Prof. Dr. Matthias Lesch
Dr. Boris Vertman Wintersemester 2013-14

8. Übung Globale Analysis I

Abgabe am Mittwoch, den 11. Dezember 2013 nach der Vorlesung

Aufgabe 1. (5 Punkte)

Für $X, Y \in \Gamma(T\mathbb{R}^3)$ und $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ besitzen die üblichen Operationen $\times$, div, grad und rot, die folgende koordinatenfreie Darstellung

$$X \times Y = \star(X^\flat \wedge Y^\flat)^\sharp, \qquad \operatorname{div} X = \star\, d\star X^\flat,$$
$$\operatorname{grad} f = (df)^\sharp, \qquad \operatorname{rot} X = (\star\, dX^\flat)^\sharp.$$

Zeigen Sie unter Benutzung dieser koordinatenfreien Darstellung die nachfolgenden Rechenregeln.

(i) $\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$.

(ii) $\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X + Xf$.

(iii) $\operatorname{div}(X \times Y) = \langle Y, \operatorname{rot} X\rangle - \langle X, \operatorname{rot} Y\rangle$.

(iv) $\operatorname{rot}(fX) = f \operatorname{rot} X + \operatorname{grad} f \times X$.

(v) $\operatorname{rot}(X \times Y) = [X, Y] + (\operatorname{div} Y)X - (\operatorname{div} X)Y$.

Aufgabe 2. (5 Punkte). Es sei $\omega \in \Omega(\mathbb{R}^2 \backslash \{0\})$ gegeben durch

$$\omega = -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 + \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_2.$$

Zeigen Sie, dass ω geschlossen, aber nicht exakt ist (das heißt $d\omega = 0$, aber es existiert kein $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \backslash \{0\})$ mit $\omega = df$). Hinweis: Betrachten Sie das Integral von ω entlang der Kurve $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)), t \in [0, 2\pi]$.

Aufgabe 3. (5 Punkte) (de Rham Komplex im Minkowski Raum)

Seien t, x_1, x_2 und x_3 die kartesischen Koordinaten des $\mathbb{R}^4$ mit der Lorentzmetrik

$$g = -dt \otimes dt + dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3.$$

Seien grad^g, rot^g, Ψ und div^g die Abbildungen, die das folgende Diagramm kommutativ machen. Berechnen Sie aus dieser Vorgabe grad^g, rot^g, Ψ und div^g in kartesischen Koordinaten. Benutzen Sie, wenn möglich, grad, div, rot, $\star$ (ohne Zusatz) im $\mathbb{R}^3$ aus der Vorlesung.

$$\begin{tikzcd}
\Omega^0(\mathbb{R}^4) \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "="] & \Omega^1(\mathbb{R}^4) \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\sharp^g"] & \Omega^2(\mathbb{R}^4) \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "\Phi^{-1}"] & \Omega^3(\mathbb{R}^4) \arrow[r, "d_3"] \arrow[d, "\sharp^g \circ \star^g"] & \Omega^4(\mathbb{R}^4) \arrow[d, "-\star^g"] \\
C^\infty(\mathbb{R}^4) \arrow[r, "\operatorname{grad}^g"] & \Gamma(T\mathbb{R}^4) \arrow[r, "\operatorname{rot}^g"] & C^\infty(\mathbb{R}, \Gamma(T\mathbb{R}^3))^2 \arrow[r, "\Psi"] & \Gamma(T\mathbb{R}^4) \arrow[r, "\operatorname{div}^g"] & C^\infty(\mathbb{R}^4)
\end{tikzcd}$$

wobei $\Phi(X, Y) := dt \wedge X^\flat + \star Y^\flat$.

Aufgabe 4. (5 Punkte) Es sei (M, g) eine orientierte m-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und $N \subset M$ eine orientierte Hyperfläche. Die Einschränkung von g auf den Tangentialraum von N liefert eine Riemannsche Metrik von N.
Es sei X ein *Einheitsnormalenfeld an* N, d.h. es gelte für alle $p \in N$:

(i) $X(p) \perp T_pN$ und $\|X(p)\| = 1$.

(ii) Bilden $e_1, ..., e_{n-1}$ eine orientierte Basis von T_pN, so sind $X(p), e_1, ..., e_{n-1}$ eine orientierte Basis von T_pM.

Eine einfache Konsequenz der letzten Übung ist, dass unter dieser Orientierungswahl für alle $p \in N$

$$\mathrm{vol}_N(p) = \mathrm{int}_{X(p)}(\mathrm{vol}_M(p)). \qquad (*)$$

Es sei nun speziell $\eta \in \Omega^n(\mathbb{R}^{n+1})$ gegeben durch

$$\eta = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+1} x_j \, dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^{n+1}$$

und $i\colon\ S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ die natürliche Einbettung. Folgere aus (*), dass $i^*\eta \in \Omega^n(S^n)$ ein orientiertes Volumenelement der n-Sphäre ist.

Aufgabe 5. (Zusatzaufgabe. 5 Punkte)

(i) Es sei $E \to F \to G$ eine exakte Sequenz von $\mathbb{K}$-Vektorräumen und E und G seien endlichdimensional. Zeige, dass F ebenfalls endlichdimensional ist.

(ii) Seien $E^i,\ i = 0, ..., n$ endlich-dimensionale Vektorräume und $d_i : E^i \to E^{i+1},\ i = 0, ..., n-1$ lineare Abbildungen. Die Sequenz

$$(E^\bullet, d_\bullet):\ 0 \to E^0 \xrightarrow{d_0} E^1 \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{n-1}} E^n \to 0,$$

heißt ein Komplex der Länge n, falls $d_{i+1} \circ d_i = 0$ für alle $i = 0, ..., n-1$. Wir definieren die Kohomologie des Komplexes als

$$H^i(E^\bullet, d_\bullet) := \frac{\ker d_i : E^i \to E^{i+1}}{\mathrm{im} d_{i-1} : E^{i-1} \to E^i}.$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim E^i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H^i(E^\bullet).$$

Insbesondere gilt

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim E^i = 0,$$

wenn die Sequenz $(E^\bullet, d_\bullet)$ exakt ist.