gegeben, da der Beweis ein Standardbeweis mittels Induktion über den Formelaufbau ist.

IA Sei $\phi(v_1, ..., v_n)$ die Formel $v_r = v_s$.
Also gilt:
$\prod \mathcal{M}_i/\mathcal{U} \models \phi[[f_1]_{\mathcal{U}}, ..., [f_n]_{\mathcal{U}}] \leftrightarrow [f_r]_{\mathcal{U}} = [f_s]_{\mathcal{U}}$
$\leftrightarrow f_r =_{\mathcal{U}} f_s$
$\leftrightarrow \{i \in S \mid f_r(i) = f_s(i)\} \in \mathcal{U}$
$\leftrightarrow \{i \in S \mid \mathcal{M}_i \models \phi[f_1(i), ..., f_n(i)]\} \in \mathcal{U}$
Analog folgen die anderen atomaren Formeln.

$\psi \wedge \chi$ Dieser Schritt folgt aus der Filtereigenschaft F3).

$\neg\psi$ Dieser Schritt benötigt U4)[19].

$\exists x\ \psi$ Diesen Schritt erhält man mit Hilfe des Auswahlaxioms.

□

[19]Hier benötigen wir explizit die Ultrafiltereigenschaft

Definition 2.97

1. *Sei* $\forall i \in S\ \mathcal{M}_i = \mathcal{M} = \langle M, ... \rangle$ *eine feste Struktur.*
   Dann nennen wir das Ultraprodukt ***Ultrapotenz*** *und schreiben* $\mathcal{M}^S/\mathcal{U}$.

2. *Definiere in diesem Fall eine Abbildung* $j_* : \mathcal{M} \to \mathcal{M}^S/\mathcal{U}$ *durch:*
   Für $m \in M$ *ist* $j_*(m) := [\mathrm{const}_m]_\mathcal{U}$.
   Hierbei ist $\mathrm{const}_m : S \to M$ *die konstante Abbildung auf* m.
   Wir nennen j_* *die* ***kanonische Einbettung zu*** $\mathcal{U}$.

Als Anmerkung sei erwähnt, daß $[\mathrm{const}_m]_\mathcal{U}$ im Einzelfall eine echte Klasse sein könnte.
In diesem Fall greift man zu einem Trick, den ich hier einmal aufführe, in dem Rest der Arbeit aber nicht stets erwähnen werde.
Es sei daher, wann immer nötig angewandt.
Falls $[f]_\mathcal{U}$ eigentlich eine echte Klasse wäre, so setze:
$[f] := \{g \mid g \sim_\mathcal{U} f \wedge \forall h\ h \sim_\mathcal{U} f \to \mathrm{rk}(h) \geq \mathrm{rk}(g)\}$.

Lemma 2.98
[AC] Sei $\mathcal{U}$ *ein UF.*
Dann ist die kanonische Einbettung zu $\mathcal{U}$ *eine elementare Einbettung.*

BEW: Seien $\phi(v_0, ..., v_n)$ Formel in $\mathcal{L}$ und $m_0, ..., m_n \in \mathcal{M}$.
Dann folgt mit dem Satz von Łoš:
$\mathcal{M}^S/\mathcal{U} \models \phi[[\mathrm{const}_{m_0}]_\mathcal{U}, ..., [\mathrm{const}_{m_n}]_\mathcal{U}]$
$\leftrightarrow \{i \in S \mid \mathcal{M} \models \phi[\mathrm{const}_{m_0}(i), ..., \mathrm{const}_{m_n}(i)]\} \in \mathcal{U}$
$\leftrightarrow \{i \in S \mid \mathcal{M} \models \phi[m_0, ..., m_n]\} \in \mathcal{U} \leftrightarrow \mathcal{M} \models \phi[m_0, ..., m_n]$.

$\square$

2.12 Über KP

Das Kripke-Platek-Axiomensystem (KP) ist eine Abschwächung der ZFC Axiome und wird benutzt, um Aussagen auf Stufen unserer Mengenhierarchie treffen zu können, welche KP erfüllen.
Für eine ausführlichere Einführung in dieses Thema sei auf [Bar75], Kapitel 1, verwiesen.

Definition 2.99
KP besteht aus dem Abschluß bezüglich der Formeln und Schemata:

1. *Existenz einer Menge*
   $[Ex]\ \exists a\ a = a$

2. *Extensionalität*
   $[Ext]\ \forall x\ (x \in a \leftrightarrow x \in b) \rightarrow a = b$

3. *Paarmenge*
   $[Paar]\ \exists a\ (x \in a \wedge y \in a)$

4. *Vereinigungsmenge*
   $[Union]\ \exists b\ \forall y \in a\ \forall x \in y\ x \in b$

5. *Fundierung*
   Für alle Formeln $\phi(x)$, in denen y nicht frei vorkommt, gilt:
   $[Fund]\ \exists x\ \phi(x) \rightarrow (\exists x\ \phi(x) \wedge \forall y \in x\ \neg\phi(y))$

6. *Δ_0-Aussonderung*
   Für alle Δ_0-Formeln $\phi(x)$, in denen b nicht frei vorkommt, gilt:
   $[Sep]$[20] $\exists b\ \forall x\ x \in b \leftrightarrow (x \in a \wedge \phi(x))$

7. *Δ_0-Kollektion*
   Für alle Δ_0-Formeln $\phi(x,y)$, in denen b nicht frei vorkommt, gilt:
   $[Col]\ \forall x \in a\ \exists y\ \phi(x,y) \rightarrow \exists b\ \forall x \in a\ \exists y \in b\ \phi(x,y)$

Satz 2.100 (Das Σ-Reflexions-Prinzip)
Für jede Σ-Formel ϕ, in der a keine Variable ist, gilt:
$\mathrm{KP} \vdash \phi \leftrightarrow \exists a\ \phi^{(a)}$.

Der Beweis findet sich unter Satz 4.3 in [Bar75].
Der Satz besagt, daß in KP jede Σ-Formel äquivalent zu einer Σ_1-Formel ist. Wir wollen ihn ausnutzen, um uns in praktischen Anwendungen nicht die Mühe machen zu müssen, explizit eine Σ_1-Formel anzugeben, sondern eventuell nur eine Σ-Formel anzugeben.

[20] Wir verwenden [Sep], da es sich vom allgemeinen Aussonderungsaxiom [Aus] unterscheidet.

Definition 2.101

1. *Wir nennen eine Menge **zulässig**, falls sie ein Modell von KP und ein transitives Anfangsstück von $\mathbb{L}$ mit kanonischer Interpretation der ϵ-Relation ist.*

2. *Wir nennen ein Stufe $\mathbb{L}_\alpha$ unserer Hierarchie **zulässig**, falls $\mathbb{L}_\alpha \models \mathrm{KP}$ gilt.*

3. *Wir nennen eine Ordinalzahl α **zulässig**, falls $\mathbb{L}_\alpha$ zulässig ist.*

Einige Resultate aus [Bar75], Kapitel 2, schließen dieses Kapitel über KP ab:
1) ω ist die kleinste zulässige Ordinalzahl.
2) Jede unendliche Kardinalzahl ist zulässig.
3) Zu jeder überabzählbaren Kardinalzahl κ und jedem $\beta < \kappa$ existiert ein zulässiges α, welches echt zwischen diesen beiden liegt.

2.13 Über δ_H

Konvention
Sei von nun an für den Rest der Arbeit $H \subseteq \Theta$ eine beliebige fest gewählte Menge aus HOD.

Dann gibt es eine wichtige Ordinalzahl, welche wir δ_H nennen wollen, die sich unterhalb von Θ befindet.
Es ist klar, daß $\mathbb{J}(\mathbb{R}; H) = \mathbb{J}(\mathbb{R})$ ist, da die zusätzliche Aussagekraft durch die einstellige Relation "ist Element von H" auf einer gewissen Stufe, spätestens dort, wo wir H als Element vorliegen haben, verloren geht.
Wir wollen also betrachten, auf welchen früheren Stufen wir bereits Σ_1^H-elementare Submodelle vorfinden.

Definition 2.102

1. *Wir nennen* $\mathrm{Hull}_n(M, Z) := \{x \mid$ *Es gibt eine* Σ_n*-Formel* ϕ *und Parameter* $\vec{z}$ *aus* $M \cap Z$*, so daß* $\{x\} = \{y \in M \mid M \models \phi[y, \vec{z}]\}$ *ist.*$\}$ *die* Σ_n***-Hülle von*** M ***über*** Z.
2. *Wir nennen* $\mathrm{Hull}(M, Z) := \bigcup_{n \in \omega} \mathrm{Hull}_n(M, Z)$ *die* ***Hülle von*** M ***über*** Z.

Wir interessieren uns im allgemeinen nur für transitives M und den Fall $n = 1$.

Lemma 2.103
$\mathrm{Hull}_n(M, Z) \preceq_{\Sigma_n} M$

BEW: Wir beweisen nur den Fall $n = 1$.
Setze $N := \mathrm{Hull}_1(M, Z)$.
Sei $x \in N, \phi$ eine Δ_0^H-Formel und $M \models \exists y\ \phi(x, y)$.
Wir wissen nach 2.77, daß jedes $y \in M$ von der Form $y = h(n, r, \zeta)$ ist für $n \in \omega, r \in \mathcal{N}$ und $\zeta \in \mathrm{ON}$ geeignet.
Sei $\tilde{\zeta}$ minimal mit dieser Eigenschaft für h, n, r.
Betrachte die Menge $\{\zeta \mid M \models \phi(x, h(n, r, \zeta)) \wedge \forall \xi < \zeta\ \neg\phi(x, h(n, r, \xi))\}$.
Diese Menge entspricht offenbar $\{\tilde{\zeta}\}$.
Da $x \in N$ ist, ist $x = \iota z(M \models \theta(z, a))$ für eine geeignete Σ_1^H-Formel θ und a aus $M \cap Z$.
Also gibt es eine Δ_0^H-Formel θ^0, so daß $x = \iota z(M \models \exists w\ \theta^0(w, z, a))$.
Also ist
$\tilde{\zeta} = \iota\zeta(M \models \zeta \in \mathrm{ON} \wedge \exists z\ \exists w\ \theta^0(w, z, a) \wedge \phi(z, h(n, r, \zeta)) \wedge \forall \xi < \zeta\ \neg\phi(z, h(n, r, \xi)))$.
Damit ist $\tilde{\zeta} \in N$.
Deshalb ist $y \in N$, da
$y = h(n, r, \tilde{\zeta}) = \iota v(M \models \exists \zeta\ \zeta \in \mathrm{ON} \wedge \exists z\ \exists w\ \theta^0(w, z, a) \wedge \phi(z, h(n, r, \zeta)) \wedge \forall \xi < \zeta\ \neg\phi(z, h(n, r, \xi)) \wedge v = h(n, r, \zeta))$ ist.

$\square$

Proposition 2.104
$\mathbb{J}_\Theta(\mathbb{R}) = \{x \mid \exists f\ f : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathrm{TC}(\{x\})\}$

BEW:

"$\subseteq$" Sei $x \in \mathbb{J}_\Theta(\mathbb{R})$.
Dann existiert ein $\gamma < \Theta$, so daß $x \in \mathbb{J}_\gamma(\mathbb{R})$ ist.
Also ist $\mathrm{TC}(\{x\}) \subseteq \mathbb{J}_\gamma(\mathbb{R})$.
Dann folgt mit 2.91, daß es ein $g : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathbb{J}_\gamma(\mathbb{R})$ gibt.
Also gibt es ein $\tilde{g} : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathrm{TC}(\{x\})$.

"$\supseteq$" Sei $g : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathrm{TC}(\{x\})$.
Da $\mathbb{V} = \mathbb{J}(\mathbb{R})$ ist, existiert ein λ, so daß $x \in \mathbb{J}_\lambda(\mathbb{R})$ ist.
Also ist $\mathrm{TC}(\{x\}) \subseteq \mathbb{J}_\lambda(\mathbb{R})$.
Bilde $H := \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{Hull}_n(\mathbb{J}_\lambda(\mathbb{R}), \mathrm{TC}(\{x\}) \cup \mathrm{TC}(\mathbb{R}))$.
Sei $\mathbb{J}_\eta(\mathbb{R})$ der Kollaps von H mittels π.
Dann ist $\pi(x) = x$, da das transitive $\mathrm{TC}(\{x\})$ nicht kollabiert werden kann.
Somit ist $x \in \mathbb{J}_\eta(\mathbb{R})$.
Alle Elemente von $\mathbb{J}_\eta(\mathbb{R})$ sind aber nach Konstruktion definierbar mittels reeller Zahlen und Elementen von $\mathrm{TC}(\{x\})$.
Also ist $\mathcal{N}$ surjektiv abbildbar auf $\mathbb{J}_\eta(\mathbb{R})$, da es nach Voraussetzung eine Surjektion von $\mathcal{N}$ auf $\mathrm{TC}(\{x\})$ gibt.
Daher ist $\eta < \Theta$.
Also ist $x \in \mathbb{J}_\Theta(\mathbb{R})$.

□

Proposition 2.105
$\mathbb{J}_\Theta(\mathbb{R}) \preceq_{\Sigma_1} \mathbb{J}(\mathbb{R})$

BEW: Sei $a \in \mathbb{J}_\Theta(\mathbb{R})$.
Dann gibt es ein ζ, so daß $a \in \mathbb{J}_\zeta(\mathbb{R})$ ist.
Es gebe in $\mathbb{J}(\mathbb{R})$ ein b, so daß $\models \Phi[a,b]$ gilt, wobei Φ eine Δ_0-Aussage ist.
Sei ξ minimal, so daß $\mathbb{J}_{\xi+1}(\mathbb{R}) \models \exists b\ \Phi[a,b]$ gilt.
Bilde $H := \mathrm{Hull}_1(\mathbb{J}_{\xi+1}(\mathbb{R}), \mathrm{TC}(\mathbb{R}) \cup \mathbb{J}_\zeta(\mathbb{R}))$.
Dann ist $H \preceq_{\Sigma_1} \mathbb{J}_{\xi+1}(\mathbb{R})$ nach 2.103.
Sei π so, daß es H auf $\mathbb{J}_\eta(\mathbb{R})$ kollabiere.
Dann gibt es nach der Definition von $\mathrm{Hull}_1(M, Z)$ eine Surjektion $g : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathbb{J}_\eta(\mathbb{R})$, da $Z = \mathrm{TC}(\mathbb{R}) \cup \mathbb{J}_\zeta(\mathbb{R})$ und $\zeta < \Theta$ ist, wir also nur Parameter aus Z benutzen und es eine Surjektion $g : \mathcal{N} \twoheadrightarrow Z$ gibt.
Also ist $\eta < \Theta$.
Aber es gilt $a = \pi(a) \in \mathbb{J}_\eta(\mathbb{R})$, da a aus dem transitiven $\mathbb{J}_\zeta(\mathbb{R})$ stammt und nicht kollabiert werden kann.
Also folgt, da $\mathbb{J}_{\xi+1}(\mathbb{R}) \models \exists b\ \Phi[a,b]$ gilt, daß auch $H \models \exists b\ \Phi[a,b]$ gilt.
Somit gilt $\mathbb{J}_\eta(\mathbb{R}) \models \exists b\ \Phi[a,b]$.
Somit folgt $\mathbb{J}_\Theta(\mathbb{R}) \models \exists b\ \Phi[a,b]$, da $\eta < \Theta$ ist.

□

Proposition 2.106
$\mathbb{J}_\Theta(\mathbb{R}) = \mathbb{J}_\Theta(\mathbb{R}; H)$

BEW:

"$\subseteq$" Folgt aus den Definitionen.

"$\supseteq$" Sei $x \in \mathbb{J}_\Theta(\mathbb{R}; H)$.
Dann gibt es ein $\nu < \Theta$, so daß $x \in \mathbb{J}_\nu(\mathbb{R}; H)$ ist.
Daher ist $\mathrm{TC}(\{x\}) \subseteq \mathbb{J}_\nu(\mathbb{R}; H)$.
Ferner gibt es eine Surjektion $g : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathbb{J}_\nu(\mathbb{R}; H)$.
Dies folgt mit einer Verallgemeinerung des Arguments von 2.91.
Deshalb folgt die Behauptung mit 2.104.

□

Ausgehend von der Tatsache, daß Θ bereits eine Ordinalzahl ist, die Σ_1^H-Aussagen beantwortet, überlegen wir uns, ob es nicht noch kleinere Ordinalzahlen mit dieser Eigenschaft gibt.

Definition 2.107

1. *Wir nennen eine Ordinalzahl ζ $\mathbb{R}$-H-**Ordinalzahl**, falls* $\mathbb{J}_\zeta(\mathbb{R}; H) \models ZF^H \setminus [\mathcal{P}]$
2. *Wir nennen eine Ordinalzahl ζ H-**sicher**, falls:*

   HS1) $\mathbb{J}_\zeta(\mathbb{R}) = \mathbb{J}_\zeta(\mathbb{R}; H)$

   HS2) $\mathbb{J}_\zeta(\mathbb{R}) \models \Theta = ON$

   HS3) ζ ist Limes von $\mathbb{R}$-H-Ordinalzahlen.
3. *Wir nennen $C_H := \{\eta \mid \eta$ ist H-sicher $\}$ die **Klasse der H-sicheren Ordinalzahlen**.*

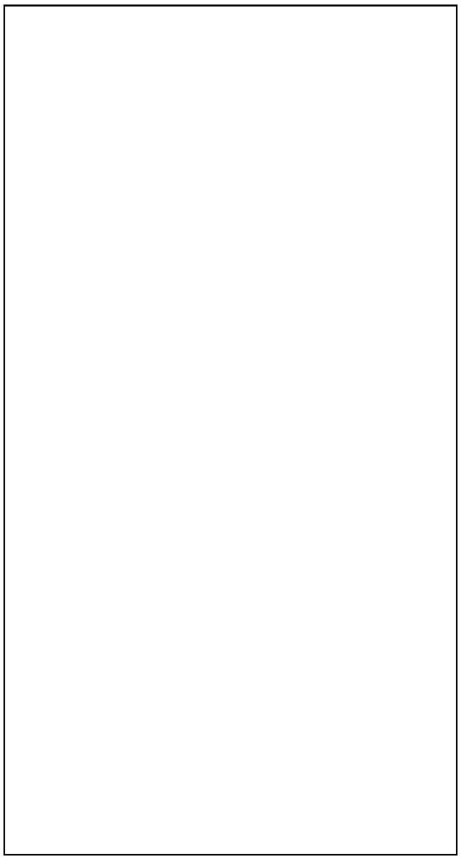

Abbildung 4: C_H

Dabei ist HS2 wie folgt zu interpretieren. Die Stufe ζ hat nur unvollständige Informationen, das heißt sie mag sowohl den Begriff ON, als auch den Begriff Θ falsch interpretieren.
Es ist klar, daß Θ nicht die gesamten Ordinalzahlen sind.
Dies kann aber eine Stufe ζ eventuell noch nicht erkennen, und glaubt deshalb, daß $\Theta =$ON wahr ist.
Eine Stufe ξ glaubt, daß $\Theta =$ON ist, sofern sie zu jeder ihr bekannten Ordinalzahl $\zeta < \xi$ auch eine PWO der reellen Zahlen mit Länge ζ findet.
HS2 ist deshalb wichtig, weil wir die H-sicheren Ordinalzahlen bei Θ enden lassen wollen und es klar ist, daß jede Ordinalzahl oberhalb von Θ weiß, daß $\Theta \neq$ ON gilt, da es die nötige PWO der Länge Θ nicht einmal in $\mathbb{J}(\mathbb{R})$ gibt.
Die Aussagen HS1 bis HS3 sind Σ_1^H.

Lemma 2.108

1. *Θ ist die größte H-sichere Ordinalzahl.*

2. *C_H ist club in Θ.*

BEW: Beweisskizze[21]

1. Θ erfüllt alle Voraussetzungen für eine H-sichere Ordinalzahl und wegen HS2 kann es keine größere geben.

2. Die Eigenschaften HS1 bis HS3 sind allesamt club in Θ.

$\square$

Definition 2.109
$\delta_H := \min\{\tau \mid \mathbb{J}_\tau(\mathbb{R}; H) \preceq_{\Sigma_1^H} \mathbb{J}_\Theta(\mathbb{R})\}$

Lemma 2.110

1. *δ_H ist H-sicher.*

2. *$\sup(C_H \cap \delta_H) = \delta_H$*

BEW: Beweisskizze[22]
Der Beweis erfolgt mittels Σ_1^H-Elementarität von $\mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R})$ und der daraus resultierenden Π_2^H-Abwärts-Absolutheit.

$\square$

Lemma 2.111
$\delta_H < \Theta$

BEW: Konstruiere sukzessiv Mengen M_i wie folgt.
Setze $M_0 := \mathrm{TC}(\mathbb{R})$.
Suche für jede Σ_1^H-Aussage ϕ ohne Parameter einen Zeugen x_ϕ.
Bilde $M_1 := M_0\{x_\phi \mid \phi \text{ ist eine } \Sigma_1^H\text{-Aussage ohne Parameter}\}$.
Suche nun für jede Σ_1^H-Aussage ϕ mit einem Parameter $a_1 \in M_1$ einen Zeugen $x_\phi^{a_1}$ und bilde
$M_2 := M_1 \cup \{x_\phi^{a_1} \mid \phi \text{ ist } \Sigma_1^H\text{-Aussage mit einem Parameter und } a_1 \text{ ist ein Parameter aus } M_1\}$.
Fahre so fort, indem wir Σ_1^H-Aussagen betrachten, die immer einen Parameter mehr erlauben.
Das heißt $M_{i+1} := M_i \cup \{x_\phi^{a_1,\ldots,a_{i+1}} \mid \phi \text{ ist eine } \Sigma_1^H\text{-Aussage mit } i+1 \text{ Parametern und alle Parameter } a_1, ..., a_{i+1} \text{ sind aus } M_i\}$.
Bilde schließlich $M_\omega := \bigcup_{n\in\omega} M_n$.
Nun erfüllt Θ die Anforderungen an das ζ aus dem Kondensationslemma für $\mathbb{L}(\mathbb{R})$ und M_ω die Anforderungen an das M aus diesem Kondensationslemma. M erfüllt die Anforderungen, da $\mathbb{R} \in M_0$ und $\mathbb{R} \subseteq M_0$ gilt und ferner jede in

[21] Der Beweis müßte noch ausgeführt werden, was aber hier nicht geschieht, da er lediglich im Kapitel über $\Diamond$ von Bedeutung sein wird, welches aber nur in Einzelpunkten ausgeführt wird.

[22] Auch dieser Beweis sollte ausgeführt werden. Dies wird aber aus denselben Gründen wie zuvor nicht geschehen.

$\mathbb{J}_\Theta(\mathbb{R})$ mit Parametern aus M erfüllbare Σ_1^H-Formel ϕ nur endlich viele Parameter a_j besitzt.
Jeder dieser endlich vielen Parameter befindet sich aber in einem $M_{k(j)}$.
Definiere $k := \max\{k(j) \mid a_j \text{ ist ein Parameter in } \phi\}$.
Also wurde nach Konstruktion ein Zeuge für ϕ in M_{k+1} aufgenommen.
Daher ist M auch Σ_1^H-elementare Substruktur von $\mathbb{J}_\Theta(\mathbb{R})$.
Daher gilt für das ξ aus diesem Kondensationslemma $\mathbb{J}_\xi(\mathbb{R}) \preceq \mathbb{J}_\Theta(\mathbb{R})$.
Angenommen es wäre $\xi = \Theta$, so wäre die Kofinalität von Θ gleich ω im Widerspruch zur Regularität von Θ.
Nach Definition von δ_H gilt dann, daß $\delta_H \leq \xi < \Theta$ ist.

$\square$

2.14 Coding Lemmata

In diesem Teil beschäftigen wir uns mit verschiedenen Coding Lemmata, dabei wird das zweite eine Abwandlung des üblichen sein, wie es in [Mos80] unter 7D5 angegeben wird.
Die beiden anderen werden dann Verfeinerungen dessen sein.
Wir werden die Coding Lemmata später beim Beweis der Normalität benutzen.

Definition 2.112
Sei $\leq_P$ PWO auf $X \subseteq \mathcal{N}$ der Länge λ.
Setze $(P)_\xi := \{x \in \mathrm{Fld}(\leq_P) \mid \mathrm{rnk}(x) = \xi\}$.
Setze $P\restriction\zeta := \bigcup_{\xi<\zeta}(P)_\xi$.
Sei G_ε eine gute Parametrisierung von $\mathrm{pos}\Sigma^1_1(\leq_P)$, wie in 2.28 definiert.
Setze $G^\zeta_a := G^{P\restriction\zeta}_a$.

Mittels Monotonie erhält man für jeden Index a und für $0 \leq \zeta \leq \xi \leq \lambda$, daß $G^\zeta_a \subseteq G^\xi_a$ gilt.

Satz 2.113 (Uniform Coding Lemma)
[AD] Sei P wie in obiger Definition, $\kappa \subseteq \lambda$.
Dann gilt $\exists a\ \forall\zeta \leq \lambda\ \forall\xi \leq \zeta\ (G^\zeta_a \cap (P)_\xi \neq \emptyset \leftrightarrow \xi \in \kappa)$

BEW: Man bemerke zunächst, daß es dank der Monotonie reicht, einen Index a zu finden, für den folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:
i) $\xi \in \kappa \to G^{\xi+1}_a \cap (P)_\xi \neq \emptyset$
ii) $\xi \notin \kappa \to G^\lambda_a \cap (P)_\xi = \emptyset$
Dies ist offenbar ausreichend, denn, falls $\xi \in \kappa$ ist, folgt mit Monotonie $\emptyset \neq G^{\xi+1}_a \cap (P)_\xi \subseteq G^\zeta_a \cap (P)_\xi$, was genau die Aussage der Rückrichtung der Äquivalenz im Lemma ist.
Genauso folgt für $\xi \notin \kappa$, daß $\emptyset = G^\lambda_a \cap (P)_\xi \supseteq G^\zeta_a \cap (P)_\xi$ ist, was aber der Hinrichtung entspricht.

HILFSDEFINITION

1. a heißt **akzeptabel**, falls die obige Bedingung ii) für a erfüllt ist.
2. Für akzeptables a ist sein **Crash-Punkt** definiert als
   $\mathrm{crp}(a) := \min\{\xi \in \kappa \mid G^{\xi+1}_a \cap (P)_\xi = \emptyset\}$.
3. Das **Kodierungsspiel mit Regeln** $\mathcal{G}^{\mathrm{Kode}}(\kappa)$ sei definiert durch:
   R1) I verliert, falls $x_I \in \mathcal{N}$ nicht akzeptabel ist.
   R2) II verliert, falls $x_{II} \in \mathcal{N}$ nicht akzeptabel ist.
   R3) II gewinnt genau dann, wenn $\mathrm{crp}(x_I) < \mathrm{crp}(x_{II})$ gilt.

Angenommen das Uniform Coding Lemma gilt nicht.
Dann besitzt jedes akzeptable a einen Crash-Punkt, d.h. das Kodierungsspiel ist wohldefiniert.
Nach [AD] ist $\mathcal{G}^{\mathrm{Kode}}(\kappa)$ determiniert, also besitzt ein Spieler eine GST.

Fall1) Angenommen I hat GST σ.
Dann ist für jedes $e \in \mathcal{N}$ $\sigma * [e]$ akzeptabel, da sich I an die Regeln hält.
Sei nun a^*, so daß $G^{\zeta}_{a^*} = \bigcup_{e \in \mathcal{N}} G^{\zeta}_{\sigma * [e]}$ ist.
Dann ist a^* akzeptabel, besitzt also einen Crash-Punkt ξ^*, und sei $x^* \in (P)_{\xi^*}$.
Sei nun e^* so, daß $G^{\zeta}_{e^*} = G^{\zeta}_{a^*} \cup \{x^*\}$ ist.
Offenbar ist e^* akzeptabel mit größerem Crash-Punkt als a^* und besiegt damit die Strategie σ, falls e^* von II gespielt wird.
Widerspruch zu σ GST

Fall2) Angenommen τ ist eine GST für II.

HILFSDEFINITION:
$A^{\xi}_{\epsilon,z} := \{x \mid \exists w \ (w \leq_{P \restriction \xi} z \wedge \{\epsilon\}(w) \downarrow \wedge x \in G^{\xi}_{\{\epsilon\}(w)})\}$
Es gilt $A^{\xi}_{\epsilon,z} \in \mathrm{pos}\Sigma^1_1(\leq_P)$ und nach dem Satz über den uniformen Abschluß ist $A^{\xi}_{\epsilon,z} = G^{\xi}_{\pi(\epsilon,z)}$, wobei π eine geeignete total rekursive Funktion ist.

HILFSDEFINITION:
$f(\epsilon, z) := [\pi(\epsilon, z)] * \tau$
Nach Rekursionstheorem existiert ein $\epsilon^* \in \mathcal{N}$, so daß für alle z gilt $\{\epsilon^*\}(z) \downarrow = f(\epsilon^*, z)$.

