Prof. Dr. Matthias Lesch
Dr. Boris Vertman

Wintersemester 2013-14

3. Übung Globale Analysis I

Abgabe am Mittwoch, den 6. November nach der Vorlesung

Aufgabe 1. (5 Punkte)

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension m und $f : M \to \mathbb{R}^n$ eine Submersion bei $p \in M$. Zeigen Sie, dass die Komponenten von f in einer Umgebung zu einem Koordinatensystem ergänzt werden können. Das heißt es existieren eine offene Umgebung $U \subset M$ um p und eine differenzierbare Abbildung $g : U \to \mathbb{R}^{m-n}$, so dass die Abbildung

$$(f, g) : U \to \mathbb{R}^m$$

eine Karte um $p \in M$ ist.

Aufgabe 2. (5 Punkte)

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension m und $f = (f_1, ..., f_n) : M \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion bei $p \in M$. Zeigen Sie, dass eine offene Umgebung $U \subset M$ um p und Indizes

$$1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n,$$

existieren, so dass die Abbildung $(f_{i_1}, ..., f_{i_m}) : U \to \mathbb{R}^m$ eine Karte um $p \in M$ ist.

Aufgabe 3. (5 Punkte)

Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension m und $f : M \to \mathbb{R}^{m+1}$ eine differenzierbare Abbildung mit $0 \notin f(M)$. Zeige, dass es eine Gerade durch den Ursprung von $\mathbb{R}^{m+1}$ gibt, die nur endlich viele Punkte von $f(M)$ trifft.

Hinweis: Betrachten Sie den projektiven Raum $\mathbb{R}P^m$.

Aufgabe 4. (5 Punkte)

Man gebe eine Immersion $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ an, deren Bild der Torus mit Durchmesser $2a$ und "Dicke" $2r$ ist, wie im Bild unten angegeben.