Prof. Dr. Matthias Lesch
Dr. Boris Vertman

Wintersemester 2013-14

6. Übung Globale Analysis I

Abgabe am Mittwoch, den 27. November nach der Vorlesung

Aufgabe 1. (5 Punkte)

Sei $(U_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ eine offene Überdeckung der differenzierbaren Mannigfaltigkeit M. Seien $g_{\alpha\beta}, \widetilde{g}_{\alpha\beta} \in C^\infty(U_\alpha \cap U_\beta, GL(n,\mathbb{R}))$, $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, Kozykeln. Das heißt, über $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ gilt

$$g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}.$$

Seien E und $\widetilde{E}$ die zu $\{g_{\alpha\beta}\}$ bzw. $\{\widetilde{g}_{\alpha\beta}\}$ gehörigen Vektorraumbündel.
Zeige: E ist genau dann isomorph zu $\widetilde{E}$ wenn es $h_\alpha \in C^\infty(U_\alpha, GL(n,\mathbb{R}))$ so gibt, dass über $U_\alpha \cap U_\beta$

$$h_\alpha^{-1} \widetilde{g}_{\alpha,\beta} h_\beta = g_{\alpha\beta}.$$

Aufgabe 2. (5 Punkte)

Sei $\varphi \in \operatorname{Hom}(E, F)$ ein Bündelhomomorphismus von konstantem Rang. D.h. $\operatorname{Rang}(\varphi|_{E_p})$ ist unabhängig von p. Zeige, dass dann

$$\ker\varphi := \bigcup_{p\in M} \ker(\varphi|_{E_p})$$

und

$$\operatorname{im}\varphi := \bigcup_{p\in M} \varphi(E_p)$$

Unterbündel von E bzw. F sind.

Aufgabe 3. (5 Punkte). Sei E ein Vektorbündel über einer kompakten Mannigfaltigkeit M. Beweisen Sie, dass es genügend großes $N \in \mathbb{N}$ und ein Epimorphismus

$$\varphi : M \times \mathbb{R}^N \to E,$$

existieren. Zeigen Sie, dass insbesondere $E \oplus \ker\varphi$ ein triviales Vektorbündel ist und Schnitte $s_1, \dots, s_N \in \Gamma(E)$ existieren, so dass an jedem $p \in M$

$$\operatorname{span}(s_1(p), \dots, s_N(p)) = E_p.$$

Aufgabe 4. (5 Punkte)

Sei E die disjunkte Vereinigung aller eindimensionalen Unterräume des $\mathbb{R}^2$, das heißt

$$E = \{(p, x) \mid p \in \mathbb{R}P^1, x \in p\}.$$

Die natürliche Projektion $\pi : E \to \mathbb{R}P^1, (p, x) \mapsto p$ ordnet jedem eindimensionalen Unterraum des $\mathbb{R}^2$ die entsprechende Gerade durch den Ursprung als Element des $\mathbb{R}P^1$ zu.

(i) Gebe für E einen Bündelatlas und die entsprechenden Kozykel an.

(ii) Zeige, dass E kein triviales Vektorbündel ist.

Hinweis: Benutzen Sie den Zwischenwertsatz.