HILFSPROPOSITION:
Sei ϵ^* wie oben.
Dann folgt:
Für alle z ist $\{\epsilon^*\}(z)$ akzeptabel.
Falls ferner $z \in \mathrm{Fld}(P)$ ist, ist $\mathrm{crp}(\{\epsilon^*\}(z)) > |z|_P$.

BEW: Mittels Fallunterscheidung:

Fall 2.1) Sei $z \notin \mathrm{Fld}(P) \vee |z|_P = 0$.
Dann ist $A^{\xi}_{\epsilon,z} = \emptyset$.
Also ist $G^{\xi}_{\pi(\epsilon,z)} = \emptyset$.
Somit ist $\pi(\epsilon, z)$ akzeptabel.
Aber $\{\epsilon^*\}(z)$ ist die Antwort von II auf $\pi(\epsilon^*, z)$, also gilt, da τ GST ist, daß $\mathrm{crp}(\{\epsilon^*\}(z)) > \mathrm{crp}(\pi(\epsilon^*, z))$ ist.
Und damit ist $\mathrm{crp}(\{\epsilon^*\}(z)) > 0 = |z|_P$, was zu zeigen war.

Fall2.2) Sei $z \in \mathrm{Fld}(P)$.
Angenommen z ist ein Gegenbeispiel mit $|z|_P$ minimal.
Dann gilt, daß für alle $w \leq_P z \{\epsilon^*\}(w)$ akzeptabel ist und $\mathrm{crp}(\{\epsilon^*\}(w)) > |w|_P$ ist.
Somit ist $\pi(\epsilon^*, z)$ akzeptabel und es gilt $\mathrm{crp}(\pi(\epsilon^*, z)) \geq |z|_P$.
Daher folgt, daß $f(\epsilon^*, z) = [\pi(\epsilon^*, z)] * \tau$ akzeptabel mit noch größerem Crash-Punkt ist, da τ eine GST war.

Dies ist ein Widerspruch dazu, daß z Gegenbeispiel war.
Da im Falle der Existenz eines Gegenbeispiels eines mit minimalem Rang existiert, kann es kein Gegenbeispiel geben.
Dies war aber zu zeigen.

■

Wir haben uns an dieser Stelle diese Mühe gemacht, da der Fall einer GST für II komplizierter ist. Es kann sein, daß I bereits die erste Regel verletzt, und in diesem Fall darf II beliebig weiterspielen.

Wir können nun den Fall einer GST τ für II analog zum Widerspruch führen.
Betrachte dazu $\bigcup_{a\in\mathcal{N}} G^{\xi}_{\{e^*\}(a)} = G^{\xi}_{e^*}$.
Also ist e^* akzeptabel.
Falls aber I e^* spielt, so kann II das Spiel nicht gewinnen.
Damit war τ keine GST für II.
Somit besitzt kein Spieler eine GST im Widerspruch zu [AD].

Also war das Kodierungsspiel nicht wohldefiniert. Deshalb muß es ein a ohne Crash-Punkt geben, was gerade die Aussage des Uniform Coding Lemmas ist.
□

Korollar 2.114 (Coding Lemma)
*[AD] Sei $\leq_P$ PWO von $X \subseteq \mathcal{N}, \Gamma := \mathrm{pos}\Sigma^1_1(\leq)$. Sei G universell für $\Gamma \restriction \mathcal{N} \times Y$.
Und sei $Z \subseteq Fld_{\leq} \times Y$.
Dann gilt $\exists a \in \mathcal{N}\ G_a \subseteq Z \wedge \forall (\alpha, y) \in Z\ \exists (\alpha^*, y^*) \in G_a\ |\alpha|_P = |\alpha^*|_P$.*

Abbildung 5: Coding Lemma & Coding Lemma für PWO[23]

[23] Z^* trifft jede Komponente von Z & Z^* trifft jede Komponente von P, welche von Z getroffen wird

Warum ist das Coding Lemma ein Korollar aus dem Uniform Coding Lemma? Das Problem, warum dies nicht sofort einsichtig erscheint, liegt in der Formulierung des Coding Lemmas.
Würden wir es in der Form des Uniform Coding Lemmas formulieren, so lautete die Implikation des Coding Lemmas:
"Dann gilt $\exists a\ \forall \xi \leq \lambda\ (G_a^\lambda \cap (P)_\xi \neq \emptyset \leftrightarrow \xi \in \kappa)$" .
In dieser Formulierung ist das Coding Lemma trivialerweise ein Korollar des Uniform Coding Lemmas. Dies ist aber gerade die Aussage des Coding Lemmas, nämlich daß wir zu jeder PWO P der reellen Zahlen eine ausreichend definierbare[24], universelle Menge G assoziieren können, so daß zu jeder vorgegebenen Teilmenge des Ordnungstyps von P ein $a \in \mathcal{N}$ existiert, so daß G_a jede Komponente dieser Teilmenge trifft. Außerdem trifft G_a keine Komponente des Komplements dieser Teilmenge.

Wir kommen nun zur letzten Variante des Coding-Lemmas, welches nicht auf der Monotonie beruhen wird.
Sei dazu $\mathcal{X}$ vom Typ 1 und $\kappa < \Theta$ und sei $(K^\delta \mid \delta < \kappa)$ eine Sequenz, so daß für $\delta < \kappa$ das Tupel $K^\delta := (X^\delta, \leq_\delta)$ eine PWO der Länge λ_δ von $\emptyset \neq X_\delta \subseteq \mathcal{X}$ ist mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß je zwei solcher PWO disjunkt sind.
Also gilt für $\mu < \nu < \kappa$, daß $X_\mu \cap X_\nu = \emptyset$ ist.

Definition 2.115
In obiger Situation definiere für $a \in \bigcup_{\delta<\kappa} X^\delta$ eine Funktion $\varrho(a) := (\delta, \alpha)$, welche a das eindeutig bestimmte Paar, so daß $a \in (K^\delta)_\alpha$ gilt, zuordnet.

Offenbar sagt uns ϱ mit seiner ersten Koordinate, in welcher PWO wir nach a suchen müssen, während seine zweite Koordinate uns die Länge von a bezüglich dieser angibt.
Dieses Paar ist wegen der Disjunktheit der X^δ und der Eindeutigkeit der Länge einer PWO eindeutig.
Sei nun $\leq_2$ die lexikographische Ordnung auf Paaren von Ordinalzahlen.
Dann ist $\leq$ definiert durch $a \leq b :\leftrightarrow \varrho(a) \leq_2 \varrho(b)$ eine PWO auf $\bigcup_{\delta<\kappa} X^\delta$.

Definition 2.116
1. $X_{\delta,\alpha} := (\bigcup_{\gamma<\delta} X^\gamma) \cup (K^\delta)_\alpha$
2. $K_{\delta,\alpha} := (X_{\delta,\alpha}, \leq \cap (X_{\delta,\alpha} \times X_{\delta,\alpha}))$

Mit obigen Definitionen ist $K_{\delta,\alpha}$ eine PWO auf $X_{\delta,\alpha}$, die unseren nicht monotonen Charakter widerspiegelt.
Es gilt nämlich für $\alpha < \beta < \lambda_\delta$, daß weder $X_{\delta,\alpha} \subseteq X_{\delta,\beta}$ ist, noch die umgekehrte Inklusion zutrifft.
Sei im folgenden T eine PWO und betrachte $\mathrm{pos}\Sigma_1^1(\leq_T, \not\leq_T)$.

[24] das heißt in $\mathrm{pos}\Sigma_1^1(P)$

Satz 2.117 (Non-Monotonic Coding Lemma)
[AD] Sei $(K^\delta \mid \delta < \kappa)$ eine Sequenz wie oben. Dann gilt:
$\exists t \in \mathcal{N}\ \forall \delta < \kappa\ \forall \alpha < \lambda_\delta\ (G_t^{\leq_{K_{\delta,\alpha}}, \not\leq_{K_{\delta,\alpha}}} \cap (K^\delta)_\alpha = \emptyset \leftrightarrow \alpha = 0)$.

Der Beweis erfolgt ähnlich dem uniformen Fall und ist in [Hau], Kapitel V, Proposition 4.0 ausgeführt.

Im folgenden zeigen wir eine spezielle Anwendung des Uniform Coding Lemmas, welche wir später noch benutzten wollen.

Definition 2.118
Sei λ eine Kardinalzahl kleiner als Θ, f eine partielle Funktion von λ nach λ und Λ eine PWO der Länge λ.
Wir interpretieren eine reelle Zahl a als partielle Funktion von λ nach λ wie folgt:
$a(\eta) \downarrow = \beta :\leftrightarrow G_a^{\chi(\eta,\beta)+1} \cap (\Lambda)_{\chi(\eta,\beta)} \neq \emptyset \wedge \forall \tilde{\beta} < \beta\ G_a^{\chi(\eta,\tilde{\beta})+1} \cap (\Lambda)_{\chi(\eta,\tilde{\beta})} = \emptyset$
Hierbei sei $\chi(\eta, \beta)$ der Wert des Tupels (η, β) bezüglich der Gödelpaarungsfunktion[25].
*Wir nennen a einen **Λ-Kode für** f, falls $\forall \eta < \lambda\ a(\eta) \simeq f(\eta)$ gilt.*

Proposition 2.119
[AD] Sei λ eine Kardinalzahl kleiner Θ, f eine partielle Funktion von λ nach λ und sei Λ eine PWO der Länge λ.
Dann gibt es einen Λ-Kode für f.

BEW: Setze $E_f := \{\chi(\alpha, \beta) \mid f(\alpha) \downarrow = \beta\}$.
Nach dem Uniform Coding Lemma existiert ein $a \in \mathcal{N}$, so daß
$\forall \zeta \leq \lambda\ \forall \xi < \zeta\ G_a^\zeta \cap (\Lambda)_\xi \neq \emptyset \leftrightarrow \xi \in E_f$ gilt.
Also gilt aus Monotoniegründen $\forall \xi < \lambda$, daß $G_a^{\xi+1}$ eine Komponente ν von Λ genau dann trifft, wenn $\nu \in E_f \cap \{\xi + 1\}$ ist.
Also gilt nach Definition von $a(\nu)$ und wegen der Bijektivität von χ
$\forall \eta < \lambda\ f(\nu) \simeq a(\nu)$.

□

Man muß noch zeigen, daß man stets eine PWO Λ in einer ausreichend definierbaren Art und Weise[26] zu einem $\lambda < \Theta$ finde[27].
Wir werden dann einen Λ-Kode bezüglich einer solch definierbaren PWO **zulässig** nennen.
Konvention
Für eine Funktion g schreiben wir künftig ihren zulässigen Kode als ϵ_g.

[25] einer Bijektion zwischen λ und $\lambda \times \lambda$
[26] hier natürlich Σ_1^H
[27] was aber möglich ist

3 Techniken

3.1 Meßbare Kardinalzahlen

Für eine ausführlichere Beschäftigung mit meßbaren Kardinalzahlen sei auf [Jec97], Kapitel 5, und [Kan94], 1§2, verwiesen.
An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß sich mit dem Maßproblem[28] die Frage nach der Existenz meßbarer Kardinalzahlen stellte, aus dem sich das weite Feld der Theorie der großen Kardinalzahlen entwickelte.
Mit Hilfe der später in Kapitel 3.4 zu entwickelnden Technik wird es uns gelingen, unter [AD] zu zeigen, daß ω_1 meßbar ist.
Dies war die erste wichtige Anwendung des Solovay-Objekts, deren Verfeinerung wir dann im Hauptteil benutzen werden.

Definition 3.1
κ heißt ***meßbar*** *genau dann, wenn ein κ-vollständiger, echter UF auf κ existiert.*

Lemma 3.2
Sei $\mathcal{F}$ κ^+-vollständiger Filter auf κ, dann ist $\mathcal{F}$ nicht echt.

BEW: Betrachte $\mathcal{E} := \{\neg\{i\} \mid i \in \kappa \wedge \neg\{i\} \in \mathcal{F}\}$. Offenbar gibt es nur κ viele $i \in \kappa$, also folgt, da alle $\neg\{i\} \in \mathcal{E}$ nach Konstruktion auch Filtermengen sind und $\mathcal{F}$ nach Voraussetzung κ^+-vollständig ist, daß $\bigcap \mathcal{E} \in \mathcal{F}$ ist.

HILFSLEMMA:
$\forall X \in \mathcal{F} \ \bigcap \mathcal{E} \subseteq X$.
BEW:

Fall1) Sei $X = \kappa$.
Dann ist die Behauptung trivial.

Fall2) Sei $X \neq \kappa$ und sei $i \notin X$ beliebig. Dann ist $\neg\{i\}$ Obermenge von X, also im Filter.
Dann ist ebenfalls $\neg\{i\} \in \mathcal{E}$ nach Konstruktion von $\mathcal{E}$, also gilt auch $\{i\} \notin \bigcap \mathcal{E}$.
Aber i war beliebig gewählt, das heißt es gilt $\forall i \notin X \ \{i\} \notin \bigcap \mathcal{E}$, was aber die Behauptung des Hilfslemmas war.

■

Das Hilfslemma besagt aber gerade, daß $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap \mathcal{E} \in \mathcal{F}$ ist.
Also ist der Filter nicht echt.

□

[28] von Lebesgue 1902 aufgestellt

3.2 Woodinkardinalzahlen

Im folgenden werden wir drei Charakterisierungen für Woodinkardinalzahlen geben, die alle äquivalent sind, was aber hier nicht gezeigt werden wird. Hierbei wird die Definition diejenige Charakterisierung sein, die sich als nützlich für den Beweis des Hauptsatzes erweisen wird. Die übrigen Charakterisierungen werden dann in der Form von Sätzen formuliert, lassen sich aber üblicherweise auch als Definitionen für Woodinkardinalzahlen finden. Die erste alternative Charakterisierung ist die wohl gebräuchlichste Form einer Woodinkardinalzahl, die zweite zeigt, daß sich die Eigenschaft, Woodin zu sein, mittels Extendern charakterisieren läßt. Eine genaue Definition für einen Extender wird hier nicht angegeben, da wir das Konzept im folgenden nicht mehr benötigen werden. Sie kann aber z.B. bei [Kan94], Kapitel 26, nachgelesen werden.
Das Konzept einer Woodinkardinalzahl kristallisierte sich um 1984 heraus und es zeigte sich, daß sie genau die Stärke zur Verfügung stellte, um höhere Determiniertheit der projektiven Hierarchie zu beweisen.
Genauer heißt dies, daß es Martin 1970 gelang, aus der Existenz einer meßbaren Kardinalzahl Π^1_1-Determiniertheit zu zeigen.

Satz 3.3 (Martin(1970))
$[AC]$ *Falls es eine meßbare Kardinalzahl gibt, dann gilt* $\mathrm{Det}(\Pi^1_1)$.

Danach war lange Zeit unklar, was benötigt wurde, um die Determiniertheit auf höheren Stufen der projektiven Hierarchie zu zeigen.
Es gab Bestrebungen, Π^1_2-Determiniertheit aus der Existenz einer superkompakten Kardinalzahl zu folgern.
Das einzige positive Resultat war jedoch lange Zeit, Π^1_2-Determiniertheit aus einer ω-riesigen Kardinalzahl zu folgern, einer viel zu starken Annahme wie sich herausstellen sollte.
Schließlich gelang es mit Hilfe der Woodinkardinalzahlen zu zeigen:

Satz 3.4 (Martin, Steel(1989))
$[AC]$ *Falls es n paarweise verschiedene Woodinkardinalzahlen und eine meßbare Kardinalzahl gibt, die größer als jede dieser Woodins ist, dann gilt* $\mathrm{Det}(\Pi^1_{n+1})$.

Mit diesem Satz hatte man nicht nur die Schranke unter die einer superkompakten und damit erst recht einer ω-riesigen gedrückt, sondern man konnte sogar die gesamte projektive Hierarchie behandeln.
Bei diesem Beweis spielte das sogenannte One-Step-Lemma die zentrale Rolle. Es stellte sicher, daß man einen Schritt in der projektiven Hierarchie weiter kommt für jede Woodinkardinalzahl unterhalb einer meßbaren, mit der man, wie Martin 1970 gezeigt hatte, Π^1_1-Determiniertheit erhielt.

Satz 3.5 (One-Step-Lemma)
Sei κ Woodin und T ein κ^+-schwach homogener Baum.
Dann ist der korrespondierende Baum $\tilde{T}$ für alle $\lambda < \kappa$ λ-homogen.

Für die Beweise und eine Klärung der Terminologie sei auf den Artikel [Ste89] verwiesen.

Es läßt sich zeigen, daß z.B. superstarke Kardinalzahlen Woodin sind.
Ferner sind Woodins unerreichbar und κ Woodin impliziert z.B. die Existenz κ-vieler α-starker Kardinalzahlen für $\alpha < \kappa$, welche alle unterhalb von κ liegen.
Für eine detailliertere Analyse und Definitionen sei hierbei auf [Kan94], Kapitel 26, verwiesen.

Definition 3.6
δ ist ***Woodin****, falls δ eine Limesordinalzahl ist und außerdem gilt*
$\forall H \subseteq \delta\ \exists \alpha < \delta\ \forall \lambda \in [\alpha, \delta)\ \exists j : \mathbb{V} \preceq M\ \mathrm{crit}(j) = \alpha \wedge j(\alpha) \geq \lambda \wedge j(H) \cap \lambda = H \cap \lambda$

Proposition 3.7
Sei δ Woodin und sei $j : \mathbb{V} \prec M$ eine elementare Abbildung mit kritischem Punkt α, die dies bezeugt.
Dann ist $j(\alpha) \geq \lambda$ gleichbedeutend mit $\mathbb{V}_\lambda \subseteq M$.

BEW: Nach einer der vielen äquivalenten Formulierungen für Woodinkardinalzahlen gilt $\mathbb{V}_\lambda \subseteq M$.
Auf der anderen Seite betrachte:

1. Es gibt ein $n \in \omega$, so daß $j^n(\alpha) < \lambda$ und $j^{n+1}(\alpha) \geq \lambda$ ist.
   Dann ist j^{n+1} ebenfalls eine elementare Abbildung mit kritischem Punkt δ, die $j(\alpha) \geq \lambda$ erfüllt.
2. Für alle $n \in \omega$ ist $j^n(\alpha) < \lambda$.
   Dann ist $j_\omega(\alpha) + 1 \leq \lambda$.
   Nach Kunens Resultat kann es aber keine elementare Abbildung geben, so daß $\mathbb{V}_{j_\omega(\alpha)+1} \subseteq M$ ist.

□

Satz 3.8
δ ist ***Woodin*** $\leftrightarrow$
$\lim(\delta) \wedge \forall f \in \delta^\delta\ \exists \alpha < \delta\ \exists j : \mathbb{V} \preceq M\ \mathrm{crit}(j) = \alpha \wedge f''\alpha \subseteq \alpha \wedge \mathbb{V}_{j(f)(\alpha)} \subseteq M$

Satz 3.9
δ ist ***Woodin*** $\leftrightarrow \lim(\delta) \wedge \forall H \subseteq \delta\ \exists \alpha < \delta\ \forall \lambda < \alpha\ \exists a$ *a ist ein (α, λ, H)-Extender*

Proposition 3.10
Sei δ Woodin.
Dann ist δ regulär und die Menge $\{\alpha < \delta \mid \alpha$ meßbar $\}$ ist stationär in δ.
Also ist δ δ-Mahlo.

Proposition 3.11
Sei κ superstark.
Dann ist κ Woodin und es existiert ein normaler Ultrafilter $\mathcal{U}$ über κ, so daß die Menge $\{\alpha < \kappa \mid \alpha$ Woodin $\} \in \mathcal{U}$ ist.

3.3 Ein $\Diamond$-ähnliches Prinzip

Das Jensensche-Prinzip $\Diamond$ ist folgende Aussage:
Es existiert eine Sequenz $\langle S_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$, so daß für alle Teilmengen X von ω_1 die Menge $\{\alpha < \omega_1 \mid X \cap \alpha = S_\alpha\}$ stationär in ω_1 ist.

Dieses Prinzip gibt uns eine ω_1-lange Sequenz, die sehr viel Information über alle möglichen Teilmengen von ω_1 enthält.
Ich verweise für Anwendungen von $\Diamond$ auf [Jec97], Kapitel 4-22, gebe aber einige dort erwähnte Resultate explizit an.

Die Menge der reellen Zahlen ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt durch die folgenden Eigenschaften:
Sie ist linear geordnet, dicht, unbeschränkt, vollständig und separabel.

Suslin stellte bereits 1920 die Frage, ob die Eigenschaft, separabel zu sein, abgeschwächt werden könne.
Er formulierte das Suslin-Problem: Ist jede linear geordnete, dichte, vollständige, unbeschränkte Menge, welche die CCC erfüllt, isomorph zu den reellen Zahlen?
Hierbei bedeutet CCC (abzählbare Ketteneigenschaft, bzw. **c**ountable **c**hain **c**ondition), daß es keine überabzählbare, strikt absteigende Folge von reellen Zahlen geben kann.
Es stellte sich heraus, daß Suslins Problem unabhängig von den ZFC-Axiomen ist. Eine Umformulierung des Problems ergab die Frage nach der Existenz einer Suslin-Linie, einer linear geordneten, dichten Menge, die die CCC erfüllt, aber nicht separabel ist. Eine Suslin-Linie würde das Suslin-Problem im negativen Sinne entscheiden. Eine weitere Umformulierung ergab dann die Frage nach der Existenz eines Suslin-Baumes für dessen Definition auf [Jec97] (22.2) verwiesen sei.
Ein Suslin-Baum existiert genau dann, wenn eine Suslin-Linie existiert.

In $\mathbb{L}$ gilt das Prinzip $\Diamond$.
Das Prinzip $\Diamond$ impliziert die Existenz eines Suslin-Baumes.

In ähnlicher Weise wird in [Hau], Kapitel I-4, ein Prinzip $\Diamond_H$ in $\mathbb{L}(\mathbb{R})$ für $H \subseteq \Theta$ konstruiert.

Definition 3.12
$\Diamond_H$-Prinzip:
Es existiert eine partielle Σ_1^H-Funktion $\Diamond$ auf δ_H mit folgenden Eigenschaften:
1) Falls $\Diamond(\eta)\downarrow$ gilt, dann ist $\Diamond(\eta)$ eine PWO einer Teilmenge der reellen Zahlen.
2) Falls Ψ eine Σ_1^H-Aussage über $a \in \mathcal{N}$ und P einer PWO einer Teilmenge der reellen Zahlen mit $\mathbb{J}_\Theta(\mathbb{R}; H) \models \Psi(a, P, \Diamond, \delta_H; H)$ ist,
dann existiert ein $\eta \in \mathrm{dom}(\Diamond)$ mit $\mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R}; H) \models \Psi(a, \Diamond(\eta), \Diamond\restriction\eta, \eta; H)$.

Abbildung 6: Das $\Diamond_H$-Prinzip

Die Ähnlichkeit zwischen $\Diamond$ in $\mathbb{L}$ und dem $\Diamond_H$-Prinzip in $\mathbb{L}(\mathbb{R})$ besitzt drei Gründe.
Erstens erfolgt die Konstruktion dieses Prinzips sehr ähnlich der von $\Diamond$ in $\mathbb{L}$ mittels der Aufnahme minimaler Zeugen, wobei diese Methode aufgrund notwendiger technischer Feinheiten gegenüber dem Beweis für $\Diamond$ in $\mathbb{L}$ erschwert wird.
Zweitens, und dies halte ich für einen wichtigeren Grund, da er die Stärke und Anwendung des Prinzips darlegt, wird uns dieses Prinzip helfen, Σ_1^H-Aussagen bereits auf einer früheren Stufe der Hierarchie richtig "vorauszuraten". Dies wollen wir als Reflexionseigenschaft bezeichnen.
Auch mit $\Diamond$ in $\mathbb{L}$ war man in der Lage, Teilmengen von ω_1 "vorauszuraten".
Drittens ließe sich auch das $\Diamond$-Prinzip in $\mathbb{L}$ auf ähnliche Art, wie das $\Diamond_H$-Prinzip in $\mathbb{L}(\mathbb{R})$ formulieren.

Wir wollen im folgenden zwischen $\Diamond_H$ und dem $\Diamond_H$-Prinzip unterscheiden.
Ersteres ist die Funktion, welche uns das Prinzip bezeugt.

Satz 3.13 (Reflexionssatz)
$[\mathbb{V} = \mathbb{L}(\mathbb{R})]$ *Sei $H \subseteq \Theta$.*
Dann erfüllt $\Diamond_H$ das $\Diamond_H$-Prinzip.

Wir haben $\Diamond_H$ noch nicht definiert, werden dies aber im folgenden nachholen, und, sobald dies geschehen ist, den Satz beweisen.

Konvention
1) Wir fixieren zunächst für den Rest dieser Diplomarbeit eine Δ_0^H-Formel $\Phi_*^0(n, a, x, P, F, \eta; H)$, so daß
$\Phi_*(n, a, P, F, \eta; H) :\equiv \exists x\ \Phi_*^0(n, a, x, P, F, \eta; H)$ eine universelle Σ_1^H-Formel ist. Hierbei sei a aus den reellen Zahlen, x eine Mengenvariable, η aus den Ordinalzahlen, P eine ordinalzahl-definierbare PWO der reellen Zahlen, F eine partielle Funktion und H ein unäres Prädikat.
2) Mit dieser fixierten Formel assoziieren wir zwei weitere Formeln
2.1) $\Phi_\Diamond^0(a^*, x, P, F, \eta; H) :\leftrightarrow \Phi_*^0(a^*(0), (a^*(1), a^*(2), ...), x, P, F, \eta; H)$.
2.2) $\Phi_\Diamond(a^*, P, F, \eta; H) :\leftrightarrow \Phi_*(a^*(0), (a^*(1), a^*(2), ...), P, F, \eta; H)$.

Eine solche ω-universelle Formel[29] Φ_*^0 existiert stets, da es nur abzählbar viele Δ_0^H-Formeln in beliebigen Variablen gibt. Mit dem zweiten Teil der Konvention kodieren wir den natürlichen Parameter, der die Universalität bezeugt, bereits in den ersten reellen Parameter unserer Σ_1^H-Aussage. Somit erhalten wir eine Σ_1^H-Aussage, welche universell für Aussagen des selben Types ist. Dies wird uns ermöglichen, die universelle Aussage selbst herunter zu reflektieren.

Wir wollen nun den Beweis des $\Diamond$-Prinzips andeuten.
Dazu konstruiert man induktiv mit einer Methode, die wir Methode des kleinsten Gegenbeispiels nennen wollen, für $\alpha < \omega_1$ die Sequenz der S_α, welche das Jensen-Prinzip bezeugen soll, und parallel dazu eine Sequenz von club-Mengen C_α, wobei wir in den nicht-Limesschritten eine beliebige club-Menge wählen.
Setze $S_0 := C_0 := \emptyset$ und $S_{\alpha+1} := C_{\alpha+1} := \alpha + 1$.
Interessant sind die Limesschritte.
Dort untersucht man für $\lim(\alpha)$, ob es eine Menge C, welche club in α ist, und eine Teilmenge von α, die wir S nennen, gibt, so daß für alle $\xi \in C$ gilt $S \cap \xi \neq S_\xi$. Wir nennen ein solches Paar (S, C) ein Gegenbeispiel zu α.
Existiert ein solches Paar, so wählen wir das $<_{\mathbb{L}}$-minimale Paar (S_α, C_α) mit dieser Eigenschaft und haben so unser minimales Gegenbeispiel definiert. Im anderen Fall setzen wir $S_\alpha := C_\alpha := \alpha$.
Wir haben nun eine $\Diamond$-Sequenz wie gewünscht.
Denn angenommen, sie wäre dies nicht, dann gäbe es ein Gegenbeispiel dazu. Dann existiert aber auch ein $<_{\mathbb{L}}$-minimales Gegenbeispiel (T, D).
Dieses Gegenbeispiel wird dann auf ein abzählbares α herunterreflektiert, das heißt $(T \cap \alpha, D \cap \alpha)$ ist ein entsprechendes minimales Gegenbeispiel auf Stufe α. Damit erfüllt es aber die obige Eigenschaft und ist daher in unserer Sequenz der S_α, C_α gewählt worden.
D ist aber eine club-Menge, also gilt $\alpha \in D$ und damit folgt $S_\alpha = T \cap \alpha$ für ein $\alpha \in D$ im Widerspruch dazu, daß (T, D) ein Gegenbeispiel war.

[29] Unter ω-universell verstehen wir, daß die Formel universell und die Klasse ω-parametrisiert ist.

