Prof. Dr. Matthias Lesch
Dr. Boris Vertman Wintersemester 2013-14

7. Übung Globale Analysis I

Abgabe am Mittwoch, den 4. Dezember 2013 nach der Vorlesung

Aufgabe 1. (5 Punkte) (Das Cartan Lemma)

Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension n. Seien $e_1, ..., e_p \in E$ linear unabhängige Vektoren. Weiter seien $f_1, ..., f_p \in E$ gegeben. Zeige, dass die Identität

$$\sum_{j=1}^{p} f_j \wedge e_j = 0$$

genau dann gilt, wenn es $A_{ij} \in \mathbb{K}$, $1 \leq i, j \leq p$, mit $A_{ij} = A_{ji}$ so gibt, dass für $j = 1, ..., p$ gilt

$$f_j = \sum_{i=1}^{p} A_{ij} e_i.$$

Aufgabe 2. (5 Punkte)

Sei E ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Es sei $\xi \in E, \xi \neq 0$. In der Vorlesung definieren wir die *äußere Multiplikation mit* ξ durch:

$$\mathrm{ext}_\xi \colon \Lambda E \to \Lambda E, \quad \mathrm{ext}_\xi(\eta) := \xi \wedge \eta.$$

Man zeige, dass die Sequenz

$$0 \longrightarrow \Lambda^0 E \xrightarrow{\mathrm{ext}_\xi} \Lambda^1 E \xrightarrow{\mathrm{ext}_\xi} \Lambda^2 E \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Lambda^{n-1} E \xrightarrow{\mathrm{ext}_\xi} \Lambda^n E \longrightarrow 0$$

an jeder Stelle exakt ist. Eine Sequenz $E \xrightarrow{\psi} F \xrightarrow{\varphi} G$ heißt exakt bei F, falls $\operatorname{im} \psi = \ker \varphi$.

Aufgabe 3. (5 Punkte)

Es sei E ein endlich-dimensionaler, euklidischer Vektorraum. Für $X \in E$ bezeichne $X^\flat = (X, \cdot)$ die zu X assoziierte Linearform. Zeigen Sie für $w \in \Lambda^* E^* \otimes \mathcal{O}$

$$\iota_X w = \pm * (X^\flat \wedge *w).$$

Bestimmen Sie das Vorzeichen.

Aufgabe 4. (5 Punkte). Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum.

(i) Betrachte zwei Mengen $\{v_1, \ldots, v_k\}$ und $\{w_1, \ldots, w_k\}$ linear unabhängiger Vektoren in V. Zeigen Sie, dass beide Mengen genau dann Basen desselben k-dimensionalen Unterraumes sind, wenn für ein $c \neq 0$

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_k = c \cdot w_1 \wedge \ldots \wedge w_k.$$

(ii) Seien $v_1, \ldots, v_k \in V$ linear abhängig. Zeigen Sie, dass für alle $w \in \Lambda^k V^*$

$$w(v_1, \ldots, v_k) = 0.$$

(iii) Wähle auf V eine Orientierung und betrachte einen Unterrraum $W \subset V$ der Kodimension eins mit der induzierten Orientierung. Sei g ein Skalarprodukt auf V. Dann können die entsprechenden Volumenelemente auf V und W jeweils mit $\mathrm{vol}_V \in \Lambda^n V$ und $\mathrm{vol}_W \in \Lambda^{n-1} W$ identifiziert werden. Zeigen Sie, dass für ein $X \in V$ mit $X \perp W$ und $g(X, X) = 1$ gilt

$$\mathrm{vol}_W = \pm \iota_X \mathrm{vol}_V .$$

Erklären Sie wovon das Vorzeichen abhängig ist.