Prof. Dr. Matthias Lesch
Dr. Boris Vertman

Wintersemester 2013-14

4. Übung Globale Analysis I

Abgabe am Mittwoch, den 13. November nach der Vorlesung

Aufgabe 1. (5 Punkte)

(i) Zeigen Sie, dass durch
$$X(x, y, z) = (-y, x, 0)$$
ein glattes Vektorfeld auf $\mathbb{S}^2$ gegeben ist. Bestimmen Sie die Integralkurven von X.

(ii) Betrachten Sie auf $\mathbb{R}^2$ das Vektorfeld
$$X(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} + (1 + y^2)\frac{\partial}{\partial y}.$$
Bestimmen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$ den Fluss φ_t und $\mathcal{D}(\varphi_t)$. Skizzieren Sie die Flusslinien.

Aufgabe 2. (5 Punkte).

(i) Geben Sie auf $\mathbb{R}$ ein glattes Vektorfeld an, welches nicht vollständig ist.

(ii) Sei X ein glattes Vektorfeld auf $\mathbb{R}$ mit
$$\lim_{x\to\pm\infty} X(x) = 0, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\partial^n X(x)}{\partial x^n} = 0, \text{ für alle } n \geq 1.$$
Zeigen Sie, dass X vollständig ist.

Aufgabe 3. (5 Punkte). Definieren Sie auf $\mathbb{R}^2$ zwei Vektorfelder
$$X = x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}.$$
Berechnen Sie die Flüsse φ^X und φ^Y. Zeigen Sie, dass diese nicht kommutieren, das heißt, dass es Zeiten t und s gibt mit $\varphi^X_s \circ \varphi^Y_t \neq \varphi^Y_t \circ \varphi^X_s$.

Aufgabe 4. (5 Punkte)

Es seien M, N Mannigfaltigkeiten und $F : M \to N$ eine surjektive differenzierbare Abbildung. Seien $X \in C^\infty(TM)$ und $Y \in C^\infty(TN)$ zwei F-verwandte Vektorfelder. Es seien φ_t und ψ_t die Flüsse von X bzw. Y. Zeigen Sie, dass
$$\psi_t \circ F = F \circ \varphi_t.$$

Aufgabe 5. (Zusatzaufgabe, 5 Punkte)

Sei $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ eine lineare Lie-Gruppe, das heißt eine Untermannigfaltigkeit der $GL(n, \mathbb{R})$, welche zugleich auch eine Untergruppe ist. Die zugehörige Lie-Algebra $\mathfrak{g} = T_I G$ ist definiert als Tangentialraum von G an der Einheitsmatrix $I \in G$. Wir setzen für $g \in G$
$$l_g\colon\ G \to G, \quad h \mapsto gh.$$

(i) Zeigen Sie für $A \in \mathfrak{g}$

$$(l_g)_* A := T_I l_g(A) = gA,$$

wobei gA das übliche Matrizenprodukt bezeichnet.

(ii) Zu $A \in \mathfrak{g}$ betrachte man das zugehörige linksinvariante Vektorfeld

$$X_A \in \Gamma(TG), \quad X_A(g) = gA.$$

Begründen Sie, warum $X_A(g) \in T_g G$ für jedes $g \in G$. Zeigen Sie

$$[X_A, X_B](g) = g[A, B], \quad [X_A, X_B] = X_{[A,B]}.$$

Folgern Sie daraus, dass für $A, B \in \mathfrak{g}$ insbesondere gilt

$$[A, B] = AB - BA \in \mathfrak{g}.$$

(iii) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{g}$ als Vektorraum zum Raum der linksinvarianten Vektorfeldern auf G isomorph ist.