Diese Idee wollen wir aufgreifen, um $\Diamond_H$ zu konstruieren.
Ein erster naiver Ansatz ist der folgende.
Frage zu jedem Zeitpunkt $\zeta < \delta_H$, ob es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so daß für alle $\xi \in \mathrm{dom}(\Diamond_H \restriction \zeta)$ gilt $\neg\Phi_\Diamond(a, \Diamond(\xi), \Diamond\restriction\xi, \xi; H)$.
Ein solches a "sucht Beachtung" zum Zeitpunkt ζ, da für ein solches a unsere bisherige Konstruktion nicht ausreicht.
Sollte dieses a später in einer erfüllbaren Σ_1^H-Aussage auftreten, so haben wir es bislang noch nicht "vorausgeraten".
Untersuche nun, ob es eine ordinalzahl-definierbare Präwohlordnung P der reellen Zahlen gibt, so daß $\Phi_\Diamond(a, P, \Diamond\restriction\zeta, \zeta; H)$ gilt.
Wir sagen, ein solches P "dient" a, außerdem betrachten wir es in Analogie zum vorher Erwähnten als Gegenbeispiel.
Definiere dann als $\Diamond(\zeta)$ das $<_{\mathrm{OD}}$-minimale P.

Da wir nur eine partielle Funktion $\Diamond$ benötigen, werden wir $\Diamond$ nur auf einer Teilmenge der Klasse der H-sicheren Ordinalzahlen definieren. Wir teilen dazu C_H in disjunkte Intervalle auf, welche wir als H-Lücken bezeichnen wollen.
Die durch das erste Element einer H-Lücke indizierte Stufe wird Σ_1^H-elementares Submodell für alle von dieser H-Lücke indizierten Stufen sein, aber nicht für von einer anderen H-Lücke induzierte Stufen.
Da wir aus Komplexitätsgründen die Suche nach Gegenbeispielen beschränken müssen, bilden die H-Lücken einen solchen Begrenzer, da sich herausstellt, daß, falls es eine Stufe gibt, die ein Gegenbeispiel "findet", es auch eine H-Lücke gibt, in der dieses "gefunden" wird.
Es wird sich herausstellen, daß wegen dieser Beschränkung die $<_{\mathrm{OD}}$-Wohlordnung nicht gut genug ist, um das Gegenbeispiel zu minimieren, so daß wir diese zu einer Wohlordnung $<_{\mathrm{POD}}$ modifizieren müssen. Es kann geschehen, daß eine Stufe ein Gegenbeispiel "findet", das nicht $<_{\mathrm{OD}}$-minimal ist, aber das $<_{\mathrm{OD}}$-minimale Gegenbeispiel nicht "kennt". Dann müssen wir dieses suboptimale Gegenbeispiel akzeptieren, da wir die Suche beschränken wollen. Sollte eine spätere Stufe dann ein besseres Gegenbeispiel "finden", so werden wir dieses "ignorieren".
Konstruiere nun $\Diamond$ mittels Rekursion ungefähr wie folgt:
Frage zunächst zu jedem Zeitpunkt $\zeta < \delta_H$, ob ζ eine H-Lücke beginnt.
Ist dies der Fall, untersuche, ob es ein $a \in \mathcal{N}$ gibt, für das die Funktion bislang noch kein Gegenbeispiel P für Φ liefert.
Untersuche, falls auch dies der Fall ist, ob es in der H-Lücke ein Gegenbeispiel P gibt.
Sollte dies der Fall sein, so sei P_ζ der $<_{\mathrm{POD}}$-minimale Zeuge, und setze
$\Diamond(\zeta) := P_a$.

Definition 3.14
Sei $\xi \in C_H \upharpoonright \delta_H$.
Dann definiere:

1. $\mho(\xi) := \min\{\zeta \in C_H \upharpoonright \delta_H \mid \zeta$ *ist H-sicher und* $\mathbb{J}_\zeta(\mathbb{R}; H) \preceq_{\Sigma_1^H} \mathbb{J}_\xi(\mathbb{R}; H)\}$
2. $\Omega(\xi) := \sup\{\zeta \in C_H \upharpoonright \delta_H \mid \mathbb{J}_{\mho(\xi)}(\mathbb{R}; H) \preceq_{\Sigma_1^H} \mathbb{J}_\zeta(\mathbb{R}; H)\}$

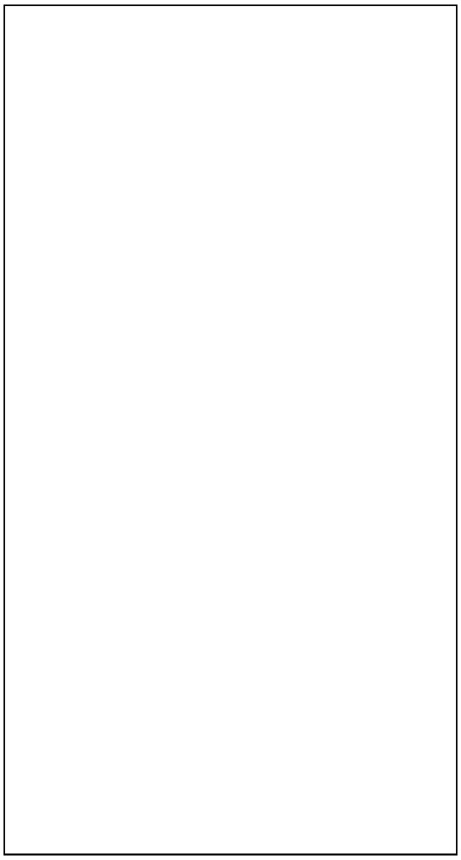

Abbildung 7: H-Lücken

Proposition 3.15
$\mho(\xi) \leq \xi \leq \Omega(\xi) \leq \delta_H$

BEW: Es ist $\mathbb{J}_\xi(\mathbb{R}; H) \preceq_{\Sigma_1^H} \mathbb{J}_\xi(\mathbb{R}; H)$.
Also ist $\mho(\xi) \leq \xi$.
Außerdem gilt $\mathbb{J}_{\mho(\xi)}(\mathbb{R}; H) \preceq_{\Sigma_1^H} \mathbb{J}_\xi(\mathbb{R}; H)$ nach Definition von $\mho(\xi)$.
Also ist $\xi \leq \Omega(\xi)$.
Schließlich ist δ_H das Supremum von $C_H \upharpoonright \delta_H$ nach 2.110.
Also gilt nach Definition von $\Omega(\xi)$ $\Omega(\xi) \leq \delta_H$.

$\square$

Lemma 3.16
Sei $\zeta < \xi \leq \eta$ *und* $\mathbb{J}_\zeta(\mathbb{R};H) \preceq_{\Sigma_1^H} \mathbb{J}_\eta(\mathbb{R};H)$.
Dann gilt $\mathbb{J}_\zeta(\mathbb{R};H) \preceq_{\Sigma_1^H} \mathbb{J}_\xi(\mathbb{R};H)$.

BEW: Offensichtlich gilt nach Definition von $\preceq_{\Sigma_1^H}$, daß eine Σ_1^H-Aussage, falls sie im größeren Modell $\mathbb{J}_\eta(\mathbb{R};H)$ durch Zeugen im kleineren Modell $\mathbb{J}_\zeta(\mathbb{R};H)$ erfüllbar ist, bereits in diesem kleineren Modell gilt.
Sei also eine Σ_1^H-Aussage erfüllbar in $\mathbb{J}_\xi(\mathbb{R};H)$ mit Zeugen aus $\mathbb{J}_\zeta(\mathbb{R};H)$.
Dann gilt sie auch im größeren Modell $\mathbb{J}_\eta(\mathbb{R};H)$ mit denselben Zeugen und damit, da dieses Σ_1^H-elementares Submodell von $\mathbb{J}_\zeta(\mathbb{R};H)$ war, gilt die Aussage auch dort.
Dies ist aber genau die Bedingung dafür, daß $\mathbb{J}_\zeta(\mathbb{R};H) \preceq_{\Sigma_1^H} \mathbb{J}_\xi(\mathbb{R};H)$.
□

Man beachte aber, daß in obiger Situation im allgemeinen
nicht $\mathbb{J}_\xi(\mathbb{R};H) \preceq_{\Sigma_1^H} \mathbb{J}_\eta(\mathbb{R};H)$ gilt, selbst wenn H die leere Menge wäre.

Lemma 3.17
Seien $\eta, \xi \in C_H \restriction \delta_H$.
Dann gilt:

1. $\mho(\xi) \leq \xi \leq \Omega(\xi) < \delta_H$
2. $\mho(\xi) \leq \eta \leq \Omega(\xi)$ *impliziert* $\mho(\eta) = \mho(\xi) \wedge \Omega(\eta) = \Omega(\xi)$

BEW:

1. Wegen Proposition 3.15 muß nur noch gezeigt werden, daß $\Omega(\xi) < \delta_H$ gilt.
   Angenommen es gelte für ein beliebiges ξ wie in Definition (...), daß $\mho(\xi) < \delta_H \leq \Omega(\xi)$ ist.
   Offenbar ist $\mho(\xi) < \delta_H$, da $\xi \in C_H \restriction \delta_H$.
   Also ist $\xi < \delta_H$ und $\mho(\xi) \leq \xi$.
   Dann gilt $\mathbb{J}_{\mho(\xi)}(\mathbb{R};H) \preceq_{\Sigma_1^H} \mathbb{J}_{\Omega(\xi)}(\mathbb{R};H)$ nach Definition.
   Also folgt mit Lemma 3.16 und Proposition 3.15 $\mathbb{J}_{\mho(\xi)}(\mathbb{R};H) \preceq_{\Sigma_1^H} \mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R};H)$.
   Aber nach Definition von δ_H ist $\mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R};H) \preceq_{\Sigma_1^H} \mathbb{J}_\Theta(\mathbb{R};H)$.
   Deshalb folgt mit der Transitivität von $\preceq$, daß $\mathbb{J}_{\mho(\xi)}(\mathbb{R};H) \preceq_{\Sigma_1^H} \mathbb{J}_\Theta(\mathbb{R};H)$ im Widerspruch zur Minimalität von δ_H gilt.
   Also gilt für alle $\xi \in C_H \restriction \delta_H$, daß $\Omega(\xi) < \delta_H$ ist.

2. Es gilt nach Definition 3.14, daß $\mathbb{J}_{\mho(\xi)}(\mathbb{J};H) \preceq_{\Sigma_1^H} \mathbb{J}_{\Omega(\xi)}(\mathbb{J};H)$ ist.
   Also folgt wieder mit Lemma 3.16, daß $\mathbb{J}_{\mho(\xi)}(\mathbb{R};H) \preceq_{\Sigma_1^H} \mathbb{J}_\eta(\mathbb{R};H)$ und damit $\mho(\eta) \leq \mho(\xi)$ gilt.
   Angenommen es ist $\mho(\eta) < \mho(\xi)$.
   Dann folgt nach Lemma 3.16 $\mathbb{J}_{\mho(\eta)}(\mathbb{R};H) \preceq_{\Sigma_1^H} \mathbb{J}_{\mho(\xi)}(\mathbb{R};H)$.
   Aus der Transitivität folgt $\mathbb{J}_{\mho(\eta)}(\mathbb{R};H) \preceq_{\Sigma_1^H} \mathbb{J}_\xi(\mathbb{R};H)$ im Widerspruch zur Minimalität von $\mho(\xi)$.
   Also ist $\mho(\xi) = \mho(\eta)$ und damit folgt auch $\Omega(\xi) = \Omega(\eta)$.

□

Definition 3.18

1. *Wir sagen ζ **startet eine H-Lücke**, geschrieben* $\mathrm{Start}_H(\zeta)$, *falls ζ H-sicher und $\mho(\zeta) = \zeta$ ist.*

2. *In diesem Fall nennen wir das Intervall $[\mho(\zeta), \Omega(\zeta)]$ eine **H-Lücke**.*

Definition 3.19

1. *Im folgenden stehe* RAS *für "ranks are sets" , das heißt für den Satz:*
   $\varrho_\in$ ist für jede Menge definiert und
   für jede Ordinalzahl ξ ist $\{x \mid \varrho_\in(x) < \xi\}$ eine Menge.

2. *Außerdem stehe* POD *für die **Klasse der ordinalzahl-definierbaren Präwohlordnungen**.*

Lemma 3.20

1. *Seien $P \in \mathrm{POD}$ und $\nu < \Theta$.*
   Dann gibt es ein $\eta \in (\nu, \Theta)$, so daß $P \in \mathbb{J}_\eta(\mathbb{R}) \wedge \mathbb{J}_\eta(\mathbb{R}) \models P \in \mathrm{POD} \wedge \mathrm{RAS}$ gilt.

2. *Seien ferner $\nu < \delta_H$ und $P \in \mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R})$, dann ist das kleinste solche η kleiner als δ_H.*

BEW:

1. Es gilt $P \in \mathbb{J}(\mathbb{R}) \wedge \mathbb{J}(\mathbb{R}) \models P \in \mathrm{POD} \wedge \mathrm{RAS}$.
   Nach Proposition 2.105 ist $\mathbb{J}_\Theta(\mathbb{R})$ ein Σ_1^H-elementares Submodell von $\mathbb{J}(\mathbb{R})$, also reflektiert obige Aussage auf die Stufe Θ herunter.
   Und damit gibt es ein η zwischen ν und Θ, so daß die durch η indizierte Stufe ein Modell dieser Aussage ist, da Θ regulär ist.

2. Aus denselben Gründen, nämlich der Σ_1^H-elementaren Submodelleigenschaft, reflektiert sich dies auf δ_H herunter.

$\square$

Das obige η ist im allgemeinen nicht H-sicher, aber das folgende Lemma zeigt, daß ein solches η strikt innerhalb einer H-Lücke gefunden werden kann.

Lemma 3.21

1. *Sei $P \in \mathrm{POD}$.*
   Dann existieren Ordinalzahlen $\zeta < \eta < \xi < \Theta$ mit den Eigenschaften:

   1.1. *ζ und ξ sind H-sicher und liegen in derselben H-Lücke.*

   1.2. *$P \in \mathbb{J}_\eta(\mathbb{R})$ und $\mathbb{J}_\eta(\mathbb{R}) \models P \in \mathrm{POD} \wedge \mathrm{RAS}$.*

2. *Falls ferner $P \in \mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R})$ ist, können diese Ordinalzahlen unterhalb von δ_H gefunden werden.*

BEW:

1. Nach Lemma 3.20 findet man ein solches η innerhalb von (δ_H, Θ), indem man $\nu := \delta_H$ setzt.
   Dann existiert ein $\xi \in (\eta, \Theta)$, da C_H club in Θ ist.
   Setze schließlich $\zeta := \delta_H$.

2. Reflektiere dieses mittels Σ_1^H-Elementarität auf δ_H herunter.

$\square$

Definition 3.22
Sei $P \in \mathrm{POD}$.
Definiere:

1. $\tilde{\xi}(P) := \min\{\xi \in \mathrm{ON} \mid \xi$ *ist* H*-sicher* $\wedge \mho(\xi) < \xi$
   $\wedge \exists \eta \in (\mho(\xi), \xi)\ P \in \mathbb{J}_\eta(\mathbb{R}) \wedge \mathbb{J}_\eta(\mathbb{R}) \models (P \in \mathrm{POD} \wedge \mathrm{RAS})\}$

2. $\tilde{\eta}(P) := \min\{\eta \in \mathrm{ON} \mid \eta \in (\mho(\tilde{\xi}(P)), \tilde{\xi}(P)) \wedge P \in \mathbb{J}_\eta(\mathbb{R})$
   $\wedge \mathbb{J}_\eta(\mathbb{R}) \models (P \in \mathrm{POD} \wedge \mathrm{RAS})\}$

Abbildung 8: Die Konstruktion von $<_{POD}$[30]

$\tilde{\xi}$ minimiert zunächst die H-Lücke.
Danach minimiert $\tilde{\eta}$ innerhalb dieser H-Lücke.
Das hier definierte $\tilde{\eta}$ ist nicht notwendigerweise die erste Ordinalzahl, die dies bezeugt[31], aber es ist die erste, welche strikt innerhalb einer H-Lücke liegt.

[30] Für ein gegebenes P findet man links ξ, welche H-sicher sind, rechts η, die geeignete Stufen indizieren.
[31] siehe auch Bild

Definition 3.23
Definiere eine Wohlordnung auf POD *durch:*
$Q <_{\text{POD}} P :\leftrightarrow \tilde{\eta}(Q) < \tilde{\eta}(P) \vee (\tilde{\eta}(Q) = \tilde{\eta}(P) \wedge \mathbb{J}_{\tilde{\eta}(Q)}(\mathbb{R}) \models Q <_{\text{OD}} P)$

Wir haben nun alle Vorbereitungen getroffen, um $\Diamond_H$ zu definieren.

Definition 3.24

1. *Das Paar* (f,ζ) *heißt* ***Präversuch*** *(**pre****at**tempt), geschrieben* $\text{pat}(f,\zeta)$ *genau dann, wenn* f *eine Funktion ist und*
   $\text{dom}(f) \subseteq \zeta \wedge \text{Start}_H(\zeta) \wedge \forall \xi \in \text{dom}(f)\ \text{Start}_H(\xi)$

2. *Wir sagen* a ***sucht Beachtung*** *(**s**eeks **at**tention), geschrieben* $\text{sat}(f,\zeta,a)$, *genau dann, wenn* $a \in \mathbb{R} \wedge \text{pat}(f,\zeta) \wedge \forall \xi \in \text{dom}(f)\ f\restriction(\xi+1) \in \mathbb{J}_\zeta(\mathbb{R};H)$
   $\wedge \forall \xi \in \text{dom}(f)\ \forall x \in \mathbb{J}_\zeta(\mathbb{R};H)\ \mathbb{J}_\zeta(\mathbb{R};H) \models \neg\Phi^0_\Diamond(a,x,f(\xi),f\restriction\xi,\xi;H)$

3. *Wir sagen* f ***dient*** *(**serve**s)* a, *geschrieben* $\text{serve}(P,\eta,\xi,f,\zeta,a)$, *genau dann, wenn*
   $\text{sat}(f,\zeta,a) \wedge \zeta < \eta < \xi \wedge \mathbb{J}_\zeta(\mathbb{R};H) \preceq_{\Sigma_1^H} \mathbb{J}_\xi(\mathbb{R};H) \wedge f \in \mathbb{J}_\xi(\mathbb{R};H)$
   $\wedge P \in \mathbb{J}_\eta(\mathbb{R};H) \wedge \mathbb{J}_\eta(\mathbb{R};H) \models (P \in \text{POD} \wedge \text{RAS})$
   $\wedge \exists x \in \mathbb{J}_\xi(\mathbb{R};H)\ \mathbb{J}_\xi(\mathbb{R};H) \models \Phi^0_\Diamond(a,x,P,f,\zeta;H)$

Präversuche sind partielle Funktionen, welche auf Ordinalzahlen definiert sind, die eine H-Lücke starten.
Obige Formeln sind allesamt Δ_1^H.
Wir können als nächstes einen ersten Kandidaten definieren, indem wir zunächst den Zeitpunkt der Konstruktion eines solchen P minimieren, danach den Zeugen, und schließlich P selbst innerhalb der Wohlordnung $<_{OD}$.

Definition 3.25

1. *Setze* $\xi(f,\zeta) := \min\{\xi \mid \exists \eta < \xi\ \exists P \in \mathbb{J}_\eta(\mathbb{R};H)\ \exists a \in \mathbb{R}\ \text{serve}(P,\eta,\xi,f,\eta,a)\}$.

2. *Falls die partielle Funktion* ξ *für das Paar* (f,ζ) *definiert ist, setze*
   $\eta(f,\zeta) := \min\{\eta < \xi(f,\zeta) \mid \exists P \in \mathbb{J}_\eta(\mathbb{R};H)\ \exists a \in \mathbb{R}\ \text{serve}(P,\eta,\xi(f,\zeta),f,\zeta,a)\}$.

3. *Setze* $F(f,\zeta) \simeq P :\leftrightarrow$
   $\xi(f,\zeta)\downarrow \wedge \eta(f,\zeta)\downarrow \wedge \exists a \in \mathbb{R}\ \text{serve}(P,\eta(f,\zeta),\xi(f,\zeta),f,\zeta,a)$
   $\wedge \forall Q \in \mathbb{J}_\eta(\mathbb{R})\ ((\mathbb{J}_\eta(\mathbb{R}) \models$
   $(Q \in \text{POD} \wedge Q <_{\text{OD}} P)) \to \neg\exists \tilde{a} \in \mathbb{R}\ \text{serve}(Q,\eta(f,\zeta),\xi(f,\zeta),f,\zeta,\tilde{a}))$

$F(f,\zeta) \simeq P$ ist Σ_1^H.

Definition 3.26

1. $\lambda(f) := \sup\{\nu+1 \mid \nu \in \text{dom}(f)\}$

2. *Wir nennen eine partielle Funktion* f *einen* ***Versuch*** *(**at**tempt), geschrieben* $\text{at}(f)$, *genau dann, wenn* $\text{pat}(f,\lambda(f)) \wedge \forall \nu < \lambda(f)\ f(\nu) \simeq F(f\restriction\nu,\nu)$ *ist.*

3. *Wir sagen zwei partielle Funktionen f, g* ***sind sich einig*** *(**ag**ree), geschrieben ag(f, g), genau dann, wenn $\lambda = \inf\{\lambda(f), \lambda(g)\} \rightarrow f{\restriction}\lambda = g{\restriction}\lambda$ ist.*

Versuche sind Präversuche, welche auf ihrem Definitionsbereich die minimalen Gegenbeispiele liefern.
Die Funktion λ ist rudimentär.
$\mathrm{at}(f)$ ist aber eine Δ_2^H-Formel, weshalb wir noch die Komplexität senken müssen.

Proposition 3.27
Je zwei Versuche sind sich einig.

BEW: Angenommen es gäbe zwei Versuche f und g, die sich nicht einig wären. Sei dann $\nu < \inf\{\lambda(f), \lambda(g)\}$ minimal mit der Eigenschaft $\neg f(\nu) \simeq g(\nu)$. Ein solches ν existiert, da sich die beiden Versuche nicht einig sind.
Dann gilt aber, da ν minimal ist, daß $f{\restriction}\nu = g{\restriction}\nu$ ist.
Also folgt mit der Definition von Versuch:
$f(\nu) \simeq F(f{\restriction}\nu, \nu) = F(g{\restriction}\nu, \nu) \simeq g(\nu)$. Widerspruch zur Uneinigkeit.
$\square$

Um zu verhindern, daß unsere partiellen Funktionen leer sind, definieren wir nun Funktionen mit maximalem Definitionsbereich.

Definition 3.28
f heißt ***vollständiger Versuch bis zum Zeitpunkt*** *(**f**ull **at**tempt up to) ζ, geschrieben fat(f, ζ), genau dann, wenn $\mathrm{Start}_H(\zeta) \wedge f = \bigcup\{g \in \mathbb{J}_\zeta(\mathbb{R}; H) \mid \mathbb{J}_\zeta(\mathbb{R}; H) \models \mathrm{at}(g)\}$ gilt.*

Obiges ist eine Δ_1^H-Formel.

Definition 3.29
$\Diamond_H := \bigcup\{f \mid \exists\zeta\ \mathrm{fat}(f, \zeta)\}$

Wir haben nun unsere Σ_1^H-Funktion definiert, welche den Satz erfüllt.
Zur Erinnerung: Es ist unter $[\mathbb{V} = \mathbb{L}(\mathbb{R})]$ zu zeigen:

Sei $H \subseteq \Theta$.
Dann besitzt die partielle Σ_1^H-Funktion $\Diamond_H$ auf δ_H folgende Eigenschaften:

1. Falls $\Diamond_H(\eta)$ definiert ist, dann ist $\Diamond_H(\eta)$ PWO einer Teilmenge der reellen Zahlen.

2. Falls Ψ eine Σ_1^H-Aussage über $a \in \mathcal{N}$, P einer PWO einer Teilmenge der reellen Zahlen mit $\mathbb{J}_\Theta(\mathbb{R}; H) \models \Psi(a, P, \Diamond_H, \delta_H; H)$ ist, dann existiert ein $\eta \in \mathrm{dom}(\Diamond_H)$ mit $\mathbb{J}_{\delta_H} \models \Psi(a, \Diamond_H(\eta), \Diamond_H{\restriction}\eta, \eta; H)$.

Es folgt der Beweis von Satz 3.13.

BEW:

1. Gilt nach Konstuktion von $\diamondsuit_H$.

2. Es sei $\Psi :\equiv \exists x\ \Psi^0$.
Angenommen der Satz gelte nicht.
Dann existiert ein Paar (a, P), für das die Prämisse gilt, aber die Folgerung nicht.
Also gilt nach Definition $\mathrm{sat}(\diamondsuit_H \restriction \delta_H, \delta_H, a)$.
Ferner gilt wegen der Prämisse, daß ein Zeuge $x \in \mathbb{J}_\Theta(\mathbb{R}; H)$ existiert, sowie ξ und η mit $\mathrm{serve}(P, \eta, \xi, \diamondsuit_H \restriction \delta_H, \delta_H, a)$.
Deshalb existieren auch minimale $\xi^* := \xi(\diamondsuit_H \restriction \delta_H, \delta_H), \eta^* := \eta(\diamondsuit_H \restriction \delta_H, \delta_H)$ und $P^* := F(\diamondsuit_H \restriction \delta_H, \delta_H)$, sowie ein $a^* \in \mathcal{N}$, so daß
$\mathrm{serve}(P^*, \eta^*, \xi^*, \diamondsuit_H \restriction \delta_H, \delta_H, a^*)$ gilt.
Also gilt nach Definition von serve, daß $\mathrm{sat}(\diamondsuit_H \restriction \delta_H, \delta_H, a^*)$ gilt.
Betrachte folgende Σ_1^H-Aussage:
$\exists \zeta\ \exists f\ \mathrm{fat}(f, \zeta) \wedge \xi(f, \zeta) \downarrow \wedge \eta(f, \zeta) \downarrow \wedge F(f, \zeta) \downarrow$
$\wedge \mathrm{serve}(F(f, \zeta), \eta(f, \zeta), \xi(f, \zeta), f, \zeta, a^*)$.
Nach den Definitionen der einzelnen Begriffe und dem vorher Erwähnten wird diese Aussage von $\diamondsuit_H \restriction \delta_H$ und von δ_H in $\mathbb{J}_\Theta(\mathbb{R}; H)$ bezeugt.
Es ist $\mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R}; H) \preceq_{\Sigma_1^H} \mathbb{J}_\Theta(\mathbb{R}; H)$.
Also existieren Zeugen f^* und ζ^* in $\mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R}; H)$.
Somit gilt:
$\mathrm{fat}(f^*, \zeta^*) \wedge \xi(f^*, \zeta^*) \downarrow \wedge \eta(f^*, \zeta^*) \downarrow \wedge F(f^*, \zeta^*) \downarrow$
$\wedge \mathrm{serve}(F(f^*, \zeta^*), \eta(f^*, \zeta^*), \xi(f^*, \zeta^*), f^*, \zeta^*, a^*)$.
Da $\mathrm{fat}(f^*, \zeta^*)$ impliziert, daß ζ^* eine H-Lücke startet, gilt $f^* = \diamondsuit_H \restriction \zeta^*$ nach Definition von $\diamondsuit_H$.
Es gilt ferner $\zeta^* < \eta(f^*, \zeta^*) < \xi(f^*, \zeta^*)$.
Also gilt, da diese alle in $\mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R}; H)$ liegen, daß $\zeta^* < \delta_H$ ist.
Somit folgt, da alle auch in derselben H-Lücke liegen, daß $\zeta^* < \eta(f^*, \zeta^*) < \xi(f^*, \zeta^*) < \delta_H$ ist.
Nun gilt nach Definition von $\diamondsuit_H$, daß $\diamondsuit_H(\zeta^*) \simeq F(\diamondsuit_H \restriction \zeta^*, \zeta^*)$ ist, was wiederum, wie oben gezeigt, gleich $F(f^*, \zeta^*)$ ist.
Daher folgt aber, daß $\diamondsuit_H(\zeta^*)$ existiert.
Somit ist $\zeta^* \in \mathrm{dom}(\diamondsuit_H)$.
Alles zusammen ergibt nun
$\mathrm{serve}(\diamondsuit_H(\zeta^*), \eta(f^*, \zeta^*), \xi(f^*, \zeta^*), \diamondsuit_H \restriction \zeta^*, \zeta^*, a^*)$.
Also folgt
$\exists x \in \mathbb{J}_{\xi(f^*, \zeta^*)}(\mathbb{R}; H)\ \mathbb{J}_{\xi(f^*, \zeta^*)}(\mathbb{R}; H) \models \Psi^0(a^*, x, \diamondsuit_H(\zeta^*), \diamondsuit_H \restriction \zeta^*, \zeta^*; H)$.
Daher ist $\xi(f^*, \zeta^*) < \delta_H$.
Also folgt $\exists x \in \mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R}; H)\ \mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R}; H) \models \Psi^0(a^*, x, \diamondsuit_H(\zeta^*), \diamondsuit_H \restriction \zeta^*, \zeta^*; H)$ im Widerspruch zur Definition von $\mathrm{sat}(\diamondsuit_H \restriction \delta_H, \delta_H, a^*)$.

