Prof. Dr. Matthias Lesch
Dr. Boris Vertman Wintersemester 2013-14

2. Übung Globale Analysis I
Abgabe am Mittwoch, den 30. Oktober nach der Vorlesung

Aufgabe 1. (2-3 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{RP}^3$ definiert durch

$$f(x,y,z) = [x^2 + 2y^2 + z^2 : xy : y^2 : z^2].$$

(i) Zeige, dass $T_p\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, p\rangle = 0\}$.

(ii) Berechne die Tangentialabbildung T_pf für $p \in \mathbb{S}^2$. Für welche p ist diese injektiv?

Aufgabe 2. (2,5−2,5 Punkte)

Die sphärischen Koordinaten auf $M = \mathbb{R}^3 \backslash \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y = 0\}$ sind gegeben durch die Parametrisierung

$$\Phi : \mathbb{R}^*_+ \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \to M, \quad (r, \varphi, \theta) \mapsto (r\cos\varphi \sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta).$$

Seien (x,y,z) die kartesischen Koordinaten auf M mit der Standardparametrisierung

$$\Psi : M \to M, \quad (x,y,z) \mapsto (x,y,z).$$

(i) Drücke für $p \in M$ die Derivationen $\frac{\partial}{\partial r}\big|_p, \frac{\partial}{\partial \varphi}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial \theta}\big|_p$ im (x,y,z)-Koordinatensystem aus.

(ii) Drücke für $p \in M$ die Derivationen $\frac{\partial}{\partial x}\big|_p, \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial z}\big|_p$ im (r,φ,θ)-Koordinatensystem aus.

Aufgabe 3. (5 Punkte). Die differenzierbare Sturktur auf dem Tangentialbündel war Gegenstand der vorausgegangenen Übung. Beweisen Sie, dass das Tangentialbündel der Sphäre $\mathbb{S}^3$ als Mannigfaltigkeit zu $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3$ diffeomorph ist. *Hinweis*: Die Differenzierbarkeit der konstruierten Abbildung braucht nicht in allen Details nachgeprüft werden.

Aufgabe 4. (5 Punkte). Betrachten Sie auf $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ folgende zwei Karten

$$\varphi : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+, \quad x \mapsto x,$$
$$\psi : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi), \quad (x,y) \mapsto \left(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan(y/x)\right)$$

(i) Berechnen Sie für beide Karten die Standardbasis des Tangentialraumes $T_p\mathbb{R}^2_+$ an jedem Punkt $p \in \mathbb{R}^2_+$.

(ii) An welchem Punkt stimmen die beiden (nicht geordneten) Basen überein?