Prof. Dr. Matthias Lesch
Dr. Boris Vertman Wintersemester 2013-14

9. Übung Globale Analysis I

Abgabe am Mittwoch, den 18. Dezember 2013 nach der Vorlesung

Aufgabe 1. (5 Punkte). Eine kompakte Riemannsche Fläche M ist per Definition eine kompakte 2-dimensionale reelle Mannigfaltigkeit mit Atlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$, und $\varphi_i : U_i \to V_i \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}, i \in I$, so dass die Kartenwechsel $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ holomorph sind, $i, j \in I$. Mit anderen Worten, M ist eine 1-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ heißt holomorph, falls für jedes $i \in I$, $f \circ \varphi_i^{-1}$ holomorph ist. Mit $\mathcal{O}(M)$ bezeichnen wir die holomorphen Funktionen auf M.

(i) Der komplexifizierte Tangentialraum von M ist das Tensorprodukt $T_{\mathbb{C}}M := TM \otimes \mathbb{C}$. Eine 1-Form $\omega \in \Omega^1_{\mathbb{C}}(M) := \Gamma(\Lambda^1 TM \otimes \mathbb{C})$ ist vom Typ $(1,0)$ bzw. vom Typ $(0,1)$, falls zu jedem Punkt $p \in M$ eine holomorphe Kartenumgebung (U, z) und eine glatte Funktion $f \in C^\infty(U)$ existieren, so dass

- $\omega|_U = f dz$, falls ω vom Typ $(1,0)$ ist,
- $\omega|_U = f d\bar{z}$, falls ω vom Typ $(0,1)$ ist,

Dabei bezeichnet wie üblich $z = x + iy$, sowie $dz = dx + idy, d\bar{z} = dx - idy$. Zeigen Sie, dass die Klasse der $(1,0)$ bzw. $(0,1)$ Formen wohldefiniert ist. Das heißt, ist $\omega|_U = f dz$ für die Karte (U, z), so ist für jede weitere Karte (V, u) bereits $\omega|_{U\cap V} = g du$ mit $g \in C^\infty(U \cap V)$. Wir schreiben entsprechend $\omega \in \Omega^{(1,0)}_{\mathbb{C}}(M)$ bzw. $\omega \in \Omega^{(1,0)}_{\mathbb{C}}(M)$.

(ii) Zeigen Sie, jede 1-Form $\omega \in \Omega^1_{\mathbb{C}}(M)$ besitzt eine eindeutige Zerlegung

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \omega_1 \in \Omega^{(1,0)}_{\mathbb{C}}(M), \omega_2 \in \Omega^{(1,0)}_{\mathbb{C}}(M).$$

Aufgabe 2. (5 Punkte). Seien $u, v \in \mathbb{C}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$ und $\Gamma = \mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v$ das von u und v aufgespannte Gitter. Zeigen Sie, dass die Riemannsche Zahlenkugel $\widehat{\mathbb{C}}$ sowie der Torus $\mathbb{C}/\Gamma$ in natürlicher Weise Riemannsche Flächen sind.

Aufgabe 3. (5 Punkte). Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass M genau dann orientierbar ist, wenn M ein nichtverschwindendes Normalenvektorfeld in $\mathbb{R}^{n+1}$ besitzt.

Aufgabe 4. (5 Punkte). Beweisen Sie, dass der reellprojektive Raum $\mathbb{RP}^n$ genau dann orientierbar ist, wenn n ungerade ist.