□

3.4 Filterkonstruktion unter AD

Definition 3.30
Sei $A \subseteq \mathcal{N}$ unendlich.
*Dann heißt $[A]^{\aleph_0} := \{X \subseteq A \mid \mathrm{card}(X) = \aleph_0\}$ die **Menge der abzählbaren Teilmengen von** A.*

Definition 3.31
Sei $S \subseteq [A]^{\aleph_0}$.
*Dann definiere das **Solovay-Spiel mit Regeln** $\mathcal{G}^{\mathrm{Sol}}(A,S)$ durch:*
Spieler I spielt ein $a \in \mathcal{N}$ aufgefasst als ω-Sequenz von $a^{[n]} \in \mathcal{N}$[32].
Spieler II spielt ein $e \in \mathcal{N}$, welches analog interpretiert wird.
Es gelten ferner folgende Regeln:
$R[2i]$) Falls $a^{[i]} \notin A$ ist, dann gewinnt II.
$R[2i+1]$) Falls $e^{[i]} \notin A$ ist, dann gewinnt I.
$R[\omega]$) Ansonsten gewinnt II genau dann, wenn $\{a^{[i]}, e^{[i]} \mid i \in \omega\} \in S$ ist.

Definition 3.32
$\mathcal{W}(A) := \{S \subseteq [A]^{\aleph_0} \mid$ *II hat GST in* $\mathcal{G}^{\mathrm{Sol}}(A,S)\}$

Definition 3.33
*Ein Filter $\mathcal{F}$ auf $[A]^{\aleph_0}$ heißt **fein**, falls $\forall a \in A \ \{s \in [A]^{\aleph_0} \mid a \in s\} \in \mathcal{F}$.*

Satz 3.34 (Solovay)
1. *Falls A eine abzählbare Teilmenge hat,*
   dann ist $\mathcal{W}(A)$ ein feiner Filter auf $[A]^{\aleph_0}$.
2. *$[AC_{\aleph_0}(\mathcal{N})]$ $\mathcal{W}(A)$ ist zusätzlich abzählbar vollständig.*
3. *$[AD]$ $\mathcal{W}(A)$ ist zusätzlich Ultrafilter.*

Ich werde den Beweis führen, indem ich die drei Aussagen als einzelne Propositionen beweise.

Proposition 3.35
Falls A eine abzählbare Teilmenge hat, dann ist $\mathcal{W}(A)$ ein feiner Filter auf $[A]^{\aleph_0}$.

BEW:

F1) Es gilt $\emptyset \notin \mathcal{W}(A)$, da offenbar II keine GST haben kann.

F4) Ferner ist $[A]^{\aleph_0} \in \mathcal{W}(A)$, da II trivialerweise eine GST hat, indem er stets so spielt, daß für ein $a \in A$ und für alle $i \in \omega$ gilt, daß $a^{[i]} = a$ ist.

F2) Sei $X \in \mathcal{W}(A), X \subseteq Y$.
Dann ist auch $Y \in \mathcal{W}(A)$, da eine GST τ für II in $\mathcal{G}^{\mathrm{Sol}}(A,X)$ offenbar auch eine GST für II in $\mathcal{G}^{\mathrm{Sol}}(A,Y)$ ist.

[32] zur Erinnerung siehe 2.7

F3) Seien $X, Y \in \mathcal{W}(A)$.
Dann hat II GST τ_X in $\mathcal{G}^{\mathrm{Sol}}(A, X)$ und τ_Y in $\mathcal{G}^{\mathrm{Sol}}(A, Y)$.
Sei nun a ein beliebiges Spiel von I in $\mathcal{G}^{\mathrm{Sol}}(A, X \cap Y)$.
Wir konstruieren nun eine GST[33] $\tau_{X\cap Y}$ wie folgt:

$I \quad a^{[0]}(0) \quad a^{[0]}(1) \quad a^{[1]}(0) \quad a^{[0]}(2)...$
Spiel1
$\tau_{X\cap Y} \quad \boxed{e_X^{[0]}(0)} \quad \boxed{e_X^{[0]}(1)} \quad \boxed{e_Y^{[0]}(0)} \quad \boxed{e_X^{[0]}(2)} \quad \boxed{e_Y^{[0]}(1)} \quad \boxed{e_X^{[1]}(0)}$
...

$I \quad \boxed{a^{[0]}(0)} \quad \boxed{a^{[0]}(1)} \quad \boxed{e_Y^{[0]}(0)} \quad \boxed{a^{[0]}(2)} \quad \boxed{e_Y^{[0]}(1)} \quad \boxed{a^{[1]}(0)}$
...
Spiel2
$\tau_X \quad e_X^{[0]}(0) \quad e_X^{[0]}(1) \quad e_X^{[1]}(0) \quad e_X^{[0]}(2)...$

$I \quad \boxed{a^{[0]}(0)} \quad \boxed{a^{[0]}(1)} \quad \boxed{e_X^{[0]}(0)} \quad \boxed{a^{[0]}(2)} \quad \boxed{e_X^{[0]}(1)} \quad \boxed{a^{[1]}(0)}$
...
Spiel3
$\tau_Y \quad e_Y^{[0]}(0) \quad e_Y^{[0]}(1) \quad e_Y^{[1]}(0) \quad e_Y^{[0]}(2)...$

An dieser Stelle möchte ich darauf hinweisen, daß es bei dieser speziellen Art von Spielen nicht reicht, die Züge zu kopieren.
Man muß darüberhinaus aufpassen, daß jeder Zug auch an die richtige Stelle kopiert wird, da wir die Folge der Züge dekodieren, um ω viele reelle Zahlen zu erhalten.
Mit unserer Bijektion $\langle . \rangle$ erhalten wir:
II spielt ein e im ersten Spiel definiert durch
$e(\langle 2j, k\rangle) := e_X^{[j]}(k) = e_X(\langle j, k\rangle)$
$e(\langle 2j+1, k\rangle) := e_Y^{[j]}(k)$
I spielt ein a_X im zweiten Spiel definiert durch:
$a_X(\langle 2j, k\rangle) := a^{[j]}(k)$
$a_X(\langle 2j+1, k\rangle) := e_Y^{[j]}(k)$
Analog definieren wir das a_Y, welches I im dritten Spiel spielt.
Wie man leicht sieht, sind $a^{[i]}(n), e_X^{[i]}(n), e_Y^{[i]}(n)$ bereits definiert, sobald darauf in der Definition zurückgegriffen wird.
Ferner entstehen die $e_X^{[i]}(n)$ dadurch, daß II der Strategie τ_X folgt, und die $e_Y^{[i]}(n)$ durch Befolgung von τ_Y.
Daher ist das 2. Spiel ein Spiel in $\mathcal{G}^{\mathrm{Sol}}(A, X)$ gemäß τ_X, also gewinnt II.
Analog gewinnt II das dritte Spiel in $\mathcal{G}^{\mathrm{Sol}}(A, Y)$.
Nach Definition von $\mathcal{G}^{\mathrm{Sol}}$ folgt

[33]siehe auch den Anhang für eine schrittweise Konstruktion

$\{a^{[i]}(n), e_X^{[i]}(n), e_Y^{[i]}(n) \mid i,n \in \omega\} \in X \wedge$
$\{a^{[i]}(n), e_X^{[i]}(n), e_Y^{[i]}(n) \mid i,n \in \omega\} \in Y$.
Also ist $\{a^{[i]}(n), e_X^{[i]}(n), e_Y^{[i]}(n) \mid i,n \in \omega\} \in X \cap Y$.
Somit gewinnt II also auch das 1. Spiel.
Also ist $\tau_{X\cap Y}$ eine GST, und damit ist $X \cap Y \in \mathcal{W}(A)$.

Feinheit) Sei $b \in A$ und A habe eine abzählbar unendliche Teilmenge W. Dann ist $W \cup \{b\}$ eine abzählbar unendliche Teilmenge W_*.
Sei $b, u_0, u_1, ...$ Aufzählung von W_*.
Definiere eine Strategie τ für II durch $e^{[0]}(n) := b(n), e^{[i+1]}(n) := u_i(n)$.
Sei dann a ein beliebiges Spiel von I.
Dann ist $\{a^{[0]}, a^{[1]}, ...\} \cup W_*$ eine abzählbar unendliche Teilmenge W_{**} und ferner Ergebnis eines beliebigen Spielverlaufs gemäß τ in $\mathcal{G}^{\mathrm{Sol}}(A, S)$.
Also ist $W_{**} \in \{S \in [A]^{\aleph_0} \mid b \in S\}$.
Folglich hat II eine GST[34] in $\mathcal{G}^{\mathrm{Sol}}(A, \{S \in [A]^{\aleph_0} \mid b \in S\})$.
Somit ist $\{S \in [A]^{\aleph_0} \mid b \in S\} \in \mathcal{W}(A)$.

□

Proposition 3.36
$[AC_{\aleph_0}(\mathcal{N})]$ $\mathcal{W}(A)$ *ist ein abzählbar vollständiger, feiner Filter auf* $[A]^{\aleph_0}$.

BEW:
Nach 2.42 enthält eine unendliche Teilmenge der reellen Zahlen eine abzählbare Teilmenge.
Also gelten alle Eigenschaften außer der abzählbaren Vollständigkeit gemäß 3.35.
Es verbleibt zu zeigen, daß $\mathcal{W}(A)$ abzählbar vollständig ist.
Der nun folgende Beweis ist lediglich eine Verallgemeinerung des Beweises von F3) in der vorherigen Proposition.
Wir spielen in diesem Fall eine abzählbare Menge von Spielen, aber in allen Spielen wird dieselbe Menge von reellen Zahlen gespielt. Die einzelnen Züge werden in jedem Spiel anders verteilt, so daß wir aus unseren abzählbar vielen GST für II eine GST im Schnitt erhalten.
Die Schwierigkeit ist hierbei, dafür zu sorgen, daß zu jedem Zeitpunkt, in dem in einem Spiel auf ein Element eines anderen Spiels zurückgegriffen wird, dieses bereits definiert ist.
Sei also für jedes $i \in \omega$ τ_i eine GST für II in S_i.
Definiere nun eine Strategie τ für II in $\mathcal{G}^{\mathrm{Sol}}(A, \bigcap S_i)$ wie folgt:
Sei $a = (a^{[0]}(0), a^{[0]}(1), a^{[1]}(0), ...)$ ein beliebiges Spiel von I.

[34] nämlich τ

Betrachte die ω-vielen Spiele:

$$\begin{array}{lllllll}
I & a^{[0]}(0) & a^{[0]}(1) & a^{[1]}(0) & a^{[0]}(2) & a^{[1]}(1)\ldots & \\
\text{Spiel1} & & & & & & \\
\tau & \boxed{e_0^{[0]}(0)} & \boxed{e_0^{[0]}(1)} & \boxed{e_0^{[1]}(0)} & \boxed{e_0^{[0]}(2)} & \boxed{e_0^{[1]}(1)} & \boxed{e_1^{[0]}(0)}\ \ldots
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllllll}
I & \boxed{a^{[0]}(0)} & \boxed{a^{[0]}(1)} & \boxed{a^{[1]}(0)} & \boxed{a^{[0]}(2)} & \boxed{a^{[1]}(1)} & \boxed{e_1^{[0]}(0)}\ \ldots \\
\text{Spiel2} & & & & & & \\
\tau_0 & e_0^{[0]}(0) & e_0^{[0]}(1) & e_0^{[1]}(0) & e_0^{[0]}(2) & e_0^{[1]}(1)\ldots &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllllll}
I & \boxed{a^{[0]}(0)} & \boxed{a^{[0]}(1)} & \boxed{a^{[1]}(0)} & \boxed{a^{[0]}(2)} & \boxed{a^{[1]}(1)} & \boxed{e_0^{[0]}(0)}\ \ldots \\
\text{Spiel3} & & & & & & \\
\tau_1 & e_1^{[0]}(0) & e_1^{[0]}(1) & e_1^{[1]}(0) & e_1^{[0]}(2) & e_1^{[1]}(1)\ldots & \\
\vdots & & & & & &
\end{array}$$

Die von uns benutzte Bijektion $\langle . \rangle$ besitzt folgende Eigenschaften $(*)$, die sich leicht nachrechnen lassen:
$*1)$ $\forall j,k \in \omega\ k \leq \langle j,k \rangle$
$*2)$ $\forall n \in \omega\ k < \tilde{k} \rightarrow \langle k,n \rangle < \langle \tilde{k},n \rangle$
Obige Eigenschaften implizieren
$*3)$ $\forall n,j,k \in \omega\ \langle k,n \rangle \leq \langle \langle j,k \rangle, n \rangle$.

Definiere nun das Spiel e von II im ersten Spiel durch
$e(\langle\langle j,k\rangle,n\rangle) := e_j^{[k]}(n) = e_j(\langle k,n\rangle)$
Definiere simultan mit obiger Definition die Spiele a_i von I im Spiel $i+2$ durch:
$a_i(\langle\langle 0,k\rangle,n\rangle) := a^{[k]}(n)$
$a_i(\langle\langle j+1,k\rangle,n\rangle) := e_j^{[k]}(n)$, falls $j < i$ ist.
$a_i(\langle\langle j+1,k\rangle,n\rangle) := e_{j+1}^{[k]}(n)$, falls $j \geq i$ ist.
Dann wird dieselbe Menge $G := \{a^{[i]}, e_j^{[i]} \mid i,j \in \omega\}$ in allen Spielen $\mathcal{G}^{\mathrm{Sol}}(A, S_i)$ gespielt.
Also ist für alle $j \in \omega$ $G \in S_j$, somit ist auch $\mathcal{G} \in \bigcap_{j\in\omega} S_j$.
Da aber G auch im ersten Spiel in $\mathcal{G}^{\mathrm{Sol}}(A, \bigcap S_j)$ gespielt wird, ist τ eine GST in diesem Spiel.
Die Eigenschaft $(*)$ sorgt dafür, daß, sobald auf Züge in anderen Spielen zurückgegriffen wird, diese Züge bereits definiert sind.

$\square$

Proposition 3.37
[AD] $\mathcal{W}(A)$ ist ein abzählbar vollständiger, feiner UF auf $[A]^{\aleph_0}$.

BEW:
Nach Proposition 3.36 gelten also alle Eigenschaften außer der Ultrafiltereigenschaft.
Es verbleibt U4) zu zeigen.
Sei $X \notin \mathcal{W}(A)$.
Dann hat II keine GST in $\mathcal{G}^{\mathrm{Sol}}(A, X)$.
Nach [AD] besitzt I eine GST σ in $\mathcal{G}^{\mathrm{Sol}}(A, X)$.
Sei a ein beliebiges Spiel von I in $\mathcal{G}^{\mathrm{Sol}}(A, Y) := \mathcal{G}^{\mathrm{Sol}}(A, [A \setminus X]^{\aleph_0})$.
Definiere eine GST τ für II im Komplement wie folgt.
Betrachte die beiden Spiele:

$I \quad a_1^{[0]}(0) \qquad a_1^{[0]}(1)...$
Spiel1
$\tau \qquad \boxed{a_2^{[0]}(0)} \qquad \boxed{a_2^{[0]}(1)} \; ...$

$\sigma \quad a_2^{[0]}(0) \qquad a_2^{[0]}(1)...$
Spiel2
$II \qquad \boxed{a_1^{[0]}(0)} \qquad \boxed{a_1^{[0]}(1)} \; ...$

Es wird offenbar in beiden Spielen dieselbe Menge $G := \{a_1^{[i]}, a_2^{[i]} \mid i \in \omega\}$ gespielt, und da σ eine GST für I war, folgt $G \notin X$.
Dann ist aber $G \in Y$, also ist diese Strategie eine GST für II in $\mathcal{G}^{\mathrm{Sol}}(A, Y)$. $\square$

Proposition 3.38 (Solovay)
Sei $\mathcal{U}$ ein abzählbar vollständiger, feiner UF auf $[\mathcal{N}]^{\aleph_0}$.
Dann ist ω_1 meßbar und $\aleph_1 \nleq 2^{\aleph_0}$

BEW: Definiere $\omega_1^\alpha := \min\{\lambda \in \mathrm{ON} \mid \lambda \text{ nicht rekursiv in } \alpha\}$.
Da es nur abzählbar viele in α rekursive Ordinalzahlen gibt, ist ω_1^α abzählbar.
Definiere für $A \in [\mathcal{N}]^{\aleph_0}$ $\pi(A) := \sup\{\omega_1^\alpha \mid \alpha \in A\}$.
Definiere für $X \subseteq \omega_1$ $X \in \mathcal{U}_* :\leftrightarrow \{A \mid \pi(A) \in X\} \in \mathcal{U}$.

HILFSPROPOSITION:
$\mathcal{U}_*$ ist ein abzählbar vollständiger, echter UF auf ω_1.
BEW:

F1) Offenbar ist $\emptyset \notin \mathcal{U}_*$, da $\emptyset = \{A \mid \pi(A) \in \emptyset\} \notin \mathcal{U}$ ist.

F2) Sei $X \in \mathcal{U}_*, X \subseteq Y$.
Dann ist $\{A \mid \pi(A) \in X\} \in \mathcal{U}$.
Somit gilt $\{A \mid \pi(A) \in X\} \subseteq \{A \mid \pi(A) \in Y\}$, da $X \subseteq Y$ ist.
Da $\mathcal{U}$ ein UF ist, folgt $\{A \mid \pi(A) \in Y\} \in \mathcal{U}$.
Also ist $Y \in \mathcal{U}_*$.

F3) Seien $X, Y \in \mathcal{U}_*$.
Dann gilt $\{A \mid \pi(A) \in X\} \in \mathcal{U} \wedge \{A \mid \pi(A) \in Y\} \in \mathcal{U}$.
Also ist $\{A \mid \pi(A) \in X\} \cap \{A \mid \pi(A) \in Y\} \in \mathcal{U}$.
Somit folgt $\{A \mid \pi(A) \in X \cap Y\} \in \mathcal{U}$.
Also ist $X \cap Y \in \mathcal{U}_*$.

U4) Sei $X \notin \mathcal{U}_*$.
Dann ist $\{A \mid \pi(A) \in X\} \notin \mathcal{U}$.
Da $\mathcal{U}$ ein UF ist, ist $\neg\{A \mid \pi(A) \in X\} \in \mathcal{U}$.
Also gilt $\{A \mid \pi(A) \notin X\} \in \mathcal{U}$.
Somit ist $\{A \mid \pi(A) \in \neg X\} \in \mathcal{U}$.
Damit folgt $\neg X \in \mathcal{U}_*$.

vollständig) Seien $\forall i \in \omega\ X_i \in \mathcal{U}_*$.
Dann ist $\forall i \in \omega\ \{A \mid \pi(A) \in X_i\} \in \mathcal{U}$.
Da $\mathcal{U}$ abzählbar vollständig ist, ist $\bigcap_{i\in\omega}\{A \mid \pi(A) \in X_i\} \in \mathcal{U}$.
Es folgt $\{A \mid \pi(A) \in \bigcap_{i\in\omega} X_i\} \in \mathcal{U}$.
Somit gilt $\bigcap_{i\in\omega} X_i \in \mathcal{U}_*$.

echt) Sei also $\nu \in \omega_1$ beliebig und $\alpha \in \mathcal{N}$ irgendein Kode für X mit $\nu < \omega_1^\alpha$.
Nach Konstruktion von π gilt also, daß $\alpha \in A \in [\mathcal{N}]^{\aleph_0}$ $\pi(A) > \nu$ impliziert.
Da $\mathcal{U}$ fein ist, gilt $\{A \mid \pi(A) > \nu\} = \{A \mid \pi(A) \in \neg\nu\} \in \mathcal{U}$.
Also ist $\nu \notin \mathcal{U}_*$.

■

Also erfüllt $\mathcal{U}_*$ alle Anforderungen und bezeugt die Meßbarkeit von ω_1.

HILFSPROPOSITION:
Es gibt keinen abzählbar vollständigen, echten UF auf $2^{\aleph_0}$.
BEW: Angenommen $\mathcal{U}$ ist ein echter, abzählbar vollständiger UF auf $2^{\aleph_0} := \{f \mid f : \omega \to 2\}$.
Dann setze $A_n^i := \{f \mid f(n) = i\}$.
Da $\mathcal{U}$ ein UF ist, gilt für alle $n \in \omega$ entweder $A_n^0 \in \mathcal{U}$, setze dann $i(n) := 0$, oder $A_n^1 \in \mathcal{U}$, in diesem Fall setze $i(n) := 1$.
Somit ist $A_n^{i(n)}$ die entsprechende im UF enthaltene Menge.
Dann ist $\bigcap_{n\in\omega} A_n^{i(n)} \in \mathcal{U}$, da der UF abzählbar vollständig ist.
Aber offenbar ist $\bigcap_{n\in\omega} A_n^{i(n)} = \{\vec{i}\}$ im Widerspruch zur Echtheit des UF.

■

Damit haben wir einen abzählbar vollständigen UF auf $\aleph_1$ konstruiert.
Außerdem wissen wir, daß es keinen auf $2^{\aleph_0}$ gibt, also folgt die Behauptung mit:

HILFSPROPOSITION:
Sei $\mathcal{U}_\alpha$ abzählbar vollständiger, echter UF auf α. Sei ferner $\alpha \leq \beta$ und π eine Injektion die dieses bezeugt.
Dann ist der Bildultrafilter $\mathcal{U}_\beta^\pi := \pi_*(\mathcal{U}_\alpha)$ auf β ebenfalls ein abzählbar vollständiger, echter UF.

BEW: Daß der Bildultrafilter ein UF ist, haben wir bereits unter 2.52 gezeigt.
Die Vollständigkeit des UF bleibt ebenfalls stets erhalten, wobei die Art der Abbildung irrelevant ist. Dies zeigt man genau wie die Filtereigenschaft F2).
Was theoretisch beim Bildultrafilter verloren gehen könnte, ist die Echtheit.
Hier hilft uns die Injektivität der Abbildung π.
Angenommen $\mathcal{U}_\beta^\pi$ ist nicht echt.
Dann existiert ein $x \in \beta$, so daß $\{x\} \in \mathcal{U}_\beta^\pi$ ist.
Nach Definition des Bildultrafilters ist dann $\pi^{-1}[\{x\}] \in \mathcal{U}_\alpha$.
Betrachte die zwei möglichen Fälle:

Fall1) Angenommen es wäre $x \in \mathrm{Im}(\pi)$.
Dann ist $\pi^{-1}[\{x\}] \subseteq \alpha$.
Wegen der Injektivität ist dies eine Einermenge $\{w\}$.
Damit folgt aber $\{w\} \in \mathcal{U}_\alpha$ im Widerspruch zur Echtheit von $\mathcal{U}_\alpha$.

Fall2) Angenommen es wäre $x \notin \mathrm{Im}(\pi)$.
Dann ist $\pi[\{x\}] = \emptyset$.
Also ist $\emptyset \in \mathcal{U}_\alpha$ im Widerspruch zur Filtereigenschaft von $\mathcal{U}_\alpha$.

Damit muß aber schon die Annahme, daß $\mathcal{U}_\beta^\pi$ nicht echt sei, falsch gewesen sein.
■

Also ist $\aleph_1 \nleq 2^{\aleph_0}$.
□

Obige Proposition zeigt deutlich, daß erstens in Modellen ohne Auswahl die Frage nach der Kontinuumshypothese eventuell gar keinen Sinn macht, und zweitens die Existenz großer Kardinalzahlen eventuell gezeigt werden kann.
Diese können dann in gewisser Weise sogar sehr klein sein, in unserem Fall ist bereits die erste überabzählbare Kardinalzahl meßbar.

Korollar 3.39
[AD] ω_1 ist meßbar.

BEW: Proposition 3.37 und Proposition 3.38
□

4 Hauptsatz

Konvention
Für den Rest dieser Arbeit wollen wir in $\mathbb{V} = \mathbb{L}(\mathbb{R}) + [AD]$ arbeiten.

4.1 Beweisskizze

Wir kommen nun zum letzten Teil des Beweises.
Was ist bereits gezeigt, und was ist noch zu zeigen?

Nach Definition 3.6 für eine Woodinkardinalzahl ist in HOD zu zeigen:
$\forall H \subseteq \Theta\ \exists \delta < \Theta\ \forall \lambda \in [\delta, \Theta)\ \exists j : \mathbb{V} \preceq M\ \mathrm{crit}(j) = \delta \wedge j(\delta) \geq \lambda \wedge j(H) \cap \lambda = H \cap \lambda.$

Sei also $H \subseteq \Theta$ aus HOD fixiert.
Als δ dient das bereits in 2.109 definierte δ_H.
Sei ferner $\lambda \in [\delta_H, \Theta)$ fixiert.

A0) Es gilt oBdA $\lim(\lambda)$, was wir in Proposition 4.1 zeigen werden.

Konstruiere nun die elementare Einbettung j wie folgt:

A1) Konstruktion einer unendlichen Menge $\Upsilon_{H,\Lambda}$, um unseren Solovay-Ultrafilter zu erhalten.

Warum wir gerade diese Menge benutzen, wird in 4.10 klar werden.
Es geht uns nämlich um einen Bildultrafilter, den wir mit Hilfe des Solovay-Ultrafilters definieren wollen.

A2) Konstruktion des Ultrafilters $\mathcal{U}_{H,\Lambda}$.

A3) Nutze den Satz von Łoš in HOD, um die gewünschte elementare Einbettung zu erhalten.

A4) Zeige eine gewisse Normalitätseigenschaft für $\mathcal{U}_{H,\Lambda}$.

A5) Zeige, daß diese Normalitätseigenschaft bereits die gewünschten Eigenschaften für die elementare Einbettung liefert.

Proposition 4.1
Sei $H \subseteq \Theta, H \in \mathrm{HOD}$.
Falls für alle Limesordinalzahlen $\lambda \in [\delta_H, \Theta)$ eine elementare Einbettung $j_\lambda : \mathbb{V} \preceq M$ existiert mit den Eigenschaften $\mathrm{crit}(j_\lambda) = \delta_H$, $j_\lambda(\delta_H) \geq \lambda$ und $\lambda \cap H = \lambda \cap j_\lambda(H)$, dann existiert bereits für jede Ordinalzahl $\mu \in [\delta_H, \Theta)$ eine elementare Einbettung $j_\mu : \mathbb{V} \preceq M$, für die gilt, daß $\mathrm{crit}(j_\mu) = \delta_H$, $j_\mu(\delta_H) \geq \mu$ und $\mu \cap H = \mu \cap j_\mu(H)$ ist.

BEW: Sei also $\mu \in [\delta_H, \Theta)$ beliebig.

HILFSDEFINITION: Setze $\lambda(\mu) := \min\{\lambda \in \mathrm{ON} \mid \lim(\lambda) \wedge \mu \leq \lambda\}$.

Dann ist $\lambda(\mu)$ eine Limesordinalzahl in $[\delta_H, \Theta)$, wobei Θ ausschließlich gilt, da Θ nach Proposition 2.87 regulär ist.
$j_{\lambda(\mu)}$ existiert nach unserer Prämisse und erfüllt alle Anforderungen an j_μ.
Es gilt nämlich, daß erstens $\mathrm{crit}(j_{\lambda(\mu)}) = \delta_H$ ist.
Zweitens ist $j_{\lambda(\mu)}(\delta_H) \geq \lambda(\mu) \geq \mu$.
Und drittens ist $\mu \cap H = (\mu \cap \lambda(\mu)) \cap H = \mu \cap (\lambda(\mu) \cap H) = \mu \cap (\lambda(\mu) \cap j_{\lambda(\mu)}(H)) = (\mu \cap \lambda(\mu)) \cap j_{\lambda(\mu)}(H) = \mu \cap j_{\lambda(\mu)}(H)$.
Setze also $j_\mu := j_{\lambda(\mu)}$.

$\square$

Damit haben wir Punkt A0) erledigt.

4.2 Die Konstruktion von $\Upsilon_{H,\Lambda}$

Sei also für den Rest dieser Arbeit $\lambda \in [\delta_H, \Theta)$ und es sei oBdA $\lim(\lambda)$.
Sei ferner für den Rest dieser Arbeit Λ eine ordinalzahl-definierbare PWO der Länge λ.
Und sei schließlich $\Phi_\Diamond(a, Q, R, \zeta; H)$ die universelle Σ^H_1-Aussage, wie wir sie bereits in der dem Satz 3.13 folgenden Konvention fixiert haben.

Zur Erinnerung:
Wir verstehen $\Phi_\Diamond$ als universelle Σ^H_1-Formel für $\mathcal{N} \times \Gamma$, indem wir die ω-Parametrisierung von Σ^H_1-Formeln ausnutzen, das heißt:
$\Phi_\Diamond((a_0, a_1, ...), Q, R, \zeta; H)$ gilt genau dann, wenn $\phi_{a_0}((a_1, a_2, ...), Q, R, \zeta; H)$ gilt, wobei ϕ_{a_0} die a_0-te Σ^H_1-Formel einer vorher fixierten Aufzählung der Σ^H_1-Formeln ist.

