Prof. Dr. Matthias Lesch
Dr. Boris Vertman Wintersemester 2013-14

13. Übung Globale Analysis I

Abgabe am Mittwoch, den 29. Januar 2014 nach der Vorlesung

Aufgabe 1. (5 Punkte) Sei M zusammenhängend mit $H^1(M) = 0$ und $N \subset M$ eine abgeschlossene zusammenhängende Hyperfläche, d.h. $\dim N = \dim M - 1$.
Zeige: $M \setminus N$ besitzt genau zwei Wegzusammenhangskommenten, deren gemeinsamer Rand N ist. Sie dürfen benutzen, dass N eine sogenannte Tubenumgebung T besitzt: $T \supset N$ ist offen und es gibt einen Diffeomorphismus $\tau\colon T \to N \times (-1, 1)$ mit $\tau(x) = (x, 0)$ für $x \in N$.

Aufgabe 2. (5 Punkte) [Satz von Künneth] Sei $M = B \times F$ ein Produkt von glatten kompakten Mannigfaltigkeiten B und F. Seien π_B und π_F die Projektionen von M auf die zwei Faktoren. Die bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \Omega^\bullet(B) \times \Omega^\bullet(F) &\to \Omega^\bullet(M) \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \pi_B^*(\alpha) \wedge \pi_F^*(\beta) \end{aligned}$$

ist eine Kokettenabbildung und induziert einen Homomorphismus

$$f_*\colon\ H^\bullet(B) \otimes H^\bullet(F) \to H^\bullet(B \times F) = H^\bullet(M).$$

Zeige, dass f_* ein Isomorphismus ist, d.h.

$$H^p(B \times F) = \bigoplus_{j=1}^{p} H^j(B) \otimes H^{p-j}(F).$$

Hinweis: Benutze Induktion nach der Anzahl der offenen Mengen einer guten Überdeckung von B. Wende die Mayer-Vietoris-Sequenz und das Fünfer-Lemma für den Beweis des Induktionsschrittes an.

Aufgabe 3. (5 Punkte). [Thom Isomorphismus] Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension m und $\pi : E \to M$ ein orientiertes Vektorbündel vom Rang N.

(i) Zeigen Sie mittels der Poincaré Dualität

$$H_c^k(E) \cong H^{k-N}(M).$$

(ii) Der Isomorphismus $H_c^k(E) \cong H^{k-N}(M)$ kann wie folgt explizit konstruiert werden. Seien $[\omega] \in H_c^k(E)$ und $[\eta] \in H^{N+m-k}(E)$. Für die Kohomologieklasse $[\eta]$ kann $\pi^*\eta$ mit $\eta \in \Omega^{N+m-k}(M)$ geschlossen als Repräsentant gewählt werden. Dann erhält man bei geeigneter Orientierungswahl aus der Poincaré Paarung und dem Satz von Fubini

$$\langle [\omega], [\eta] \rangle = \int_E \pi^*\eta \wedge \omega = \int_M \eta \wedge \pi_*\omega,$$

wobei $\pi_* : \Omega_c^k(E) \to \Omega^{k-N}(M)$ die Integration entlang von Fasern ist.

Erläutern Sie die einzelnen Konstruktionsschritte und zeigen Sie die Wohldefiniertheit von π_* in lokalen Karten. Beweisen Sie, dass π_* einen Isomorphismus $\pi_* : H_c^k(E) \to H^{k-N}(M)$ induziert.

Aufgabe 4. (5 Punkte). Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M. Sei $\iota : \partial M \hookrightarrow M$ die Inklusion des Randes. Wir betrachten Differentialformen auf M mit absoluten Randbedingungen, das heißt

$$\Omega_a^\bullet(M) := \{\omega \in \Omega^\bullet(M) \mid \iota^*(*\omega) = 0\}.$$

Beweisen Sie

$$H^\bullet(M) \cong \frac{\ker d \cap \Omega_a^\bullet(M)}{\mathrm{im} d \cap \Omega_a^\bullet(M)}.$$

Sie dürfen annehmen, dass ∂M eine Tubenumgebung $U \subset M$ besitzt, das heißt $U \subset M$ ist offen und diffeomorph zu $[0,1)_x \times \partial M$.

Hinweis: Auf U lässt sich jede Differentialform schreiben als $\omega = \omega_1(x) + dx \wedge \omega_2(x)$, wobei $\omega_{1,2}(x)$ Werte in den Differentialformen über ∂M annehmen. Betrachten Sie die Differentialform $\varphi(x)\omega_2(0)$, wobei $\varphi \in C^\infty(M)$ und $\varphi|_U \equiv x$.