Die beiden folgenden Begriffe werden von nun an eine zentrale Rolle spielen.

Definition 4.2

1. $\Upsilon_{H,\Lambda} := \{a \in \mathcal{N} \mid \Phi_\Diamond(a, \Lambda, \Diamond, \delta_H; H)\}$
2. $S_b := \{\eta \in \mathrm{dom}(\Diamond) \mid \Phi_\Diamond(b, \Diamond(\eta), \Diamond\restriction\eta, \eta; H)\}$

$\Upsilon_{H,\Lambda}$ ist offenbar überabzählbar, denn sei die Σ^H_1-Formel ϕ_n eine Tautologie, zum Beispiel $\exists x\ x = x$, dann gilt natürlich, daß alle reellen Zahlen[35], die mit n beginnen, in $\Upsilon_{H,\Lambda}$ liegen.
Also ist $\{(a(0), a(1), ...) \in \mathcal{N} \mid a(0) = n\} =$
$\{(a(0), a(1), ...) \in \mathcal{N} \mid a(0) = n \wedge \phi_n((a(1), a(2), ...), \Lambda, \Diamond, \delta_H; H)\} \subseteq \Upsilon_{H,\Lambda}$.

Damit haben wir Punkt A1) erledigt.

[35] aufgefaßt als Elemente des Baire-Raumes

4.3 Die Konstruktion des Ultrafilters $\mathcal{U}$

Lemma 4.3

1. *Falls $b \in \Upsilon_{H,\Lambda}$ ist, dann ist $S_b \neq \emptyset$.*
2. *Es existiert eine rekursive Funktion π, so daß für alle $b, \tilde{b}$ gilt, daß $S_b \cap S_{\tilde{b}} = S_{\pi(b,\tilde{b})}$ ist.*

BEW:

1. Ist eine sofortige Folgerung aus dem Reflexionssatz 3.13.
2. Folgt mit Hilfe des Satzes über den uniformen Abschluß 2.25.
   Denn nach Definition ist
   $S_b \cap S_{\tilde{b}} =$
   $\{\eta \in \mathrm{dom}(\Diamond) \mid \Phi_\Diamond(b, \Diamond(\eta), \Diamond\restriction\eta, \eta; H)\} \cap$
   $\{\eta \in \mathrm{dom}(\Diamond) \mid \Phi_\Diamond(\tilde{b}, \Diamond(\eta), \Diamond\restriction\eta, \eta; H)\}$
   $= \{\eta \in \mathrm{dom}(\Diamond) \mid \Phi_\Diamond(b, \Diamond(\eta), \Diamond\restriction\eta, \eta; H) \wedge \Phi_\Diamond(\tilde{b}, \Diamond(\eta), \Diamond\restriction\eta, \eta; H)\}$.
   Dies ist aber nach Konstruktion der universellen Formel $\Phi_\Diamond$ nichts anderes als $\{\eta \in \mathrm{dom}(\Diamond) \mid \phi_{b(0)}((b(1), ...), \Diamond(\eta), \Diamond\restriction\eta, \eta; H) \wedge$
   $\phi_{\tilde{b}(0)}((\tilde{b}(1), ...), \Diamond(\eta), \Diamond\restriction\eta, \eta; H)\}$.
   Hierbei sind $\phi_{b(0)}$ und $\phi_{\tilde{b}(0)}$ beides Σ_1^H-Formeln, welche aber abgeschlossen unter Konjunktion sind.
   Also entspricht dies $\{\eta \in \mathrm{dom}(\Diamond) \mid \Psi((b(0), \tilde{b}(0), b(1), ...), \Diamond(\eta), \Diamond\restriction\eta, \eta; H)\}$,
   wobei $\Psi(c, P, F, \mu; H) :\leftrightarrow \phi_{c(0)}((c(2), c(4), ...), P, F, \mu; H) \wedge$
   $\phi_{c(1)}((c(3), c(5), ...), P, F, \mu; H)$ gelte.
   Da dieses Ψ aber eine Σ_1^H-Aussage ist, besitzt sie auch einen Index in unserer Aufzählung, sagen wir m.
   Also gilt $\Psi(c, P, F, \mu; H) :\leftrightarrow \phi_m(c, P, F, \mu; H)$.
   Ferner sagt uns 2.25, daß wir dieses m mittels eines rekursiven π^* bereits aus $b(0)$ und $\tilde{b}(0)$ finden können.
   Alles zusammen ergibt, daß unsere oben betrachtete Menge gleich
   $\{\eta \in \mathrm{dom}(\Diamond) \mid \Phi_\Diamond((\pi^*(b(0), \tilde{b}(0)), b(0), \tilde{b}(0), b(1), ...), \Diamond(\eta), \Diamond\restriction\eta, \eta; H)\}$ ist.
   Setze $\pi(b, \tilde{b}) = (\pi^*(b(0), \tilde{b}(0)), b(0), \tilde{b}(0), b(1), ...)$.
   Damit ist π rekursiv und unsere Menge ist offenbar gleich
   $\{\eta \in \mathrm{dom}(\Diamond) \mid \Phi_\Diamond(\pi(b, \tilde{b}), \Diamond(\eta), \Diamond\restriction\eta, \eta; H)\} = S_{\pi(b,\tilde{b})}$.
   Also ist π wie gefordert.

$\square$

Die nun folgende Definition löst sich erst einmal vom Kontext, den wir bislang betrachtet haben. Dies bedeutet, daß Σ_1^H-Aussagen benutzt werden, die zwar auf den ersten Blick wie alle bislang betrachteten anmuten, aber dem ist <u>nicht</u> so. Denn für die erste Variable müssen <u>keine</u> reellen Zahlen eingesetzt werden, sondern es können zunächst beliebige Mengen sein.

Definition 4.4
Sei $\Psi(X, \Lambda, \Diamond, \delta_H; H)$ eine Σ_1^H-Aussage.
*Dann **erzwingt** $b \in \mathcal{N}$ die Aussage Ψ,*
falls für alle $\eta \in S_b$ gilt, daß $\Psi(X, \Diamond(\eta), \Diamond\restriction\eta, \eta; H)$ ist.

Proposition 4.5
Sei $Z \in \mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R}), \Psi$ eine Σ_1^H-Aussage mit $\mathbb{J}_\Theta(\mathbb{R}) \models \Psi(Z, \Lambda, \Diamond, \delta_H; H)$.
Dann existiert ein $b \in \Upsilon_{H,\Lambda}$, so daß für alle $\eta \in S_b$ gilt
$\mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R}; H) \models \Psi(Z, \Diamond(\eta), \Diamond\restriction\eta, \eta; H)$.

BEW: Jedes $Z \in \mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R})$ ist von der Form $Z = h(r)$ für ein geeignetes $r \in \mathcal{N}$.
Damit ist stark vereinfacht ausgedrückt $Z = \iota y\ \exists h\ y = h(r) \wedge$ "h ist geeignet"[36].
Ein Zeuge h_1 befindet sich nach 2.91 in $\mathbb{J}(\mathbb{R})$.
Dann findet sich wegen der Σ_1^H-Elementarität ein Zeuge h_2 in $\mathbb{J}_\Theta(\mathbb{R})$.
Und damit findet sich ein Zeuge h_3 erneut wegen der Σ_1^H-Elementarität in $\mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R})$.
Also ist $Z = \iota y \mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R}) \models \exists h\ y = h(r) \wedge$ "h ist geeignet".
Also gibt es eine Σ_1^H-Formel θ, wie oben angegeben, so daß
$Z = \iota y \mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R}) \models \theta(y, r)$.
Also ist $\exists y\ \theta(y, r) \wedge \Psi(y, Q, R, \nu; H)$ eine Σ_1^H-Formel und wegen der Universalität von $\Phi_\Diamond$ existiert ein $\tilde{r} \in \mathcal{N}$, so daß $\Phi_\Diamond(\tilde{r}, Q, R, \nu; H) \leftrightarrow \exists y\ \theta(y, r) \wedge \Psi(y, Q, R, \nu; H)$ gilt.
Nach Voraussetzung gilt $\mathbb{J}_\Theta(\mathbb{R}) \models \Psi(Z, \Lambda, \Diamond, \delta_H; H)$ und ferner gilt
$\mathbb{J}_\Theta(\mathbb{R}) \models \theta(Z, r)$, da letzteres bereits in $\mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R})$ galt.
Damit gilt $\mathbb{J}_\Theta(\mathbb{R}) \models \exists y\ \theta(y, r) \wedge \Psi(y, \Lambda, \Diamond, \delta_H; H)$, da Z ein Zeuge dafür ist.
Also gilt $\mathbb{J}_\Theta(\mathbb{R}) \models \Phi_\Diamond(\tilde{r}, \Lambda, \Diamond, \delta_H; H)$.
Daher gilt nach Definition von S_b, daß für alle $\eta \in S_{\tilde{r}}\ \Phi_\Diamond(\tilde{r}, \Diamond(\eta), \Diamond\restriction\eta, \eta; H)$ gilt.
Also folgt wiederum aus der Universalität von $\Phi_\Diamond$, daß für alle $\eta \in S_{\tilde{r}}$ gilt
$\exists y\ \theta(y, r) \wedge \Psi(y, \Diamond(\eta), \Diamond\restriction\eta, \eta; H)$.
Aber dieses y war eindeutig bestimmt nämlich Z, womit folgt
$\forall \eta \in S_{\tilde{r}}\ \Psi(Z, \Diamond(\eta), \Diamond\restriction\eta, \eta; H)$.
Dies ist die Definition für $\tilde{r}$ erzwingt Ψ.
□

Definition 4.6
Sei $Z \in \mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R}; H)$.
*Dann sagen wir c **etabliert** Z, falls $c \in \Upsilon_{H,\Lambda}$ ist und es ein $a \in \mathcal{N}$ rekursiv in c gibt, von dem Z Σ_1^H-definierbar in $\mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R}; H)$ ist und sowohl Z, als auch ein Zeuge seiner Σ_1^H-Definition liegen in $\mathbb{J}_{\inf(S_c)}(\mathbb{R}; H)$.*

Korollar 4.7
Jedes $Z \in \mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R}; H)$ wird etabliert.

BEW: Nach 2.91 ist Z von der Form $h(r)$ für ein geeignetes $r \in \mathcal{N}$.
Also $Z = \iota y \mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R}) \models \exists h \exists \zeta < \delta_H\ y = h(r) \wedge y \in \mathbb{J}_\zeta(\mathbb{R}) \wedge$ "h ist geeignet".
Damit ist h ein Zeuge der Σ_1^H-Definierbarkeit von Z.
Aus Elementaritätsgründen kann h in $\mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R})$ gefunden werden.
Also ist h selbst von der Form $h^*(r^*)$.
Also folgt $h = \iota y \mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R}) \models \exists h^*\ \exists \zeta^* < \delta_H\ y = h^*(r^*) \wedge y \in \mathbb{J}_{\zeta^*}(\mathbb{R}) \wedge$ "h^* ist geeignet".

[36] siehe auch Anhang für eine ausführlichere Formel

Dann gilt $\mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R}) \models \exists h \; \exists h^* \; \exists \zeta < \delta_H \; \exists \zeta^* < \delta_H \; y = h(r) \wedge h = h^*(r^*)$
$\wedge y \in \mathbb{J}_\zeta(\mathbb{R}) \wedge h \in \mathbb{J}_{\zeta^*}(\mathbb{R}) \wedge$ "h^* ist geeignet" $\wedge$ "h ist geeignet" $\wedge \Lambda = \Lambda \wedge \Diamond = \Diamond$[37].
Dies ist eine Σ_1^H-Aussage $\Psi(r \bullet r^*, \Lambda, \Diamond, \delta_H; H)$.
Zur Erinnerung: $r \bullet s$ ist in 2.6 definiert.
Also ist sie aus Universalitätsgründen äquivalent zu einem $\Phi_\Diamond(b, \Lambda, \Diamond, \delta_H; H)$, wobei sich b nach dem Satz über den uniformen Abschluß rekursiv aus $r \bullet r^*$ gewinnen läßt.
Die Stufe $\mathbb{J}_\Theta(\mathbb{R})$ ist nach obiger Diskussion ein Modell von $\Psi(r \bullet r^*, \Lambda, \Diamond, \delta_H; H)$.
Also ist $\mathbb{J}_\Theta(\mathbb{R})$ ein Modell von $\Phi_\Diamond(b, \Lambda, \Diamond, \delta_H; H)$.
Daher ist $b \in \Upsilon_{H,\Lambda}$.
Außerdem gilt für alle $\eta \in S_b$, daß $\mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R})$ ein Modell für $\Phi_\Diamond(b, \Diamond(\eta), \Diamond \restriction \eta, \eta; H)$ ist.
Aus Universalitätsgründen folgt für alle $\eta \in S_b$ $\mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R}) \models \Psi(r \bullet r^*, \Diamond(\eta), \Diamond \restriction \eta, \eta; H)$.
Nach Definition von Ψ folgt unter anderem $y = h(r)$.
Dieses y war aber eindeutig bestimmt, nämlich Z.
Also gilt auch für alle $\eta \in S_b \; \exists \zeta < \eta \; Z \in \mathbb{J}_\zeta(\mathbb{R})$.
Also ist $Z \in \mathbb{J}_{\inf S_b}(\mathbb{R})$.
Es gilt auch $h = h^*(r^*)$, aber dies war der Zeuge für die Σ_1^H-Definierbarkeit von Z.
Also gilt wiederum für alle $\eta \in S_b \; \exists \zeta^* < \eta \; h \in \mathbb{J}_{\zeta^*}(\mathbb{R})$.
Daher ist auch $h \in \mathbb{J}_{\inf S_b}(\mathbb{R})$.
Damit etabliert aber b Z.

□

Nachdem wir gesehen haben, daß wir alle für uns interessanten Mengen etablieren können, kehren wir zur Definition des Ultrafilters zurück.
Dazu definieren wir zunächst einen Filter, für den es leichter sein wird, gewisse Eigenschaften zu zeigen, da seine Definition recht einfach gehalten ist.
Diese Eigenschaften wird unser Ultrafilter erben, da wir zeigen, daß er den von uns definierten Filter erweitert.

Definition 4.8
$\mathcal{F}_{H,\Lambda} := \{X \subseteq \delta_H \mid \exists b \in \Upsilon_{H,\Lambda} \; S_b \subseteq X\}$

Wir werden für den Rest der Arbeit $\mathcal{F}_{H,\Lambda}$ im allgemeinen als $\mathcal{F}$ bezeichnen.
Aus der Definition folgt unmittelbar, daß, falls $b \in \Upsilon_{H,\Lambda}$ ist, $S_b \in \mathcal{F}$ folgt.

Proposition 4.9
$\mathcal{F}$ ist echter, δ_H-vollständiger Filter, er erweitert den club-Filter auf δ_H und enthält $\mathrm{dom}(\Diamond)$.

BEW:

F1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$, da für alle $b \in \Upsilon_{H,\Lambda}$ gilt, daß nach 4.3 $S_b \neq \emptyset$ ist.

F2) Sei $A \in \mathcal{F}, A \subseteq B$.
Dann existiert ein $a \in \Upsilon_{H,\Lambda}$ mit $S_a \subseteq A \subseteq B$.

[37] Die "Dummy"-Parameter Λ und $\Diamond$ geben der Aussage das richtige Format

Also ist $S_a \subseteq B$.
Damit ist nach Definition von $\mathcal{F}$ $B \in \mathcal{F}$.

F3) Seien $A, B \in \mathcal{F}$.
Dann existieren $a, b \in \Upsilon_{H,\Lambda}$ mit $S_a \subseteq A \wedge S_b \subseteq B$.
Also ist $S_a \cap S_b \subseteq A \cap B$.
Mit 4.3 gibt es somit $S_{\pi(a,b)} = S_a \cap S_b \subseteq A \cap B$.
Daher gibt es $c := \pi(a, b) \in \Upsilon_{H,\Lambda}$ mit $S_c \subseteq A \cap B$.
Nach Definition von $\mathcal{F}$ ist damit $A \cap B \in \mathcal{F}$.

F4) Da $\Upsilon_{H,\Lambda} \neq \emptyset$ ist und da nach Definition von S_b für alle $b \in \Upsilon_{H,\Lambda}$ gilt, daß $S_b \subseteq \delta_H$ ist, folgt die Existenz eines $b \in \Upsilon_{H,\Lambda}$, so daß $S_b \subseteq \delta_H$ gilt. Also ist $\delta_H \in \mathcal{F}$.

club) Sei P eine PWO der Länge δ_H, sei C eine beliebige club-Teilmenge von δ_H und $\epsilon_{1_C} \in \mathcal{N}$ sei so, daß $\forall \eta < \delta_H \; \eta \in C :\leftrightarrow G^{P\restriction\eta+1}_{\epsilon_{1_C}} \cap (P)_\eta \neq \emptyset$ ist.
Ein solches zulässiges[38] ϵ_{1_C}[39] existiert nach dem Uniform Coding Lemma.
"C ist kofinal in δ_h" ist eine Σ^H_1-Aussage über δ_H, ϵ_{1_C}, nämlich
$\forall \zeta < \delta_H \; \exists \nu < \delta_H \; (\zeta < \nu \wedge \epsilon_{1_C}(\nu) \simeq 1)$.
b erzwinge obige Aussage.
Dann gilt $\forall \eta \in S_b \; \forall \zeta < \eta \; \exists \nu < \eta \; (\zeta < \nu \wedge \varepsilon_C(\nu) \simeq 1)$.
Also ist C kofinal in η für alle $\eta \in S_b$.
Damit ist wegen der Abgeschlossenheit $\eta \in C$.
Also folgt $S_b \subseteq C$.
Aber es gilt $S_b \in \mathcal{F}$ nach Definition von $\mathcal{F}$, und mit F2) ist somit $C \in \mathcal{F}$.

vollständig) Sei $\xi < \delta_H$ Ordnungstyp einer PWO $\Xi \in \mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R}; H)$ und sei für alle $\nu < \xi$ $A_\nu \in \mathcal{F}$.
Nach Definition von $\mathcal{F}$ gilt, daß für alle $\nu < \xi$ ein $b_\nu \in \Upsilon_{H,\Lambda}$ existiert mit $S_{b_\nu} \subseteq A_\nu$.
Setze $Z := \{(a, b) \mid b \in \Upsilon_{H,\Lambda} \wedge S_b \subseteq A_{|a|_\Xi}\}$.
Nach dem Coding Lemma existiert $Z^* \subseteq Z$ in $\mathrm{pos}\Sigma^1_1(\leq_\Xi)$, so daß es für alle $(a, b) \in Z$ ein $(a^*, b^*) \in Z^*$ gibt mit der Eigenschaft, daß $|a|_\Xi = |a^*|_\Xi$ ist.
Ferner gilt $\Xi \in \mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R}; H)$ und $\mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R}; H)$ ist zulässig.
Also ist auch $Z^* \in \mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R}; H)$.
Definiere $S^* := \{b \mid \exists a \; (a, b) \in Z^*\}$.
Dann ist $S^* \in \mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R}; H)$, da $Z^* \in \mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R}; H)$ ist.
Da $Z^* \subseteq Z$ ist, gilt $S^* \subseteq \{b \mid \exists a \; (a, b) \in Z\}$.
Damit ist nach der Definition von Z
$S^* \subseteq \{b \in \Upsilon_{H,\Lambda} \mid \exists a \; S_b \subseteq A_{|a|_\Xi}\} \subseteq \Upsilon_{H,\Lambda}$ und es gibt nach 4.23 ein $d \in \mathcal{N}$, welches die Σ^H_1-Aussage $\Psi^*_\Diamond :\equiv \forall b \in S^* \; \Phi_\Diamond(b, \Lambda, \Diamond, \delta_H; H)$[40] erzwingt.
Also gilt für alle $\eta \in S_d$ und für alle $b \in S^*$, daß $\Phi_\Diamond(b, \Diamond(\eta), \Diamond\restriction\eta, \eta; H)$ gilt.

[38] Zur Erinnerung sei auf die Diskussion im Anschluß an 2.119 verwiesen.
[39] 1_C ist in 1.2 definiert.
[40] Da $S^* \in \mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R})$ ist, kann es etabliert werden.

d erzwingt $\Psi^*_\Diamond$ bedeutet, daß für alle
$\eta \in S_d$ $\eta \in \mathrm{dom}(\Diamond) \wedge \forall b \in S^*\ \Phi_\Diamond(b, \Diamond(\eta), \Diamond\restriction\eta, \eta; H)$ gilt.
Daher folgt $S_d = \{\eta \in \mathrm{dom}(\Diamond) \mid \Phi_\Diamond(d, \Diamond(\eta), \Diamond\restriction\eta, \eta; H)\}$
$= \{\eta \in \mathrm{dom}(\Diamond) \mid \Phi_\Diamond(d, \Diamond(\eta), \Diamond\restriction\eta, \eta; H) \wedge \forall b \in S^*\ \Phi_\Diamond(b, \Diamond(\eta), \Diamond\restriction\eta, \eta; H)\}$
$\subseteq \{\eta \in \mathrm{dom}(\Diamond) \mid \forall b \in S^*\ \Phi_\Diamond(b, \Diamond(\eta), \Diamond\restriction\eta, \eta; H)\}$
$= \bigcap_{b \in S^*} \{\eta \in \mathrm{dom}(\Diamond) \mid \Phi_\Diamond(b, \Diamond(\eta), \Diamond\restriction\eta, \eta; H)\} = \bigcap_{b \in S^*} S_b \subseteq \bigcap_{\nu < \xi} A_\nu$.
Es ist aber $S_d \in \mathcal{F}$. Also ist wegen F2) $\bigcap_{\nu<\xi} A_\nu \in \mathcal{F}$.

echt) Angenommen $\mathcal{F}$ ist nicht echt.
Dann folgt $\bigcap \mathcal{F} \in \mathcal{F}$.
Damit existiert nach Konstruktion von $\mathcal{F}$ ein $b_0 \in \Upsilon_{H,\Lambda}$ mit der Eigenschaft $S_{b_0} \subseteq \bigcap \mathcal{F}$.
Somit gilt für alle $X \in \mathcal{F}$, daß $S_{b_0} \subseteq X$ ist.
Sei nun $\eta_0 := \min\{\eta \mid \eta \in S_{b_0}\}$.
Dann ist $X_0 := \{\zeta \mid \eta_0 < \zeta < \delta_H\}$ eine club-Menge in δ_H.
Somit ist X_0 ein Element des club-Filters und $\mathcal{F}$ erweitert diesen.
Also ist $X_0 \in \mathcal{F}$.
Aber es gilt $\eta_0 \notin X_0$ und $\eta_0 \in S_{b_0}$.
Folglich ist keinesfalls $S_{b_0} \subseteq X_0$ im Widerspruch zu $S_{b_0} \subseteq X_0$.
Also ist $\mathcal{F}$ echt.

dom($\Diamond$)) Da $\Upsilon_{H,\Lambda} \neq \emptyset$ ist, existiert ein $b \in \Upsilon_{H,\Lambda}$.
Also ist nach Definition des Filters $S_b \in \mathcal{F}$.
Aber nach Definition von S_b gilt $S_b \subseteq \mathrm{dom}(\Diamond)$.
Also ist nach F2) $\mathrm{dom}(\Diamond) \in \mathcal{F}$.

$\square$

Wir haben nun $\Upsilon_{H,\Lambda}$ und $\mathcal{F}$ definiert und wissen, daß $\Upsilon_{H,\Lambda}$ überabzählbar ist.
Also existiert nach 3.37 der UF $\mathcal{W}(\Upsilon_{H,\Lambda})$ auf $[\Upsilon_{H,\Lambda}]^{\aleph_0}$.
Wir definieren nun unseren gewünschten UF.

Definition 4.10

1. *Definiere* $\pi : [\Upsilon_{H,\Lambda}]^{\aleph_0} \to \delta_H$ *durch:*
   Falls $E \in [\Upsilon_{H,\Lambda}]^{\aleph_0}$ *ist, gilt* $\forall b \in E\ S_b \in \mathcal{F}$ *nach Konstruktion von* $\mathcal{F}$.
   Dann ist aber wegen der Vollständigkeit von $\mathcal{F}$ $\emptyset \neq \bigcap_{b \in E} S_b \in \mathcal{F}$.
   Setze $\pi(E) := \min \bigcap_{b \in E} S_b$.

2. $\mathcal{U}_{H,\Lambda} := \pi_*(\mathcal{W}(\Upsilon_{H,\Lambda}))$

Abbildung 9: Der Ultrafilter $\mathcal{U}_{H,\Lambda}$[41]

Damit hätten wir eigentlich Punkt A2) erledigt.

Wir geben aber noch eine zweite Definition für den Ultrafilter an und zeigen die Äquivalenz beider, so daß wir im folgenden stets diejenige benutzen können, die gerade angenehmer zu handhaben ist.

[41] Der schraffierte Teil entspricht den reellen Zahlen, mit denen I eine Regel verletzen würde.

Definition 4.11
Sei $Y \subseteq \delta_H$.
Definiere ein Spiel $\mathcal{G}_*(\Upsilon_{H,\Lambda}, Y)$ *mit Regeln wie folgt:*
Spieler I spielt ein $a_* \in \mathcal{N}$ *aufgefaßt als* ω*-Sequenz reeller Zahlen* $a_*^{[i]}$ *mittels* $a_*^{[i]}(n) := a_*(n + \frac{(n+i)(n+i+1)}{2})$.
Spieler II spielt ein $e_* \in \mathcal{N}$, *welches analog interpretiert wird.*
Die Regeln lauten dann:
$R_*[2i]$) *I verliert, falls nicht* $a_*^{[i]} \in \Upsilon_{H,\Lambda}$ *ist.*
$R_*[2i+1]$) *II verliert, falls nicht* $e_*^{[i]} \in \Upsilon_{H,\Lambda}$ *ist.*
$R_*[\omega]$) *II gewinnt genau dann, wenn*
$O(a_*, e_*) := \{a_*^{[i]}, e_*^{[i]} \mid i \in \omega\} \in [\Upsilon_{H,\Lambda}]^{\aleph_0}$ *und* $o(a_*, e_*) := \pi(O(a_*, e_*)) \in Y$ *ist.*

Definition 4.12
$\mathcal{U}^*_{H,\Lambda} := \{Y \subseteq \delta_H \mid$ *II hat GST in* $\mathcal{G}_*(\Upsilon_{H,\Lambda}, Y)\}$

Abbildung 10: Die Menge $\mathcal{U}^*_{H,\Lambda}$[42]

[42] Der schraffierte Teil entspricht den reellen Zahlen, mit denen I eine Regel verletzen würde.

Proposition 4.13
$\mathcal{U}_{H,\Lambda} = \mathcal{U}^*_{H,\Lambda}$

An dieser Stelle zeige ich die Gleichheit der beiden Definitionen, denn, da π keine Bijektion ist, ist π^{-1} nicht die Umkehrfunktion von π, so daß theoretisch die beiden Mengen verschieden sein könnten[43].
Sie sind dies aber nicht, da mit der Ultrafiltereigenschaft Obermengen von Ultrafiltermengen wieder im Ultrafilter sind, und für Obermengen von Mengen für die II eine GST besitzt, II ebenfalls eine GST besitzt.
BEW:

"$\subseteq$" Sei also $U \in \mathcal{U}_{H,\Lambda}$.
Dann folgt mittels unserer Definitionen
$\mathcal{U}_{H,\Lambda} = \{X \subseteq \delta_H \mid \pi^{-1}[X] \in \mathcal{W}(\Upsilon_{H,\Lambda})\}$
$= \{X \subseteq \delta_H \mid \pi^{-1}[X] \in \{Y \subseteq [\Upsilon_{H,\Lambda}]^{\aleph_0} \mid \text{II hat GST in } \mathcal{G}^{\mathrm{Sol}}(\Upsilon_{H,\Lambda}, Y)\}\}$
$= \{X \subseteq \delta_H \mid \pi^{-1}[X] \in \{Y \subseteq [\Upsilon_{H,\Lambda}]^{\aleph_0} \mid$
$\exists \tau \in \mathcal{N}\ \forall a \in \mathcal{N}\ (O(a, [a] * \tau) \in Y \vee$
$\exists n \in \omega\ \forall i < n\ (a^{[n]} \notin \Upsilon_{H,\Lambda} \wedge ([a] * \tau)^{[i]} \in \Upsilon_{H,\Lambda}))\}\}$.
Analog erhalten wir
$\mathcal{U}^*_{H,\Lambda} = \{X \subseteq \delta_H \mid \text{II hat GST in } \mathcal{G}^*(\Upsilon_{H,\Lambda}, X)\}$
$= \{X \subseteq \delta_H \mid$
$\exists \tau \in \mathcal{N}\ \forall a \in \mathcal{N}\ (O(a, [a] * \tau) \in [\Upsilon_{H,\Lambda}]^{\aleph_0} \wedge o(a, [a] * \tau) \in X \vee$
$\exists n \in \omega\ \forall i < n\ (a^{[n]} \notin \Upsilon_{H,\Lambda} \wedge ([a] * \tau)^{[i]} \in \Upsilon_{H,\Lambda}))\}$
$= \{X \subseteq \delta_H \mid$
$\exists \tau \in \mathcal{N}\ \forall a \in \mathcal{N}\ (O(a, [a] * \tau) \in [\Upsilon_{H,\Lambda}]^{\aleph_0} \wedge \pi(O(a, [a] * \tau)) \in X \vee$
$\exists n \in \omega\ \forall i < n\ (a^{[n]} \notin \Upsilon_{H,\Lambda} \wedge ([a] * \tau)^{[i]} \in \Upsilon_{H,\Lambda}))\}$.
Dann gilt für das Urbild von X unter π, daß es eine Menge Y ist für die II eine GST hat, so daß $O(a, [a] * \tau) \in Y$ gilt.
Daher besitzt II aber auch eine GST, so daß $O(a, [a] * \tau) \in [\Upsilon_{H,\Lambda}]^{\aleph_0}$ und $\pi(O(a, [a] * \tau) \in X$ gilt.
II benutzt die Strategie aus $\mathcal{U}_{H,\Lambda}$, um $O(a, [a] * \tau)$ in obigem Y landen zu lassen.
Damit ist $O(a, [a] * \tau) \in Y \subseteq [\Upsilon_{H,\Lambda}]^{\aleph_0}$ und es $\pi(O(a, [a] * \tau) \in \pi(Y) = \pi(\pi^{-1}[X]) = \tilde{X} \subseteq X$.
Also ist $\tilde{X} \in \mathcal{U}^*_{H,\Lambda}$.
Damit ist aber auch $X \in \mathcal{U}^*_{H,\Lambda}$.

"$\supseteq$" Angenommen es gäbe ein $U \in \mathcal{U}^*_{H,\Lambda}$ aber $U \notin \mathcal{U}_{H,\Lambda}$.
Da aber $\mathcal{U}_{H,\Lambda}$ ein UF ist, folgt $\neg U \in \mathcal{U}_{H,\Lambda} \subseteq \mathcal{U}^*_{H,\Lambda}$.
Also sind $U, \neg U$ beide in $\mathcal{U}^*_{H,\Lambda}$, das heißt nach Definition gibt es eine GST τ_U für II und eine GST $\tau_{\neg U}$ für II in den entsprechenden Spielen $\mathcal{G}^*$.
Sei also $b \in \Upsilon_{H,\Lambda}$ beliebig[44].

[43]siehe auch die Bilder
[44]Ein solches Element existiert, da $\Upsilon_{H,\Lambda} \neq \emptyset$.

Betrachte nun die beiden Spiele gemäß τ_U, beziehungsweise $\tau_{\neg U}$.

$I \quad b(0) \quad b(1) \quad \boxed{e_2^{[0]}(0)} \ ...$

Spiel1

$\tau_U \quad e_1^{[0]}(0) \quad e_1^{[0]}(1) \quad e_1^{[1]}(0)...$

$I \quad b(0) \quad b(1) \quad \boxed{e_1^{[0]}(0)} \ ...$

Spiel2

$\tau_{\neg U} \quad e_2^{[0]}(0) \quad e_2^{[0]}(1) \quad e_2^{[1]}(0)...$

Definiere also das Spiel a_1 von I im ersten Spiel durch:
$a_1(\langle 0, n\rangle) := b(n)$
$a_1(\langle j+1, n\rangle) := e_2^{[j]}(n)$
und das Spiel a_2 von I im zweiten Spiel durch:
$a_2(\langle 0, n\rangle) := b(n)$
$a_2(\langle j+1, n\rangle) := e_1^{[j]}(n)$
I kann mit Hilfe dieser Strategien sicherstellen, daß in beiden Spielen dieselbe Menge $O(a, e)$ gespielt wird.
Da beide Strategien GST für II waren, folgt offenbar nach der Definition von $\mathcal{G}^*$, daß $O(a, [a] * \tau_U) = O(a, [a] * \tau_{\neg U}) \in [\Upsilon_{H,\Lambda}]^{\aleph_0}$.
Ferner folgt aus Spiel1 $o(a, [a] * \tau_U) \in U$ und aus Spiel2 $o(a, [a] * \tau_U) = \pi(O(a, [a] * \tau_U) = \pi(O(a, [a] * \tau_{\neg U}) = o(a, [a] * \tau_{\neg U}) \in \neg U$, was offensichtlich ein Widerspruch ist.
Also folgt die Behauptung.

□

Wir werden für den Rest dieser Arbeit $\mathcal{U}_{H,\Lambda}$ als $\mathcal{U}$ bezeichnen.

Proposition 4.14
$\mathcal{U}$ ist δ_H-vollständiger UF und erweitert $\mathcal{F}$.

BEW: Daß $\mathcal{U}$ ein UF ist, ist klar nach Konstruktion.

vollständig) Sei $\xi < \delta_H$ Länge einer PWO $\Xi \in \mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R}; H)$ der reellen Zahlen und sei $\forall \nu < \xi \ A_\nu \in \mathcal{U}$.
Setze $Z := \{(a, \tau) \mid a \in \mathcal{N} \wedge \tau$ GST für II in $\mathcal{G}_*(\Upsilon_{H,\Lambda}, A_{|a|_\Xi})\}$.
Nach dem Coding Lemma existiert ein $Z^* \subseteq Z$ in pos$\Sigma_1^1(\leq_\Xi)$ mit $\forall (a, \tau) \in Z \ \exists (a^*, \tau^*) \in Z^* \ |a|_\xi = |a^*|_\Xi$.
Da aber $a \in \mathcal{N}$ beliebig gewählt war und Ξ eine PWO der reellen Zahlen der Länge ξ ist, folgt, daß $\forall \nu < \xi \ \exists (a^*, \tau^*) \in Z^* \ |a^*|_\Xi = \nu$ ist.
Dies gilt, da jedes solche ν gleich einem $|a|_\Xi$ ist.
Definiere $E^* := \{\tau \mid \exists a \in \mathcal{N} \ (a, \tau) \in Z^*\}$.
Dann enthält E^* nach dem vorher Gesagten eine Strategie für II für alle Spiele $G_*(\Upsilon_{H,\Lambda}, A_\nu)$.
Ferner gilt $E^* \in \mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R}; H)$, da $Z^* \in \mathbb{J}_{\delta_H}(\mathbb{R}; H)$ ist.

Sei nun $a_0 \in \Upsilon_{H,\Lambda}$ so, daß es E^* etabliere, und I spiele so, daß $a^{[0]} := a_0$ ist.
Also gilt nun, falls II die Regeln einhält, was stets der Fall ist, wenn er einer GST folgt, daß $\forall \tau \in E^* \; \forall a \in \mathcal{N} \; (a_0 = a^{[0]} \to \Phi_\Diamond(([a] * \tau)^{[0]}, \Lambda, \Diamond, \delta_H; H))$ gilt.
Da E^* von a_0 etabliert wurde, ist dies eine Σ_1^H-Aussage $\Psi(\tilde{r}, \Lambda, \Diamond, \delta_H; H)$, welche durch ein $a_1 \in \Upsilon_{H,\Lambda}$ erzwungen wird.
Also folgt
$\forall \eta \in S_{a_1} \; \forall \tau \in E^* \; \forall a \in \mathcal{N} \; (a_0 = a^{[0]} \to \Phi_\Diamond(([a] * \tau)^{[0]}, \Diamond(\eta), \Diamond\restriction\eta, \eta; H))$.
Damit folgt $\forall \tau \in E^* \; \forall a \in \mathcal{N} \; (a_0 = a^{[0]} \to S_{a_1} \subseteq S_{([a]*\tau)^{[0]}})$.
Also spiele I so, daß $a^{[1]} := a_1$ gilt, und es folgt analog
$\forall \tau \in E^* \; \forall a \in \mathcal{N} \; (a_0 = a^{[0]} \wedge a_1 = a^{[1]} \to \Phi_\Diamond(([a] * \tau)^{[1]}, \Lambda, \Diamond, \delta_H; H))$.
Wähle nun sukzessiv die übrigen $a^{[n]}$ analog so, daß folgt
$\forall \tau \in E^* \; \forall a \in \mathcal{N} \; ((\forall i \leq n \; a_i = a^{[i]}) \to S_{a_i} \subseteq S_{([a]*\tau)^{[i-1]}})$.
Diese Wahl ist mittels [DC] möglich.
Sei nun a_* so, daß $\forall n \in \omega \; a_*^{[n]} = a_n$ und setze $\eta_* := \min \bigcap_{n \in \omega} S_{a_*^{[n]}}$.
Betrachte das Spiel, in dem I a_* spielt.
Sei $\nu < \xi$ beliebig, $\tau_\nu \in E^*$ GST für II in $\mathcal{G}^*(\Upsilon_{H,\Lambda}, A_\nu)$ und $e_* := [a_*] * \tau$.
Dann gilt $\forall n \in \omega \; S_{a_*^{[n+1]}} = S_{a_{n+1}} \subseteq S_{e_*^{[n]}}$.
Folglich ist nach Definition des Spiels $\eta_* = o(a_*, e_*)$.
Also ist, da τ eine GST war, $\eta_* \in A_\nu$.
Aber ν war beliebig gewählt.
Deshalb ist $\eta_* \in \bigcap_{\nu < \xi} A_\nu$.
Daher folgt $\bigcap_{\nu < \xi} A_\nu \neq \emptyset$.

erweitert $\mathcal{F}$) Zu zeigen ist, daß aus $X \in \mathcal{F}$ folgt, daß $X \in \mathcal{U}$ ist.
Nach Definition von $\mathcal{F}$ reicht es aus, zu zeigen, daß für alle $b \in \Upsilon_{H,\Lambda}$ gilt, daß $S_b \in \mathcal{U}$ ist.
Sei also $b \in \Upsilon_{H,\Lambda}$ beliebig.
$S_b \in \mathcal{U}$ heißt, daß $S_b \in \pi_*(\mathcal{W}(\Upsilon_{H,\Lambda})) = \{X \subseteq \delta_H \mid \pi^{-1}[X] \in \mathcal{W}(\Upsilon_{H,\Lambda})\}$
$= \{X \subseteq \delta_H \mid \pi^{-1}[X] \in \{S \subseteq [\Upsilon_{H,\Lambda}]^{\aleph_0} \mid \text{II besitzt GST in } \mathcal{G}^{\mathrm{Sol}}(\Upsilon_{H,\Lambda}, S)\}$
ist.
Das heißt nach Definition von π und $\mathcal{G}^{\mathrm{Sol}}(\Upsilon_{H,\Lambda}, S)$, daß II so spielen muß, daß, falls $X = \{a_i, e_i \mid i \in \omega\}$ ist, das $\min \bigcap_{x \in X} S_x$ ein Element von S_b ist.
Aber II hat eine natürliche GST.
Er spiele so, daß $e^{[0]} = b$ ist und alle anderen $e^{[i]}$ beliebig, aber paarweise verschieden aus $\Upsilon_{H,\Lambda}$ sind.
Damit beachtet er alle Regeln und es gilt $X \subseteq [\Upsilon_{H,\Lambda}]^{\aleph_0}$, sofern auch I die Regeln beachtet .
Sollte I die Regeln nicht beachten, gewinnt II automatisch.
Ansonsten gilt wegen der Vollständigkeit von $\mathcal{F}$, daß $\bigcap_{x \in X} S_x \neq \emptyset$ ist.
Da ferner $b \in X$ ist, gilt $\min \bigcap_{x \in X} S_x \in S_b$.
Also ist $S_b \in \mathcal{U}$.

□

Abbildung 11: Eine Übersicht

4.4 Die elementare Einbettung j

Wie erhalten wir nun die elementare Einbettung j?
$\mathbb{L}(\mathbb{R})$ "kennt" den Ultrafilter $\mathcal{U}$.
Daher ergibt sich unter leichter Abwandlung der kanonischen Einbettung zu einem Ultrafilter eine elementare Einbettung, indem man alle Funktionen f von δ_H nach HOD betrachtet.
Man betrachtet also nicht nur Funktionen aus HOD.
Betrachte $[f]_{\mathcal{U}} := \{g : \delta_H \to \text{HOD} \mid \{\nu \mid f(\nu) = g(\nu)\} \in \mathcal{U}\}$.
Damit erhält man eine Einbettung $j : \text{HOD} \prec \tilde{M}$ in ein Modell $\tilde{M}$, indem man $x \in \text{HOD}$ die Äquivalenzklasse $[\text{const}_x]_{\mathcal{U}}$ zuordnet.
Da $\text{HOD} \subseteq \mathbb{L}(\mathbb{R})$ ist, weiß $\mathbb{L}(\mathbb{R})$, daß in HOD [AC] gilt, und kann somit den Satz von Łoš nutzen, um zu folgern, daß j elementar ist.
Transitiviere $\tilde{M}$ mittels [DC] zu einem transitiven Modell M.
Damit erhalten wir eine elementare Einbettung $j : \text{HOD} \prec M$.
Diese Einbettung ist zunächst eine elementare Einbettung aus der Sicht von $\mathbb{L}(\mathbb{R})$.
Betrachte die Ultrapotenz der Wohlordnung $<_{\text{OD}}$ von HOD.
Dann ist $<_M$ definiert durch $f <_M g :\leftrightarrow \{\nu \mid f(\nu) <_{\text{OD}} g(\nu)\} \in \mathcal{U}$ eine Wohlordnung auf M.
Damit kann man jedes Element von M durch seinen Platz in dieser Wohlordnung definieren.
Auch dies ist zunächst eine Wohlordnung aus der Sicht von $\mathbb{L}(\mathbb{R})$.
Nun ist j aus der Sicht von $\mathbb{L}(\mathbb{R})$ definierbar mit Hilfe von H, Λ und Ordinalzahlen.
H, Λ waren aber nach Voraussetzung in OD, also folgt, daß $j \in \text{OD}$ ist[45].
Damit ist auch $<_M \in \text{OD}$, da es mit Hilfe von j definiert wurde.
Nach dem eben Erwähnten kann man jedes Element in M über seinen Platz bezüglich $<_M$ definieren.
Also besitzt jedes Element von M eine OD-Definition "ist das α-te Element bezüglich $<_M$".
Da aber M transitiv war, folgt damit für $x \in M$, daß $x \in \text{HOD}$ ist.
Also ist $M \subseteq \text{HOD}$.
Damit kann ich die elementare Einbettung j wie folgt auffassen.
Für $X \in \text{HOD}$ ist $j{\restriction}X = \{\langle x, y\rangle \mid x \in X, y \in M, y = j(x)\}$.
Damit ist $j{\restriction}X$ zunächst in OD, da $x \in X$ in HOD, $y \in M$ in HOD und $y = j(x)$ in OD sind.
Aber alle Elemente von $j{\restriction}X$ sind ebenfalls in OD, da dies $\{x, y\}$ und $\{x\}$ sind.
Deren Elemente sind erneut in OD, da dies $\{x\}, \{y\}, x$ sind.
Und deren Elemente sind in HOD, da dies x, y sind. Also ist $j{\restriction}X$ in HOD.
Wir können also in diesem Sinne davon sprechen, daß
$\text{HOD} \models \forall H \subseteq \Theta\ \exists \delta < \Theta\ \forall \lambda \in [\delta, \Theta)\ \exists j\ j : \mathbb{V} \prec M$ gilt.

Damit ist Punkt A3) gezeigt.

[45]Zur genaueren Definition von j siehe Anhang

Als Anmerkung sei erwähnt, daß HOD den Ultrafilter $\mathcal{U}$ nicht "kennen" kann, so daß aus der Sicht von HOD j nicht von einem Ultrafilter herührt, sondern eventuell durch Extender entstanden ist.

4.5 Die Normalität des Ultrafilters $\mathcal{U}$

Wir interessieren uns ins diesem Teil für PWO, welche projektiv in Λ sind, das heißt $\Sigma^1_n(\Lambda, a)$ für geeignetes n aus den natürlichen und a aus den reellen Zahlen.

Konvention Wir wollen eine PWO P, welche projektiv in Λ ist, im Einzelfall durch die Schreibweise P^ϕ_Λ kennzeichnen.

Es folgen nun einige Bemerkungen, die ich für so einleuchtend halte, daß sie hier nicht bewiesen werden.

Sei $A \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ projektiv in Λ.
Dann erhält man durch $(b, c) \leq_Q (x, y) :\leftrightarrow b \leq_\Lambda x$ eine in Λ projektive PWO Q, deren Feld A ist.
Falls Q eine solche PWO ist und b aus dem Feld von Q stammt, dann ist $Q \restriction b$ ebenfalls eine solche PWO, wobei wir
$Q \restriction b$ als $(\{x \mid x <_Q b\}, \{(x, y) \mid x \leq_Q y <_Q b\})$ definieren.
Falls b aus dem Feld von Q stammt, dann ist $|b|_Q = |Q \restriction b|$.
Falls ferner $a <_Q b$ ist, dann gilt $|a|_{Q\restriction b} = |a|_Q$.

Definition 4.15
Zu A^ϕ_Λ projektiv in Λ assoziieren wir für jedes $\nu \in \mathrm{dom}(\Diamond)$ eine PWO
$A_{[\nu]} := A^\phi_{\Diamond(\nu)}$.
Und zwar sei für $\nu \in \mathrm{dom}(\Diamond)$ $A^\phi_{\Diamond(\nu)}$ das Objekt aus $\Diamond(\nu)$ genauso definiert, wie das ursprüngliche A aus Λ definiert war.
*Wir nennen $A^\phi_{\Diamond(\nu)}$ die **Reflexion von** A **auf** ν.*

Das heißt, falls $A^\phi_\Lambda = \phi(\Lambda, r)$ ist, so ist $A^\phi_{\Diamond(\nu)} := \phi(\Diamond(\nu), r)$.
Nach Konstruktion ist also $\Lambda_{[\nu]} = \Diamond(\nu)$, eine Tatsache, die noch öfter benutzt werden wird.

Proposition 4.16
Sei Q eine in Λ projektive PWO. Ferner sei b aus dem Feld von Q und ν aus dem Definitionsbereich von Λ.
Dann gilt $(Q \restriction b)_{[\nu]} = Q_{[\nu]} \restriction b$.

BEW: Nach den jeweiligen Definitionen folgt, daß
$(Q \restriction b)_{[\nu]} = (\{x \mid x <_Q b\}, \{(x, y) \mid x \leq_Q y <_Q b\})_{[\nu]} =$
$(\{x \mid x <_{Q_{[\nu]}} b\}, \{(x, y) \mid x \leq_{Q_{[\nu]}} y <_{Q_{[\nu]}} b\}) = Q_{[\nu]} \restriction b$.
$\square$

Wir wollen mit dem folgenden Lemma zeigen, daß unsere obige Definition einer Reflexion sinnvoll war.
Es gibt das Problem, daß unser A auf unterschiedliche Arten von Λ aus definiert sein könnte. Das heißt, wir erhalten eventuell verschiedene Reflexionen von A. Aber wir zeigen nun, daß je zwei Reflexionen fast überall übereinstimmen, so

daß es keine Rolle spielt, welche wir konkret betrachten, da sie modulo unseres Ultrafilters gleich sind.

Lemma 4.17
Seien $Q^\phi_\Lambda, Q^\psi_\Lambda$ PWO projektiv in Λ.
Dann gilt:

1. *Falls $Q^\phi_\Lambda = Q^\psi_\Lambda$ ist, dann ist $\{\nu \in \mathrm{dom}(\Diamond) \mid Q^\phi_{\Diamond(\nu)} = Q^\psi_{\Diamond(\nu)}\} \in \mathcal{F}$.*
2. *Falls $b \in \mathrm{Fld}(Q)$ ist, dann ist $C_Q(b) := \{\nu \mid b \in \mathrm{Fld}(Q_{[\nu]})\} \in \mathcal{F}$.*
3. *Für $\nu \in C_Q(b)$ gilt $|(Q{\restriction}b)_{[\nu]}| = |b|_{Q_{[\nu]}}$.*
4. *Falls $a <_Q b$ ist, dann ist $F_Q(a,b) := \{\nu \mid a <_{Q_{[\nu]}} b\} \in \mathcal{F}$.*
5. *Für $\nu \in C_Q(b) \cap F_Q(a,b)$ gilt $|a|_{(Q{\restriction}b)_{[\nu]}} = |a|_{Q_{[\nu]}}$.*

BEW: Die Prämissen in 1), 2) und 4) sind Σ^H_1-Aussagen und werden deshalb herunterreflektiert.
Betrachte z.B. die Aussage aus 1) $Q^\phi_\Lambda = Q^\psi_\Lambda$.
Dann ist $Q^\phi_\Lambda = Q^\psi_\Lambda \equiv$
$\forall x \in Q^\phi_\Lambda\ \exists y \in Q^\psi_\Lambda\ x = y \wedge \forall y \in Q^\psi_\Lambda\ \exists x \in Q^\phi_\Lambda\ x = y \wedge \Diamond = \Diamond \wedge \delta_H = \delta_H \equiv$
$\Xi(a \bullet b, \Lambda, \Diamond, \delta_H; H)$ eine Σ^H_1-Aussage, da Q^ϕ_Λ $\Sigma^1_n(\Lambda, a)$ und Q^ψ_Λ $\Sigma^1_m(\Lambda, b)$ war.
Also ist $\Xi(a \bullet b, \Lambda, \Diamond, \delta_H; H) \equiv \Phi_\Diamond(\pi(a \bullet b), \Lambda, \Diamond, \delta_H; H)$.
Also ist mit 3.13 und 4.8
$\mathcal{F} \ni S_{\pi(a\bullet b)} = \{\nu \in \mathrm{dom}(\Diamond) \mid \Phi_\Diamond(\pi(a \bullet b), \Diamond(\nu), \Diamond{\restriction}\nu, \nu; H)\}$
$= \{\nu \in \mathrm{dom}(\Diamond) \mid \forall x \in Q^\phi_{\Diamond(\nu)}\ \exists y \in Q^\psi_{\Diamond(\nu)}\ x = y \wedge$
$\forall y \in Q^\psi_{\Diamond(\nu)}\ \exists x \in Q^\phi_{\Diamond(\nu)}\ x = y \wedge \Diamond{\restriction}\nu = \Diamond{\restriction}\nu \wedge \nu = \nu\}$
$= \{\nu \in \mathrm{dom}(\Diamond) \mid Q^\phi_{\Diamond(\nu)} = Q^\psi_{\Diamond(\nu)}\}$.
Analog beweist man die übrigen Behauptungen.
Aussagen 3), 5) gelten wegen der Bemerkungen zu Beginn des Kapitels.
□

Wir wollen nun unsere beiden Normalitätstheoreme formulieren, zuerst das für unseren Filter $\mathcal{F}$, welches wir nur zum Beweis des Theorems für unseren UF $\mathcal{U}$ benutzen werden. Das Normalitätstheorem für $\mathcal{U}$ wird dann im nächsten Teil die zentrale Rolle spielen, da es soviel Stärke liefert, daß die gewünschten Eigenschaften unserer elementaren Einbettung, welche bezeugt, daß Θ in der Tat Woodin ist, als Propositionen "abfallen".

Satz 4.18 (Normalitätstheorem für $\mathcal{F}$)
Sei R eine PWO projektiv in $\Lambda, X \subseteq \mathrm{dom}(\Diamond), X \in \mathcal{F}^+$ und $g : X \to \mathrm{ON}$.
Falls für alle $\nu \in X$ gilt, daß $g(\nu) < |R_{[\nu]}|$ ist, dann existiert ein $a \in \mathrm{Fld}(R)$, so daß $\{\nu \mid \nu \in X \wedge a \in \mathrm{Fld}(R_{[\nu]}) \wedge g(\nu) = |a|_{R_{[\nu]}}\} \in \mathcal{F}^+$ gilt.

BEW: Angenommen der Satz gilt nicht.
Sei dann R ein Gegenbeispiel minimaler Länge.
Der Beweis des Satzes erfolgt nun in fünf Schritten.

1. Nach Annahme ist für alle $a \in \mathrm{Fld}(R)$ die Menge
$\{\nu \mid \nu \in X \wedge a \in \mathrm{Fld}(R_{[\nu]}) \wedge g(\nu) = |a|_{R_{[\nu]}}\} \in \tilde{\mathcal{F}}$[46].
Wir zeigen nun, daß die "größere" Menge
$\{\nu \mid \nu \in X \wedge a \in \mathrm{Fld}(R_{[\nu]}) \wedge g(\nu) \leq |a|_{R_{[\nu]}}\}$ immer noch klein ist, das heißt ein Element von $\tilde{F}$ ist.
Nach Annahme gilt das Theorem für alle $b \in \mathrm{Fld}(R)$ angewandt auf $R \restriction b$, da R minimal war.
Definiere für $b \in \mathrm{Fld}(R)$ $\tilde{D}(b) := C_R(b) \cap \{\nu \in X \mid g(\nu) < |(R \restriction b)_{[\nu]}|\}$.
Angenommen es gäbe ein $b \in \mathrm{Fld}(R)$, so daß $\tilde{D}(b) \in \mathcal{F}^+$ ist.
Dann existiert nach dem Satz angewandt auf $R \restriction b$ und $\tilde{D}(b)$ ein $a \in \mathrm{Fld}(R \restriction b)$, so daß
$D^*(b) := \{\nu \in \tilde{D}(b) \mid a \in \mathrm{Fld}((R \restriction b)_{[\nu]} \wedge g(\nu) = |a|_{(R \restriction b)_{[\nu]}}\} \in \mathcal{F}^+$ ist.
Es ist $\{\nu \mid g(\nu) = |a|_{R_{[\nu]}}\} \supseteq$
$\{\nu \in \tilde{D}(b) \mid a \in \mathrm{Fld}((R \restriction b)_{[\nu]}) \wedge g(\nu) = |a|_{R_{[\nu]}} \wedge b \in \mathrm{Fld}(R_{[\nu]}) \wedge a <_{R_{[\nu]}} b\}$
$= \{\nu \in \tilde{D}(b) \mid a \in \mathrm{Fld}((R \restriction b)_{[\nu]}) \wedge g(\nu) = |a|_{R_{[\nu]}}\} \cap C_R(b) \cap F_R(a,b)$
$= D^*(b) \cap C_R(b) \cap F_R(a,b)$[47].
$D^*(b)$ ist in $\mathcal{F}^+$ und nach 4.17 sind $C_R(b)$ und $F_R(a,b)$ im Filter. Daher ist auch der Schnitt dieser Mengen in $\mathcal{F}^+$.
Damit gilt dann das Theorem doch für R im Widerspruch zur Annahme.
Also gilt für alle $b \in \mathrm{Fld}(R)$ $\tilde{D}(b) \in \tilde{\mathcal{F}}$.
Es ist auch $\tilde{\tilde{D}}(b) := \{\nu \mid \nu \in X \wedge b \in \mathrm{Fld}(R_{[\nu]}) \wedge g(\nu) = |b|_{R_{[\nu]}}\} \in \tilde{\mathcal{F}}$, da ansonsten b das Theorem für R erfüllt.
Damit ist $D(b) := \tilde{D}(b) \cup \tilde{\tilde{D}}(b) = \{\nu \in X \cap C_R(b) \mid g(\nu) \leq |b|_{R_{[\nu]}}\}$ als Vereinigung kleiner Mengen klein, also in $\tilde{\mathcal{F}}$.

2. In diesem Schritt zeigen wir, daß auf einer nicht kleinen Menge eine Menge und ihre Reflexion disjunkt sind.
Definiere $Z := \{(b,c) \mid b \in \mathrm{Fld}(R) \wedge c \in \Upsilon_{H,\Lambda} \wedge S_c \cap D(b) = \emptyset\}$.
Z ist eine Teilmenge von $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$, die zu jedem "kleinen" b einen "großen" Zeugen c liefert.
Mit dem Coding Lemma erhalten wir ein $Z^* \subseteq Z, Z^* \in \mathrm{pos}\Sigma^1_1(<_R)$, welches jede Komponente von Z trifft, was bedeutet, daß für jedes Tupel (b,c) aus Z ein Tupel (b^*, c^*) in Z^* existiert, so daß $|b|_R = |b^*|_R$ gilt.
Da es zu jedem $b \in \mathrm{Fld}(R)$ wegen Schritt 1 einen Zeugen c in Z gibt, trifft Z^* auch jede Komponente von R.
Z besitzt eine natürliche PWO, welche Elemente bezüglich der ersten Koordinate ordnet. Diese PWO vererbt sich auf Z^* und wir wollen sie im folgenden mit R^* bezeichnen.
Es gilt also $(b,c) \leq_{R^*} (x,y) :\leftrightarrow b \leq_R x$.
Da Z^* jede Komponente von R trifft, gilt $|R^*| = |R|$ und $|(b,c)|_{R^*} = |b|_R$.
Da Z^* aus $\mathrm{pos}\Sigma^1_1(<_R)$ ist, gibt es ein $a \in \mathcal{N}$, so daß für unsere gute universelle Menge G^R $Z^* = G^R_a$ ist.

[46] also klein
[47] da für $\nu \in C_R(b) \cap F_R(a,b)$ nach 4.17 $|a|_{R_{[\nu]}} = |a|_{(R \restriction b)_{[\nu]}}$ ist

Wir können also für alle $\nu \in \mathrm{dom}(\Diamond)$ eine Reflexion $Z^*_{[\nu]}$ durch $Z^*_{[\nu]} := G_a^{R_{[\nu]}}$ definieren.
Da Z^* jede Komponente von R trifft, gilt die Reflexion auf einer Filtermenge, das heißt
$D_2 := \{\nu \in \mathrm{dom}(\Diamond) \mid Z^*_{[\nu]}$ trifft jede Komponente von $R_{[\nu]}\} \in \mathcal{F}$.
Für $(b,c) \in Z^* \subseteq Z$ war nach Konstruktion von Z $c \in \Upsilon_{H,\Lambda}$ gefordert, also gilt $\Phi_\Diamond(c, \Lambda, \Diamond, \delta_H; H)$.
Damit gilt für alle $\nu \in S_c$ $\Phi_\Diamond(c, \Diamond(\nu), \Diamond\restriction\nu, \nu; H)$.
Es ist $D_1 := S_c \cap D_2$ als Schnitt von Filtermengen im Filter und es gilt $S_c \cap D(b) = \emptyset$ nach Konstruktion.
Daher gilt für alle $\nu \in D_1$ $\nu \notin D(b)$.
Angenommen es gäbe ein $\nu \in X \cap D_1$, so daß $(b,c) \in Z^* \cap Z^*_{[\nu]}$ ist.
Da $\nu \notin D(b)$ gilt, folgt nach Definition von $D(b)$ $g(\nu) > |b|_{R_{[\nu]}}$.
Nun ist $|b|_{R_{[\nu]}} = |R_{[\nu]}\restriction b|$ nach den Bemerkungen am Anfang dieses Kapitels.
Ferner ist $R_{[\nu]}\restriction b = (R\restriction b)_{[\nu]}$ nach 4.16.
Insgesamt folgt $g(\nu) > |b|_{R_{[\nu]}} = |R_{[\nu]}\restriction b| = |(R\restriction b)_{[\nu]}|$.
Aber da $\nu \in X$ war, gilt nach der Prämisse des Satzes[48] $g(\nu) < |(R\restriction b)_{[\nu]}|$.
Widerspruch
Also gilt für alle $\nu \in X \cap D_1$, daß $Z^* \cap Z^*_{[\nu]} = \emptyset$ ist.
Es sei angemerkt, daß $X \cap D_1 \neq \emptyset$ ist, da $X \in \mathcal{F}^+$ und $D_1 \in \mathcal{F}$ ist.

3. In diesem Schritt konstruieren wir eine nicht kleine Menge, auf der Schritt 2 widersprüchlich ist.
Wegen Schritt 2 gilt
$\delta \in X \cap D_1 \wedge g(\delta) \leq \alpha < |R^*_{[\delta]}| \to (R^*_{[\delta]})_\alpha \cap Z^* = \emptyset$.
Wir benutzen unsere zulässigen Kodierungen, um diese Aussage umzuschreiben[49].
$\forall\delta < \delta_H\ \epsilon_{1_{X\cap D_1}}(\delta) \downarrow\simeq 1 \to (\forall\alpha < |R^*_{[\delta]}|\ \epsilon_g(\delta) \downarrow\leq \alpha \to (R^*_{[\delta]})_\alpha \cap Z^* = \emptyset)$
Diese Σ_1^H-Aussage wird auf eine Filtermenge M_1 reflektiert.
Also gilt für alle $\nu \in M_1$ die Aussage
$\forall\delta < \nu\ \epsilon_{1_{X\cap D_1}}(\delta) \downarrow\simeq 1 \to (\forall\alpha < |R^*_{[\delta]}|\ \epsilon_g(\delta) \downarrow\leq \alpha \to (R^*_{[\delta]})_\alpha \cap Z^*_{[\nu]} = \emptyset)$.
Setze $\tilde{X} := M_1 \cap D_1 \cap X$.
Dann ist $\tilde{X} \in \mathcal{F}^+$.

4. In diesem Schritt konstruieren wir die Voraussetzungen, um das Non-Monotonic Coding Lemma anwenden zu können.
Setze $\mu_\delta := |R^*_{[\delta]}|$.
Dann ist μ_δ die Länge der reflektierten PWO.
Setze $X^\delta := \bigcup_{g(\delta)\leq\alpha<\mu_\delta}(R^*_{[\delta]})_\alpha$.
X^δ besteht also aus allen Komponenten von $R^*_{[\delta]}$ oberhalb von $g(\delta)$.
Nach Schritt 3 gilt für $\delta, \zeta \in \tilde{X}$, daß, falls $\delta \neq \zeta$ ist,
$X^\delta \cap X^\zeta \subseteq X^\delta \cap \bigcup_{\alpha<\mu_\zeta}(R^*_{[\zeta]})_\alpha = X^\delta \cap Z^*_{[\zeta]} = \emptyset$ ist.

[48] der nach Annahme für $R\restriction b$ gilt
[49] Ich verweise erneut wegen der Schreibweisen auf 1.2 und 2.119

Präwohlordne X^δ mittels K^δ, wobei K^δ die Einschränkung der PWO von $Z^*_{[\delta]}$ sei.
Setze $\lambda_\delta := |K^\delta|$.
Definiere analog zur Konstruktion beim Non-Monotonic Lemma die Mengen $X_{\delta,\alpha}$ und die PWO $K_{\delta,\alpha}$.
Ein kleiner technischer Unterschied zum Non-Monotonic Coding Lemma besteht in diesem Fall darin, daß wir uns $\alpha \in [g(\delta), \mu_\delta)$ vorstellen[50].
Es ist aber $g(\delta) + 0 = g(\delta)$ und $g(\delta) + \lambda_\delta = \mu_\delta$, so daß dieser Unterschied praktisch keinen Unterschied macht.
Definiere für $a \in \mathrm{Fld}(R^*)$ $X_{\delta_H,a} := \bigcup_{\gamma<\delta_H} X^\gamma \cup (R^*)_{|a|_{R^*}}$.
Diese Menge reflektiert auf $X_{\delta,a} = \bigcup_{\gamma<\delta} X^\gamma \cup (R^*_{[\delta]})_{|a|_{R^*_{[\delta]}}}$ in dem Sinne, daß aus $|a|_{R^*_{[\delta]}} = \alpha$ folgt $X_{\delta,\alpha} = X_{\delta,a}$.
Man kann dann $X_{\delta_H,a}$ präwohlordnen, indem $(R^*)_{|a|_{R^*}}$ oberstes Element wird und alle anderen Elemente ihre von der lexikographischen Ordnung induzierte PWO erben.
Wir können das Non-Monotonic Coding Lemma anwenden und erhalten:
$\exists t \in \mathcal{N}\ \forall \delta \in \tilde{X}\ \forall \alpha \in [g(\delta), \mu_\delta)\ G_t^{\leq_{K_{\delta,\alpha}}, \nleq_{K_{\delta,\alpha}}} \cap (K^\delta)_\alpha = \emptyset \leftrightarrow \alpha = g(\delta)$

5. Wir führen nun Schritt 2 zum Widerspruch.
Sei im folgenden $\tilde{t}$ ein fest gewähltes t welches Schritt 4 bezeugt.
Dann gilt für ein Element von $\mathcal{F}^{+}$[51], daß
$\exists \gamma < \mu_\delta\ \forall \alpha \in [\gamma, \mu_\delta)\ G_{\tilde{t}}^{\leq_{K_{\delta,\alpha}}, \nleq_{K_{\delta,\alpha}}} \cap (R^*_{[\delta]})_\alpha = \emptyset \leftrightarrow \alpha = \gamma$ gilt.
Offenbar ist dieses γ eindeutig bestimmt und gleich $g(\delta)$.
Wir nennen es im folgenden γ_δ.
Es folgt, daß die Aussage
$\exists \gamma < |R^*|\ \forall \alpha \in [\gamma, |R^*|)\ G_{\tilde{t}}^{\leq_{K_{\delta,\alpha}}, \nleq_{K_{\delta,\alpha}}} \cap (R^*)_\alpha = \emptyset \leftrightarrow \alpha = \gamma$ gilt.
Angenommen dies wäre nicht so.
Dann wäre das eine Σ_1^H-Aussage, die reflektiert auf eine Filtermenge zuträfe, welche wiederum $\tilde{X}$ trifft, da $\tilde{X}$ nicht klein ist.
Dann sagt aber auf dieser gemeinsamen Menge $\tilde{X}$, daß ein solches γ existiert, und die Reflexion, daß kein solches γ existiert, was einen Widerspruch ergäbe.
Also gilt obige Aussage.
Fixiere nun ein solches γ.
Dies ist erneut eindeutig.
Sei $(\tilde{b}, \tilde{c}) \in (R^*)_\gamma$.
Dann wird γ auf γ_δ reflektiert.
Also existiert eine Filtermenge M_2,
so daß für alle $\delta \in M_2 \cap \tilde{X}$ $(\tilde{b}, \tilde{c}) \in (R^*_{[\delta]})_{\gamma_\delta}$ ist.
Dann folgt aber, da $M_2 \cap \tilde{X} \in \mathcal{F}^+$ ist, daß für alle $\delta \in X \cap M_2$ $(\tilde{b}, \tilde{c}) \in (R^*)_\gamma$ und $(\tilde{b}, \tilde{c}) \in (R^*_{[\delta]})_{g(\delta)}$ ist.

[50] Im Lemma ist $\alpha \in [0, \lambda_\delta)$.
[51] nämlich für $\tilde{X}$

Also ist $(\tilde{b}, \tilde{c}) \in Z^* \cap Z^*_{[\delta]}$ im Widerspruch zu Schritt 2.

Daß Schritt 2 widersprüchlich ist, steht im Widerspruch zu Schritt 1.
Dies steht im Widerspruch zur Annahme, daß der Satz nicht gilt.

$\square$

Korollar 4.19
Sei R PWO projektiv in Λ und A eine Menge, die jede Komponente von R trifft. Dann ist $\{\nu \mid \forall \alpha < |R_{[\nu]}| \ A \cap (R_{[\nu]})_\alpha \neq \emptyset\} \in \mathcal{F}$.

BEW: Angenommen das Korollar ist falsch.
Sei $g(\nu)$ definiert als das kleinste $\alpha < |R_{[\nu]}|$, so daß $(R_{[\nu]})_\alpha \cap A = \emptyset$.
Dann ist g wegen der Annahme auf einem Element X von $\mathcal{F}^+$ definiert.
Daher existiert nach Satz 4.18 ein $b \in \mathrm{Fld}(R)$, so daß auf einer Menge $Y \subseteq X, Y \in \mathcal{F}^+$ gilt, daß $g(\nu) = |b|_{R_{[\nu]}}$ ist.
Nach Voraussetzung existiert dann ein $a \in A$ mit $|a|_R = |b|_R$.
Dann ist die Reflexion $T := \{\nu \mid |a|_{R_{[\nu]}} = |b|_{R_{[\nu]}}\} \in \mathcal{F}$.
Somit trifft T Y, da $Y \in \mathcal{F}^+$ ist und damit gibt es ein $\nu \in Y \cap T$.
Somit ist $a \in (R_{[\nu]})_\alpha \cap A$ im Widerspruch zu $(R_{[\nu]})_\alpha \cap A = \emptyset$.

$\square$

Satz 4.20 (Normalitätstheorem für $\mathcal{U}$)
*Sei R PWO projektiv in Λ und $g : \delta_H \to \delta_H$ eine Funktion mit der Eigenschaft, daß für alle $\nu < \delta_H$ $g(\nu) < |R_{[\nu]}|$ ist.
Dann existiert ein $b \in \mathrm{Fld}(R)$, so daß
$T_b := \{\nu \mid b \in \mathrm{Fld}(R_{[\nu]}) \wedge g(\nu) = |b|_{R_{[\nu]}}\} \in \mathcal{U}$ ist.*

BEW: Angenommen das Theorem gilt nicht.
Dann ist für jedes $b \in \mathrm{Fld}(R)$ $T_b \in \tilde{\mathcal{U}}$.
Da $\mathcal{U}$ ein UF ist, ist dies gleichbedeutend mit $T_b \in \neg\mathcal{U}$.
Das bedeutet aber, II hat keine GST in $\mathcal{G}_*(\Upsilon_{H,\Lambda}, T_b)$, was nach [AD] äquivalent zu I hat GST in $\mathcal{G}_*(\Upsilon_{H,\Lambda}, T_b)$ ist.
Setze $Z := \{(b, \sigma) \mid b \in \mathrm{Fld}(R) \wedge \sigma$ ist GST für I in $\mathcal{G}_*(\Upsilon_{H,\Lambda}, T_b)\}$.
Mit dem Coding Lemma erhalten wir ein $Z^* \subseteq Z$ in $\mathrm{pos}\Sigma^1_1(<_R)$, welches jede Komponente von Z trifft.
Da $Z^* \in \mathrm{pos}\Sigma^1_1(<_R)$ ist, folgt, daß Z^* projektiv in Λ ist.
Damit definiert jedes $\nu \in \mathrm{dom}(\Diamond)$ eine Reflexion $Z^*_{[\nu]}$.
Setze $X_0 := \{\delta \mid \forall (b, \sigma) \in Z^*_{[\delta]} \ b \in \mathrm{Fld}(R_{[\delta]})\}$.
Nach 4.17 ist $X_0 \in \mathcal{F}$, da es die Reflexion von $\forall (b, \sigma) \in Z^* \ b \in \mathrm{Fld}(R)$ ist.
Ferner besitzt Z eine PWO R^*, welche durch die PWO der ersten Koordinate induziert wird[52].
Diese PWO vererbt sich auf $Z^* \subseteq Z$.
Da Z^* trivialerweise jede Koordinate von Z^* trifft, folgt mit 4.19, daß $X_1 := \{\delta \mid Z^*$ trifft jede Komponente von $Z^*(\delta)\} \in \mathcal{F}$ ist.
Es gilt nach Definition für jede Ordinalzahl $\eta < |R|$, daß
$(Z^*)_\eta = \{(b, \sigma) \in Z^* \mid |b|_R = \eta\}$ ist.

[52] $(b, \sigma) <_{R^*} (c, v) :\leftrightarrow |b|_R < |c|_R$

Umformuliert gilt für jede reelle Zahl $a \in \mathrm{Fld}(R)$, daß
$(Z^*)_{|a|_R} = \{(b,\sigma) \in Z^* \mid b \in \mathrm{Fld}(R) \wedge |b|_R = |a|_R\}$ ist.
Also ist die Reflexion
$X_2 := \{\delta \mid \forall a \in \mathrm{Fld}(R_{[\delta]})$
$(Z^*_{[\delta]})_{|a|_{R_{[\delta]}}} = \{(b,\sigma) \in Z^*_{[\delta]} \mid b \in \mathrm{Fld}(R_{[\delta]}) \wedge |b|_{R_{[\delta]}} = |a|_{R_{[\delta]}}\}\} \in \mathcal{F}$.
Setze $A^* := \{\sigma \mid \exists b\ (b,\sigma) \in Z^*\}$.
Da alle Elemente von A^* Gewinnstrategien für I sind, folgt
$\forall \sigma \in A^*\ \forall e \in \mathcal{N}\ \Phi_\Diamond((\sigma * [e])^{[0]}, \Lambda, \Diamond, \delta_H; H)$.
Nach dem Reflexionssatz 3.13 ist daher
$X_3 := \{\delta \mid \forall \sigma \in A^*_{[\delta]}\ \forall e \in \mathcal{N}\ \Phi_\Diamond((\sigma * [e])^{[0]}, \Diamond(\delta), \Diamond\restriction\delta, \delta; H)\} \in \mathcal{F}$.
Damit ist $X_0 \cap X_1 \cap X_2 \cap X_3$ als Schnitt von Filtermengen im Filter.
Daher existiert ein $e_0 \in \Upsilon_{H,\Lambda}$, so daß $S_{e_0} \subseteq X_0 \cap X_1 \cap X_2 \cap X_3$ ist.
Wähle nun ein solches $e_0 \in \Upsilon_{H,\Lambda}$.
Es folgt für $\delta \in S_{e_0}$, daß $\forall e \in \mathcal{N}\ \delta \in S_{(\sigma*[e])^{[0]}}$ ist.
Wir erhalten folgende Aussage
$\forall \sigma \in A^*\ \forall e \in \mathcal{N}\ e_0 = e^{[0]} \rightarrow \Phi_\Diamond((\sigma * [e])^{[1]}, \Lambda, \Diamond, \delta_H; H)$.
Wähle nun ein $e_1 \in \Upsilon_{H,\Lambda}$, so daß gilt
$S_{e_1} \subseteq \{\delta \mid \forall \sigma \in A^*(\delta)\ \forall e \in \mathcal{N}\ e_0 = e^{[0]} \rightarrow \Phi_\Diamond((\sigma * [e])^{[1]}, \Diamond(\delta), \Diamond\restriction\delta, \delta; H)\}$.
Bilde nun mittels [DC] eine ω-Sequenz $e_k \in \Upsilon_{H,\Lambda}$.
Für diese Sequenz gelte, daß $\delta \in S_{e_k} \wedge \sigma \in A^*(\delta)$ impliziert, daß für alle reellen e folgt, daß $\forall i < k\ e_i = e^{[i]} \rightarrow \delta \in S_{(\sigma*[e])^{[k]}}$ gilt.
Sei $\tilde{e}$ diejenige reelle Zahl, für die gilt $\forall i \in \omega\ \tilde{e}^{[i]} = e_i$.
Definiere ferner $\tilde{\delta} := \min \bigcap_{i\in\omega} S_{\tilde{e}^{[i]}}$.
Es gilt insbesonders, daß $\tilde{\delta} \in S_{e_0}$ ist.
Da daraus folgt, daß $\delta \in X_1$ ist, trifft Z^* jede Komponente von $Z^*_{[\tilde{\delta}]}$.
Sei $(\tilde{b}, \tilde{\sigma}) \in Z^*_{[\tilde{\delta}]}$.
Da auch $\tilde{\delta} \in X_0$ gilt, ist $\tilde{b} \in \mathrm{Fld}(R_{[\tilde{\delta}]})$.
Nun wissen wir aber, da $(\tilde{b}, \tilde{\sigma}) \in Z^* \subseteq Z$ ist, daß $\tilde{b} \in \mathrm{Fld}(R)$ ist.
Es gilt ferner, da $(\tilde{b}, \tilde{\sigma}) \in Z^*_{[\tilde{\delta}]}$ ist, daß $\tilde{\sigma} \in A^*_{[\tilde{\delta}]}$ ist.
Daher gilt für alle $i \in \omega$, daß $\tilde{\delta} \in S_{(\tilde{\sigma}*[\tilde{e}])^{[i]}}$ ist und es ist nach Definition
$\tilde{\delta} = o(\tilde{\sigma} * [\tilde{e}], \tilde{e})$.
Also gewinnt I $\mathcal{G}_*(\Upsilon_{H,\Lambda}, T_{\tilde{b}})$, da $\tilde{\sigma}$ eine GST ist.
Dieser Sieg kann offenbar erst durch Regel ω geschehen, da II nach Konstruktion alle Regeln beachtet hat.
Damit ist nach der Definition des Spiels $\tilde{\delta} \notin T_{\tilde{b}}$.
Es gilt aber $\tilde{b} \in \mathrm{Fld}(R_{[\tilde{\delta}]})$.
Ferner gilt, da $\tilde{\delta} \in S_{e_0}$ ist, daß $\tilde{\delta} \in X_2$ ist.
Nach Definition ist dann $g(\tilde{\delta}) = |(\tilde{b}, \tilde{\sigma})|_{Z^*_{[\tilde{\delta}]}} = |\tilde{b}|_{R_{[\tilde{\delta}]}}$.
Damit ist nach Definition $\tilde{\delta} \in T_{\tilde{b}}$.
Widerspruch

□

Damit wäre A4) erledigt.

4.6 Θ ist Woodin in HOD

Definition 4.21
Sei $a \in \mathcal{N}$.
Definiere eine Funktion $f_a : \delta_H \to \delta_H$ durch
1) Falls $\nu \in \mathrm{dom}(\Diamond)$ und $a \in \mathrm{Fld}(\Diamond(\nu))$, setze $f_a(\nu) := |a|_{\Diamond(\nu)}$.
2) Sonst setze $f_a(\nu) := 0$

Proposition 4.22
Falls $a <_\Lambda b$ ist, dann ist $\{\nu \mid f_a(\nu) < f_b(\nu)\} \in \mathcal{F}$.

BEW: $\{\nu \mid f_a(\nu) < f_b(\nu)\} =$
$\{\nu \in \mathrm{dom}(\Diamond) \mid a, b \in \mathrm{Fld}(\Diamond(\nu)) \wedge a <_{\Diamond(\nu)} b\} \cup$
$\{\nu \in \mathrm{dom}(\Diamond) \mid a \notin \mathrm{Fld}(\Diamond(\nu)) \wedge b \in \mathrm{Fld}(\Diamond(\nu)) \wedge |b|_{\Diamond(\nu)} > 0\} =$
$F_\Lambda(a,b) \cup \{\nu \in \mathrm{dom}(\Diamond) \mid a \notin \mathrm{Fld}(\Diamond(\nu)) \wedge b \in \mathrm{Fld}(\Diamond(\nu)) \wedge |b|_{\Diamond(\nu)} > 0\}$
$\supseteq F_\Lambda(a,b)$.
Damit ist dies aber eine Obermenge der Filtermenge $F_\Lambda(a,b)$ und mit F2) selbst eine Filtermenge.

$\square$

Proposition 4.23
Für alle $a \in \mathcal{N}$ gilt, daß $|a|_\Lambda = [f_a]_\mathcal{U}$ ist.

BEW:[53] Induktion über $|a|_\Lambda$.

IA: Sei $|a|_\Lambda = 0$.
Dann ist nach Lemma 4.17 $\{\nu \mid a \in \mathrm{Fld}(\Diamond(\nu))\} \in \mathcal{F}$ und
$|a|_{\Diamond(\nu)} = |(\Lambda\restriction a)_{[\nu]}| = |\emptyset| = 0$.
Also ist $\{\nu \in \mathrm{dom}(\Diamond) \mid f_a(\nu) = |a|_{\Diamond(\nu)} = 0 = \mathrm{const}_0(\nu)\} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$[54].
Also ist nach Definition von j $[f_a]_\mathcal{U} = [\mathrm{const}_0]_\mathcal{U} = 0 = |a|_\Lambda$,
wobei $[\mathrm{const}_0]_\mathcal{U} = 0$ gilt, da $\mathrm{const}_0 \leq f$ an jeder Stelle für jede denkbare, ordinalzahlwertige Funktion f.

IV: Es gelte für alle $|a|_\Lambda \leq \mu$, daß $|a|_\Lambda = [f_a]_\mathcal{U}$ ist.

IS: Sei nun $|a|_\Lambda = \mu + 1$.
Dann ist nach Lemma 4.17 $\{\nu \mid a \in \mathrm{Fld}(\Diamond(\nu))\} \in \mathcal{F}$ und
$|a|_{\Diamond(\nu)} = |(\Lambda\restriction a)_{[\nu]}| = |a|_{\Lambda_{[\nu]}}$.
Benutze das Normalitätstheorem mit $R = \Lambda\restriction a$.
Sei dazu h eine Funktion mit $[h]_\mathcal{U} < [f_a]_\mathcal{U}$.
Dann gibt es ein $U \in \mathcal{U}$ derart, daß für alle $u \in U$
$h(u) < f_a(u) = |a|_{\Diamond(u)} = |(\Lambda\restriction a)_{[u]}|$ ist.
Also existieren wegen der Normalität $U^* \subseteq U, U^* \in \mathcal{U}, b \in \mathbb{R}$, so daß für alle $u \in U^*$ $h(u) = |b|_{(\Lambda\restriction a)_{[u]}}$ ist.
Dann ist aber $b <_\Lambda a$ und somit ist $|b|_{(\Lambda\restriction a)_{[u]}} = |b|_{\Lambda_{[u]}}$.
Nun gilt nach IV mit der Definition von j, und da $b <_\Lambda a$ ist, daß
$[h]_\mathcal{U} = [f_b]_\mathcal{U} = |b|_\Lambda \leq \mu$ ist.

[53] Wir werden benutzen, daß $\Lambda(\nu) = \Diamond(\nu)$ ist, da Λ projektiv in Λ ist.
[54] $f_a(\nu) = |a|_{\Diamond(\nu)}$ gilt nach Definition

Also ist nach Definition $[f_a]_{\mathcal{U}} = \sup\{[h]_{\mathcal{U}} + 1 \mid [h]_{\mathcal{U}} < [f_a]_{\mathcal{U}}\} \leq \mu + 1$.
Dann ist $[f_a]_{\mathcal{U}} = \mu + 1$, da es ein $b \in \mathbb{R}$ gibt mit $|b|_\Lambda = \mu$.
Somit ist also $b <_\Lambda a$ und mit IV folgt $\mu = |b|_\Lambda = [f_b]_{\mathcal{U}} < [f_a]_{\mathcal{U}}$.

LS: Sei nun $|a|_\Lambda = \psi, \psi < \lambda, \lim(\psi)$ und die IV gilt für alle $\mu < \psi$.
Dann gilt, daß $\{\nu \mid a \in \mathrm{Fld}(\Diamond(\nu))\} \in \mathcal{F}$ und $|a|_{\Diamond(\nu)} = |(\Lambda \restriction a)_{[\nu]}|$ ist.
Benutze erneut das Normalitätstheorem mit $R = \Lambda \restriction a$.
Wir erhalten analog zum IS diesmal ein $b \in \mathbb{R}, b <_\Lambda a, |b| = \mu$, so daß für $[h]_{\mathcal{U}} < [f_a]_{\mathcal{U}}$ gilt, daß $[h]_{\mathcal{U}} = [f_b]_{\mathcal{U}} = |b|_\Lambda = \mu < \psi$ ist.
Also ist nach Definition $[f_a]_{\mathcal{U}} = \sup\{[h]_{\mathcal{U}} + 1 \mid [h]_{\mathcal{U}} < [f_a]_{\mathcal{U}}\} \leq \mu$.
Dann ist $[f_a]_{\mathcal{U}} = \psi$, da man für jedes $\mu < \psi$ ein $c \in \mathbb{R}$ findet mit $|c|_\Lambda = \mu + 1$.
Somit ist $[f_a]_{\mathcal{U}} > \mu$ für jedes $\mu < \psi$.

□

Proposition 4.24
h_* definiert durch $\nu \mapsto |\Diamond(\nu)|$ repräsentiert λ.

BEW: h_* repräsentiert $[h_*]_{\mathcal{U}}$ nach dem Satz von Łoš.

"$\leq \lambda$" Sei ζ eine Ordinalzahl kleiner $[h_*]_{\mathcal{U}}$, das heißt es gibt ein $U \in \mathcal{U}$, so daß für alle $u \in U$ $\zeta < h_*(u)$ gilt.
Also ist $[\mathrm{const}_\zeta]_{\mathcal{U}} < [h_*]_{\mathcal{U}}$.
Benutze das Normalitätstheorem mit $R = \Lambda$.
Es folgt die Existenz von $U^* \subseteq U, U^* \in \mathcal{U}, b \in \mathbb{R}$,
so daß für alle $u \in U^*$ $\zeta = \mathrm{const}_\zeta(u) = |b|_{\Diamond(u)} = f_b(u)$ ist.
Also gilt $[\mathrm{const}_\zeta]_{\mathcal{U}} = [f_b]_{\mathcal{U}}$.
Es folgt $[h_*]_{\mathcal{U}} \leq \lambda$.
Angenommen dies gilt nicht.
Dann existiert ein $\zeta \geq \lambda, \zeta < [h_*]_{\mathcal{U}}, b \in \mathbb{R}$, so daß
$\zeta \leq j(\zeta) = [\mathrm{const}_\zeta]_{\mathcal{U}} = [f_b]_{\mathcal{U}} = |b|_\Lambda < \lambda$ im Widerspruch zu $\zeta \geq \lambda$ gilt.

"$\geq \lambda$" Sei umgekehrt ζ eine Ordinalzahl mit der Eigenschaft, es existiert ein $b \in \mathbb{R}$, so daß $\zeta = [f_b]_{\mathcal{U}}$ ist.
Dann gibt es ein $U \in \mathcal{U}$ derart,
daß für alle $u \in U$ $\zeta = f_b(u) = |b|_{\Diamond(u)} < |\Diamond(u)| = h_*(u)$ ist.
Also ist $[f_b]_{\mathcal{U}} < [h_*]_{\mathcal{U}}$.
Für jedes beliebige b aus den reellen Zahlen ist nach Proposition 4.23 $|b|_\Lambda = [f_b]_{\mathcal{U}} < [h_*]_{\mathcal{U}}$.
Da ferner $|\Lambda| = \lambda$ ist, folgt, daß für alle $\zeta < \lambda$ ein reelles b existiert mit $|b|_\Lambda = \zeta$.
Also ist für alle $\zeta < \lambda$ $[h_*]_{\mathcal{U}} > \zeta$ und somit ist $[h_*]_{\mathcal{U}} \geq \lambda$.

Also folgt die Behauptung.

□

Wir können nun einfach überprüfen, daß alle Anforderungen an die elementare Einbettung erfüllt sind, was in den folgenden drei Propositionen geschehen wird.

Proposition 4.25
$\lambda \cap H = \lambda \cap j(H)$

BEW:

"$\subseteq$" Sei $\zeta < \lambda, \zeta \in H$.
Da $\lambda = |\Lambda|$ ist, existiert ein reelles a mit $|a|_\Lambda = \zeta$, und somit ist $|a|_\Lambda \in H$. Aus Reflexionsgründen gilt dann, daß $\{\nu \mid |a|_{\Lambda_{[\nu]}} \in H\} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ ist. Mit 4.23 gilt $|a|_\Lambda = [f_a]_\mathcal{U}$. Also ist $\{\nu \mid |a|_{\Lambda_{[\nu]}} = f_a(\nu)\} \in \mathcal{U}$. Dann ist der Schnitt dieser beiden Mengen $\{\nu \mid f_a(\nu) \in H\}$ ebenfalls im Ultrafilter. Es ist aber für alle ν $H = \mathrm{const}_H(\nu)$. Mit dem Satz von Łoš ist dann $[f_a]_\mathcal{U} \in [\mathrm{const}_H]_\mathcal{U} = j(H)$.
Zusammengefaßt gilt $\zeta = |a|_\Lambda = [f_a]_\mathcal{U} \in j(H)$.

"$\supseteq$" Sei $\zeta < \lambda, \zeta \notin H$.
Dann folgt analog, daß $[f_a]_\mathcal{U} \notin [c_H]_\mathcal{U}$ ist.
Also folgt $\zeta \notin j(H)$.

□

Proposition 4.26
$j(\delta_H) > \lambda$

BEW: Nach Definition von j gilt $j(\delta_H) = [c_{\delta_H}]_\mathcal{U}$.
Ferner gilt nach Definition von $\lozenge$, daß für alle $\nu \in \mathrm{dom}(\lozenge)$ $|\lozenge(\nu)| < \delta_H$ ist.
Da aber $\mathrm{dom}(\lozenge) \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ ist, folgt
$\{\nu \mid h_*(\nu) < c_{\delta_H}(\nu)\} = \{\nu \mid |\lozenge(\nu)| < \delta_H\} \supseteq \mathrm{dom}(\lozenge)$.
Also ist dies nach F2) eine Filtermenge und es folgt $\lambda = [h_*]_\mathcal{U} < [c_{\delta_H}]_\mathcal{U} = j(\delta_H)$.
□

Proposition 4.27
$\mathrm{crit}(j) = \delta_H$

BEW: Sei $\zeta < \delta_H$.
Es ist zu zeigen, daß $j(\zeta) = \zeta$.
Angenommen dies gelte nicht.
Sei ζ^* minimal mit der Eigenschaft, daß $j(\zeta^*) \neq \zeta^*$ ist.

Fall1) Angenommen $\zeta^* \in H$.
Dann folgt nach Proposition 4.25, da $\zeta^* < \delta_H < \lambda$ ist, daß
$\zeta^* \in \lambda \cap j(H) \subseteq j(H)$ ist.
Dies bedeutet, es existiert ein $\mu \in H$, so daß $\zeta^* = j(\mu)$ ist.

Fall1.1) Sei $\mu = \zeta^*$.
Widerspruch zu $\zeta^* \neq j(\zeta^*)$

Fall1.2) Sei $\mu > \zeta^*$.
Widerspruch zur Elementarität von j wegen $\mu \leq j(\mu) = \zeta^* < \mu$

Fall1.3) Sei $\mu < \zeta^*$.
Widerspruch zur Minimalität von ζ^* wegen $\mu < \zeta^* = j(\mu)$

Also ist Fall1) widersprüchlich.

Fall2) Angenommen $\zeta^* \notin H$.
Dann folgt nach Proposition 4.25, da $\zeta^* < \delta_H < \lambda$ ist, daß
$\zeta^* \notin \lambda \cap j(H)$ ist.
Also ist $\zeta^* \notin j(H)$, da $\zeta \in \lambda$ ist.
Dies bedeutet, es existiert ein $\mu \notin H$, so daß $\zeta^* = j(\mu)$ ist. Wir erhalten einen analogen Widerspruch.

Also gibt es kein Gegenbeispiel.
Nach Proposition 4.26 wissen wir aber, daß $j(\delta_H) > \lambda > \delta_H$ ist.
Insgesamt folgt also $\mathrm{crit}(j) = \delta_H$.

$\square$

Satz 4.28 (Woodin(1992))
$[\mathbb{V} = \mathbb{L}(\mathbb{R}) + AD]$ Θ *ist in HOD eine Woodinkardinalzahl.*

BEW:
Der Beweis ergibt sich aus dem bislang Gezeigten, denn für jede HOD-Teilmenge H von Θ existiert unsere Reflexionskardinalzahl δ_H kleiner als besagtes Θ, so daß wir für λ zwischen δ_H und Θ -ausgehend von einer beliebigen PWO Λ der reellen Zahlen mit dieser Länge[55]- und mit Hilfe unserer "Orakelfunktion" $\Diamond_H$[56] und des Solovayobjekts[57] unseren Ultrafilter $\mathcal{U}_{H,\Lambda}$ definieren können. Mit Hilfe dieses UF kann man eine elementare Einbettung von HOD[58] in ein Modell M^* definieren. Dieses können wir mittels [DC][59] transitivieren. Schließlich liefert uns die Normalität[60] des UF alle Woodineigenschaften der Einbettung.

$\square$

[55] An dieser Stelle gebrauchen wir für deren Exisstenz Θ.
[56] An dieser Stelle gebrauchen wir $\mathbb{V} = \mathbb{L}(\mathbb{R})$.
[57] An dieser Stelle gebrauchen wir [AD].
[58] Hier gebrauchen wir HOD und die Tatsache, daß wir in HOD [AC] gilt, also Łoš genutzt werden kann.
[59] Hier gebrauchen wir $\mathbb{V} = \mathbb{L}(\mathbb{R}) + AD$.
[60] Hier gebrauchen wir [AD] in Form der Coding Lemmata.

5 Ausblick

Die natürliche Fortsetzung dieser Diplomarbeit ist in [Hau] (4.3) skizziert. Es gilt z.B.:
1) Unter $\mathbb{V} = \mathbb{L}(\mathbb{R})$ existiert ein inneres Modell M mit ω Woodinkardinalzahlen.
2) Unter $\mathbb{L}[x] + \mathrm{Det}(\Delta^1_2)$ gilt ω_2 ist Woodin in HOD[61].

Ferner lassen sich dann auch Ergebnisse in der anderen Richtung zeigen, z.B.:
3) ZFC + Es gibt eine meßbare Kardinalzahl größer als ω-viele Woodinkardinalzahlen $\models AD^{\mathbb{L}(\mathbb{R})}$

Und schließlich ergeben sich wichtige Konsistenzresultate als Metatheoreme, z.B.:
4) $(ZF + \mathrm{Det}(\Delta^1_2))$ ist äquikonsistent zu (ZFC + Es gibt eine Woodinkardinalzahl).
5) $(ZF + DC + AD)$ ist äquikonsistent zu (ZFC + Es gibt abzählbar viele Woodinkardinalzahlen).

Dieses letze Ergebnis ist ein besonders wichtiges Ergebnis, da es uns die genaue Konsistenzstärke des Determiniertheitsaxioms liefert.
[Kan94], Satz 32.16, erwähnt Resultat 5) und beschreibt den ungefähren Ablauf des Beweises, den ich an dieser Stelle ebenfalls wiedergeben möchte.
Für die Hinrichtung beginnen wir mit dem Hauptsatz dieser Diplomarbeit, nämlich daß Θ Woodin in HOD ist, und verfeinern die hier entwickelten Methoden. Damit erhalten wir ausgehend von einem inneren Modell $M_0 := \mathrm{HOD}^{\mathbb{L}(\mathbb{R})}$ eine inklusions-absteigende Kette innerer Modelle M_i, in denen es eine Woodinkardinalzahl θ_i geben wird.
M_{i+1} gewinnt man aus M_i mittels einer Ultrapotenz-Konstruktion und einem Analogon des Martin-Ultrafilters über den Turinggraden. So ergibt sich eine inklusions-aufsteigende Kette von "Mengen der reellen Zahlen" $\mathbb{R}_i$ mit der Eigenschaft, daß $\mathbb{L}(\mathbb{R}_i) \preceq \mathbb{L}(\mathbb{R}_{i+1})$ gilt.
Hierbei setzt man natürlich $\mathbb{R}_0 := \mathbb{R}$ und man erhält M_{i+1} als $HOD^{\mathbb{L}(\mathbb{R}_{i+1})}$.
In Analogie zu unserem Ursprungsresultat kann man zeigen, daß jedes der $M_i[W_i]$ ein Modell für die Woodineigenschaft von θ_i mit geeignetem Zeugen W_i ist.
Man zeigt dann, daß für den Schnitt dieser M_i jedes θ_i eine Woodinkardinalzahl in $M[W]$ ist, wobei W konkret mittels der W_i angegeben werden kann.
Die Rückrichtung funktioniert, indem man zunächst ω-viele Woodins abzählbar macht.
Dabei konstruiert man eine Sequenz generischer G_i, so daß die resultierenden generischen Einbettungen miteinander verträglich sind, das heißt in jedem $\mathbb{V}[G_i]$ existieren generische, elementare Einbettungen $j_i : \mathbb{V} \preceq M_i$ und es gibt Verbindungsoperatoren $j_{i,k} : M_i \preceq M_k$ für $k > i$, so daß das Ganze kommutiert, also $j_{i,k} \circ j_i = j_k$ ist.

[61] Unter der Zusatzbedingung, daß $x \in \mathcal{N}$ geeignet ist.

Wenn man mit $\mathbb{R}_i$ die reellen Zahlen von M_i bezeichnet, dann gilt [AD] in $\mathbb{L}(\bigcup_{n\in\omega}\mathbb{R}_n)$.
Das entscheidende Argument, warum [AD] in diesem Modell gilt, benutzt das One-Step-Lemma von Martin-Steele, um die Determiniertheit eines möglichen kleinsten Gegenbeispiels einer undeterminierten Menge A zu zeigen.
Hierzu konstruiert man zu A und seinem Komplement eine geeignete Baumdarstellung, folgert die schwache Homogenität und erhält einen Widerspruch zu obigem Lemma.

Eine genaue Feinstrukturanalyse des hier eingeführten $\Diamond_H$-Prinzips ist sicherlich als Fortführung dieser Arbeit ebenfalls möglich, hätte aber den zeitlichen Rahmen der Arbeit gesprengt und ist deshalb nicht ins Auge gefaßt worden.

Ebenso wurde angeregt, eine dem $\Diamond_H$-Prinzip ähnliche Formulierung des $\Diamond$-Prinzips in $\mathbb{L}$ zu entwickeln, um eine bessere Vergleichbarkeit zu erhalten. Auch dieses Projekt war als Ausblick auf mögliche Fortsetzungen geplant und im Zeitrahmen dieser Arbeit nicht zu realisieren.

Ein noch unzureichend gelöstes Problem ist die Detailliertheit der Arbeit. Während an einigen Stelle zu kleinschrittig vorgegangen wird[62], und eine Straffung möglich wäre, ist mir an anderer Stelle eine wünschenswerte Ausführung im Detail auf Grund der Zeitbeschränkung nicht mehr gelungen[63].

[62] siehe z.B. die Definition einer Topologie

[63] z.B. das Kapitel über Rekursionstheorie oder insbesonders Ausführungen über die Komplexität von Formeln

6 Anhang

6.1 Die Komplexität von Formeln

In dieser Diplomarbeit werden häufig Aussagen der Form ϕ ist eine Σ_1^H-Formel getroffen.
Ich werde hier exemplarisch die Formel aus dem Beweis von 4.23 untersuchen.
$Z = \iota y \exists h\ h(r) = y \wedge$ "h ist geeignet".
Es müßte noch gezeigt werden, daß die in 2.77 erwähnte Surjektion Δ_1-definierbar ist.
Damit wäre dann
$Z = \iota y \exists P\ \exists h\ \exists \zeta\ \exists n \in \omega\ \exists s\ \exists t\ h(n, s, \zeta) = y \wedge$ "h erfüllt obige Δ_1-Definition"
$\wedge r = (n, (s \bullet t)(0), (s \bullet t)(1), ...) \wedge P(t) = \zeta$
$\wedge \mathrm{dom}(P) = \mathbb{R} \wedge \mathrm{Fn}(P) \wedge \mathrm{Im}(h) = L(\mathbb{R}, \zeta)$[64].
Dies wäre dann eine Σ_1^H-Formel $\Psi(y, r)$ wie gewünscht.
Beachte:
1)$f(x) = y$ ist Δ_0.
2)dom ist eine Σ-Operation.
3)Im ist eine Σ-Operation.
4)Fn(f) ist Δ_0[65].

Es entspricht z.B.:
$\mathrm{Fn}(f) \equiv \mathrm{Rel}(f) \wedge \forall a \in f\ \forall b \in f\ 1^{\mathrm{st}}(a) = 1^{\mathrm{st}}(b) \rightarrow 2^{\mathrm{nd}}(a) = 2^{\mathrm{nd}}(b)$[66]
$\mathrm{Rel}(f) \equiv \forall x \in f\ \mathrm{OP}(x)$[67]
$\mathrm{OP}(x) \equiv \exists d \in x\ \exists y_1 \in d\ \exists y_2 \in d\ x = \langle y_1, y_2 \rangle$.
$x = \langle a, b \rangle \equiv x = \{\{a\}, \{a, b\}\}$
$x = \{\{a\}, \{a, b\}\} \equiv \{a\} \in x \wedge \{a, b\} \in x \wedge \forall y \in x\ (y = \{a\} \vee y = \{a, b\})$

[64] $L(\mathbb{R}, \zeta)$ entspricht $\mathbb{L}_\zeta(\mathbb{R})$ und ist die mittels Rekursion definierte Σ-Operation.
[65] Fn(f) entspricht der Aussage "f ist eine Funktion".
[66] Rel(f) entspricht "f ist eine Relation", 1^{st} bildet auf die erste und 2^{nd} auf die zweite Koordinate eines geordneten Paares ab
[67] OP(x) entspricht "x ist ein geordnetes Paar".

6.2 Die Definierbarkeit von j

An dieser Stelle werde ich ausführen, was ich unter der Aussage "$j \in \mathrm{OD}$" verstehen will.
Zunächst ist $j : \mathrm{HOD} \to M$ natürlich auf einer echten Klasse definiert, so daß die Aussage $j \in \mathrm{OD}$ in dieser Form nicht gemacht werden sollte.
Wir benötigen jedoch nur die Aussage $y = j(x)$, so daß ich zeigen werde, daß für beliebiges $x \in \mathrm{OD}$ $j(x) \in \mathrm{OD}$ ist.
Zunächst sei dazu bemerkt, daß wir ein $\Lambda \in \mathrm{OD}$ und ein $H \in \mathrm{HOD}$ fixiert haben.
Aus $\Lambda \in \mathrm{OD}$ folgt, da $\{\mathbb{R}\} = \{y \mid \mathrm{dom}(\Lambda) = y\}$ ist, daß $\mathbb{R} \in \mathrm{OD}$ ist[68].
Nun arbeitet man sich durch die einzelnen Definitionen und erhält:
$j(x) = [\mathrm{const}_x]_{\mathcal{U}} = \{f \mid f : \delta_H \to \mathrm{HOD} \wedge f \sim_{\mathcal{U}} \mathrm{const}_x\}$[69]
$= \{f \mid f : \delta_H \to \mathrm{HOD} \wedge \{\nu \mid f(\nu) = x\} \in \mathcal{U}_{H,\Lambda}\}$
$= \{f \mid f : \delta_H \to \mathrm{HOD} \wedge \exists \tau \in \mathcal{N}\ \forall a \in \mathcal{N}\ \forall i \in \omega\ \Phi_\Diamond(a^{[i]}, \Lambda, \Diamond, \delta_H; H) \to \pi(O(a, [a] * \tau)) \in \{\nu \mid f(\nu) = x\}\}$
$= \{f \mid f : \delta_H \to \mathrm{HOD} \wedge \exists \tau \in \mathcal{N}\ \forall a \in \mathcal{N}\ \forall i \in \omega\ \Phi_\Diamond(a^{[i]}, \Lambda, \Diamond, \delta_H; H) \to \min \bigcap_{y \in O(a,[a]*\tau)} \{\alpha \mid \Phi_\Diamond(y, \Diamond(\alpha), \Diamond\restriction\alpha, \alpha; H)\} \in \{\nu \mid f(\nu) = x\}\}$
$= \{f \mid f : \delta_H \to \mathrm{HOD} \wedge \exists \tau \in \mathcal{N}\ \forall a \in \mathcal{N}\ \forall i \in \omega\ \Phi_\Diamond(a^{[i]}, \Lambda, \Diamond, \delta_H; H) \to f(\min \bigcap_{y \in \{a^{[n]}, ([a]*\tau)^{[n]} \mid n \in \omega\}} \{\alpha \mid \Phi_\Diamond(y, \Diamond(\alpha), \Diamond\restriction\alpha, \alpha; H)\}) = x\}$
Damit hängt $j(x)$ von $H, \delta_H, \Lambda, \Diamond, \mathbb{R}, \omega, x$ ab.
Für $\Diamond$ könnte man aber seine Σ_1^H-Definition einsetzen.
Außerdem gilt:
1)$H \in \mathrm{HOD}$
2)$\delta_H \in \mathrm{ON}$
3)$\Lambda \in \mathrm{OD}$
4)$\mathbb{R} \in \mathrm{OD}$
5)$\omega \in \mathrm{ON}$
6)$x \in \mathrm{HOD}$
Also ist $j(x) \in \mathrm{OD}$.

Wir haben bei obigen Gleichungen unter anderem ausgenutzt, daß
$(A \in \mathcal{U}_{H,\Lambda}) \leftrightarrow$
(II besitzt eine GST in $\mathcal{G}^{\mathrm{Sol}}(\Upsilon_{H,\Lambda}, \pi^{-1}[A])) \leftrightarrow$
$(\exists \tau \in \omega^\omega\ \forall a \in \omega^\omega\ \forall i \in \omega\ a^{[i]} \in \Upsilon_{H,\Lambda} \to O(a, [a] * \tau) \in \pi^{-1}[A]) \leftrightarrow$
$(\exists \tau \in \omega^\omega\ \forall a \in \omega^\omega\ \forall i \in \omega\ a^{[i]} \in \{b \in \mathbb{R} \mid \Phi_\Diamond(b, \Lambda, \Diamond, \delta_H; H)\} \to O(a, [a] * \tau) \in \pi^{-1}[A]) \leftrightarrow$
$(\exists \tau \in \omega^\omega\ \forall a \in \omega^\omega\ \forall i \in \omega\ a^{[i]} \in \{b \in \mathbb{R} \mid \Phi_\Diamond(b, \Lambda, \Diamond, \delta_H; H)\} \to \pi(O(a, [a] * \tau)) \in A)$ gilt.
Außerdem gilt $O(a, [a] * \tau) = \{a^{[i]}, ([a] * \tau)^{[i]} \mid i \in \omega\}$.
Schließlich gilt auch noch $\pi(X) \in A \leftrightarrow$
$\min \bigcap_{x \in X} S_x \in A \leftrightarrow$
$\min \bigcap_{x \in X} \{\alpha \mid \Phi_\Diamond(x, \Diamond(\alpha), \Diamond\restriction\alpha, \alpha; H)\} \in A$.

[68] OD ist definierbar abgeschlossen.
[69] Dies ist eine echte Klasse, so daß wir unseren Trick aus der Diskussion um Definition 2.97 benutzen müssen.

6.3 Strategien im Solovay-Spiel

In diesem Teil werde ich exemplarisch vorführen, wie II Schritt für Schritt eine Strategie im Solovay-Spiel entwickelt, sofern die Gewinnmenge X der Schnitt zweier Mengen X_1 und X_2 ist, für die II Gewinnstrategien τ_1 beziehungsweise τ_2 besitzt.
Ich werde in diesem Teil die Formulierungen bewußt bildhafter gestalten, um dem Leser die Vorstellung zu erleichtern.
Ich werde desweiteren von meiner üblichen Darstellung von Spielen abweichen. Das heißt, ich werde kopierte Züge nicht mehr mit einer Box kennzeichnen, sondern den Originalzug mittels Umrahmung kennzeichnen und Pfeile vom Originalzug zur Kopie zeichnen.
Desweiteren werden Züge auf die II keinen Einfluß hat[70] durch Pfeile gekennzeichnet.

II behauptet also, er besitze eine Gewinnstrategie in $\mathcal{G}^{\mathrm{Sol}}(A, X)$. Um dies zu beweisen, muß er gegen ein beliebiges Spiel von I gewinnen.
Beide Spieler setzen sich also an einen Tisch und I eröffnet mit einem Zug $a^{[0]}(0)$.

I	$a^{[0]}(0)$	
II		?

Wie soll II antworten?
II spielt (simuliert) nun unter dem Tisch zwei weitere Spiele, eines gemäß τ_1, das andere gemäß τ_2.
Auf diese beiden Spiele hat I aktiv keinerlei Einfluß.
Wir nennen deswegen den Spieler I in diesen beiden Spielen A_1 und A_2.
Dabei bestimmt II, welche Züge A_1, A_2 spielen.
II beschließt, daß A_1, A_2 dieselbe 0-te reelle Zahl wie I spielen möchten und kopiert deshalb dessen Zug.

I	$a^{[0]}(0)$		
II		?	
A_1	$a^{[0]}(0)$		$?a^{[0]}(1)?$
τ_1		$e_1^{[0]}(0)$	
A_2	$a^{[0]}(0)$		$?a^{[0]}(1)?$
τ_2		$e_2^{[0]}(0)$	

[70] sei es, daß er eine Strategie folgt, oder sei es, daß es Züge von I sind

II hat nun Antwortzüge gemäß seiner beiden Gewinnstrategien gefunden und würde die beiden Spiele gerne fortsetzen, da er ja auf Grund seiner Wahl weiß, daß A_1, A_2 jetzt den nächsten Zug von Spieler I kopieren müssen.
Wie lautet dieser aber?
Dies erfährt II nur, wenn er im richtigen Spiel endlich zieht, also entscheidet er sich zunächst, dieselbe 0-te reelle Zahl zu spielen, wie sie gemäß τ_1 gespielt wird.

I	$a^{[0]}(0)$		$a^{[0]}(1)$		$a^{[1]}(0)$	
II		$e_1^{[0]}(0)$		$e_1^{[0]}(1)$		?
A_1	$a^{[0]}(0)$		$a^{[0]}(1)$		?	
τ_1		$e_1^{[0]}(0)$		$e_1^{[0]}(1)$		
A_2	$a^{[0]}(0)$		$a^{[0]}(1)$		?	
τ_2		$e_2^{[0]}(0)$		$e_2^{[0]}(1)$		

Was ist alles geschehen?
Sobald II auf dem Tisch seinen Zug ausführt, antwortet I mit einem beliebigen $a^{[0]}(1)$.
Auf diesen Zug haben A_1 und A_2 aber gewartet, also kopiert ihn II.
Daraufhin erhält er sofort Antwortzüge gemäß τ_1 und τ_2.
Aber II weiß nach seiner Wahl, daß er die Antwort $e_1^{[0]}(1)$ gemäß τ_1 auf dem Tisch spielen muß, also kopiert er sie dorthin.
Daraufhin antwortet I wieder mit einem beliebigem $a^{[1]}(0)$.
Nun steht II erneut vor der Frage, was er auf dem Tisch spielen soll, und was er A_1 und A_2 spielen lassen will.
Er entscheidet sich, die bislang noch nicht berücksichtigte 0-te reelle Zahl gemäß τ_2 auf dem Tisch zu spielen.
Für A_1 beschließt er, daß er nun ebenfalls die 0-te reelle Zahl gemäß τ_2 spielen will.
A_2 hingegen soll die 0-te reelle Zahl gemäß τ_1 spielen.
Dies alles beschließt II mit dem Hintergedanken, am Ende zu zeigen, daß in allen drei Spielen dieselben reellen Zahlen gespielt werden.

I	$a^{[0]}(0)$		$a^{[0]}(1)$		$a^{[1]}(0)$		$a^{[0]}(2)$		$a^{[1]}(1)$		$a^{[2]}(0)$	
II		$e_1^{[0]}(0)$		$e_1^{[0]}(1)$		$e_2^{[0]}(0)$		$e_1^{[0]}(2)$		$e_2^{[0]}(1)$		?
A_1	$a^{[0]}(0)$		$a^{[0]}(1)$		$e_2^{[0]}(0)$		$a^{[0]}(2)$		$e_2^{[0]}(1)$		?	
τ_1		$e_1^{[0]}(0)$		$e_1^{[0]}(1)$		$e_1^{[1]}(0)$		$e_1^{[0]}(2)$		$e_1^{[1]}(1)$		
A_2	$a^{[0]}(0)$		$a^{[0]}(1)$		$e_1^{[0]}(0)$		$a^{[0]}(2)$		$e_1^{[0]}(1)$		?	
τ_2		$e_2^{[0]}(0)$		$e_2^{[0]}(1)$		$e_2^{[1]}(0)$		$e_2^{[0]}(2)$		$e_2^{[1]}(1)$		

Soweit entwickelt sich das Spiel wieder erzwungenermassen auf Grund der Wahlen von II.
Jetzt muß sich II erneut entscheiden, wie das Spiel fortgesetzt werden soll.
Er beschließt, gemäß der Idee, die er im Hinterkopf hat, auf dem Tisch die 1-te reelle Zahl gemäß τ_1 zu spielen und bei nächster Gelegenheit dann die 1-te reelle Zahl gemäß τ_2 folgen zu lassen.
A_1 und A_2 sollen zunächst beide die 1-te reelle Zahl, welche I spielt, kopieren, bevor sie baldmöglichst die 1-te reelle Zahl gemäß τ_2 im Falle von A_1 bzw. gemäß τ_1 im Falle von A_2 folgen lassen.
So entwickelt sich das Spiel, indem II auf dem Tisch immer alternierend die reellen Zahlen gemäß τ_1 und τ_2 spielt.
Am Ende gewinnt II.

Literatur

[Bar75] J. Barwise. *Admissible Sets and Structures.* Springer, 1975. In: Perspectives in Mathematical Logic.

[Bur96] P. Koepke & M. Burghardt. *Skript zu Vorlesungen von 91-95 an der Universität Bonn.* 1996.

[Dev73] K. J. Devlin. *Aspects of Constructibility.* Springer, 1973. In: Lecture Notes in Mathematics, Volume 354.

[Dev84] K. J. Devlin. *Constructibility.* Springer, 1984. In: Perspectives in Mathematical Logic.

[Hau] W.H. Woodin & A.R.D. Mathias & K. Hauser. *The Axiom of Determinacy.* to appear.

[Jec97] T. Jech. *Set Theory.* Springer, 1997. In: Perspectives in Mathematical Logic.

[Kan94] A. Kanamori. *The Higher Infinite.* Springer, 1994. In: Perspectives in Mathematical Logic.

[Kec84] A.S. Kechris. The axiom of determinacy implies dependent choices in $\mathbb{L}(\mathbb{R})$. *Journal of Symbolic Logic*, 49, 1984.

[Kec95] A. S. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory.* Springer, 1995. In: Graduate Texts in Mathematics, Volume 156.

[Kun80] K. Kunen. *Set Theory.* North-Holland Publishing, 1980. In: Studies in Logic, Volume 102.

[Mos80] Y.N. Moschovakis. *Descriptive Set Theory.* North-Holland Publishing, 1980. In: Studies in Logic, Volume 100.

[Mos94] Y. N. Moschovakis. *Notes on Set Theory.* Springer, 1994. In: Undergraduate Texts in Mathematics.

[Sco71] J. Myhill & D. Scott. Ordinal definability. *Journal of the American Mathematical Society*, XIII/1, 1971. In: Proceedings of Symposia in Pure Mathematics.

[Slo71] J.L. Bell & A.B. Slomson. *Models and Ultraproducts.* North-Holland Publishing, 1971.

[Ste89] D.A. Martin & J.R. Steel. A proof of projective determinacy. *Journal of the American Mathematical Society*, 1989.

[Wri58] G.H. Hardy & E.M. Wright. *Einführung in die Zahlentheorie.* R.Oldenbourg München, 1958.

[Kun80] [Sco71]